Classification of quantum graphs on M_2 and their quantum automorphism groups

京都大学大学院 理学研究科 数学・数理解析専攻 数学系
松田隼一朗 (Junichiro MATSUDA)

概要

量子グラフの概念は 2010 年代初頭に量子情報理論に触発されて導入され、量子情報理論、作用素環論、量子群論などとの関わりの中で近年発展してきた。Musto, Reutter, Verdon [7] が導入した隣接行列としての量子グラフが本研究の主な対象である。量子グラフの抽象的な構成法はいくつか論じられていたが、新しい分野であることもあり非自明な具体例に乏しい面があった。そこで、量子グラフの明示的な具体例や正しい直観を得るために最も基本的な非可換環 M_2 上の量子グラフと量子自己同型群の分類を行った。また、その結果から量子グラフと古典グラフの間の非自明な量子同型を得て、系として量子自己同型群の表現圏の間の同値性 $SO(3) \sim_{mon} S_4^+, O(2) \sim_{mon} H_2^+$ が導かれた。

1　導入

Gelfand の双対性に端を発する非可換理論・作用素環論の文脈において、「量子」という単語は古典的な対象の「非可換」な一般化・類似物の意味で用いられる。$\mathbb{C}$ 上のノルム付き $*$-代数で C^*-条件 $\|x^*x\| = \|x\|^2$ を満たすものを C^*-環というが、（狭義の）Gelfand の双対性とは単位元を持つ可換 C^*-環とコンパクトハウスドルフ空間との圏論的双対性のことで、具体的には $C(X)$ を位相空間 X 上の連続関数環として

コンパクトハウスドルフ空間 $X = \mathrm{Spec}(A)$	連続写像 $f : X \to Y$
単位的可換 C^*-環 $A = C(X)$	単位的 $*$-準同型 $\cdot \circ f : C(Y) \to C(X)$

という対象と射の対応で与えられる。そこからのアナロジーで、一般の非可換な C^*-環を “非可換な” 空間（の関数空間）と見なすことにより作用素環論、非可換幾何学、量子群論、量子情報理論、など様々な分野が発展してきた。今回扱う量子グラフもその流れを汲み、古典グラフにおける頂点集合を量子化（非可換化）したものになっている。

2　古典グラフから量子グラフへ

辺の重複がなく向きのある (有限) 有向グラフは、頂点の集合 V とそれらを結ぶ辺の集合 $E \subset V \times V$ の組 (V, E) として定義され、辺に向きのない無向グラフは全ての辺 (i, j) が逆 (j, i) も辺に持つ有向グラフとして記述できる。こうしたグラフはネットワークなどのモデルとしての側面を持つ。作用素論的な定式化としては、頂点 j から i への辺があるとき (i, j) 成分が 1、ないとき (i, j) 成分が 0

となる隣接行列 $A = (A_{ij}) \in M_{|V|}$ を考える方法がある。行列の成分ごとの積を Schur 積というが、$\{0,1\}$-値である隣接行列が Schur 積に関して冪等な行列として特徴付けられることに注意する。隣接行列 A は有限集合 V 上の関数空間 $C(V) = \mathbb{C}^V = \ell^2(V)$ に作用する作用素

$$A : C(V) \to C(V) \quad (Af)(i) = \sum_j A_{ij} f(j)$$

と見なせるため、そのスペクトルなどを用いて解析的手法でグラフの情報を調べることができる。なお、無向グラフの隣接行列は対称になり、辺の重複や重みのあるグラフは重みを成分とするより一般の行列として記述される。より一般の重みを含めて繋がり方に着目した定式化としては、辺に対応する行列単位 e_{ij}（(i,j) 成分が 1 で他が 0 の行列）で張られる $M_{|V|}$ の部分空間

$$\mathcal{S} = \mathrm{span}\{e_{ij} \mid (i,j) \in E\} \subset M_{|V|} = B(\ell^2(V))$$

を考える手法もある。次式は無向グラフの場合の対応の一例である。

$$\bullet\!-\!\bullet\!-\!\bullet\!\!\circ \quad \leftrightarrow A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \leftrightarrow \mathcal{S} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & * & 0 \\ * & 0 & * \\ 0 & * & * \end{pmatrix} \right\}$$

古典グラフはこのように頂点集合 V とその上の付加構造の組として捉えられる。Gelfand の双対性から、V に対応する可換な C^*-環 $C(V)$ を一般の C^*-環 B に置き換え、付加構造を上手く一般化することにより量子グラフを定義することができる。

量子グラフの概念は量子情報理論の文脈で Duan, Severini, Winter により無向グラフの辺の空間 $\mathcal{S}$ を非可換化した noncommutative graph として最初に導入された。古典グラフが V 上の関係 $E \subset V \times V$ として捉えられることから、量子関係としての量子グラフを Weaver が導入した。量子関係自体も Weaver が導入したもので、Duan らが $C(V)$ にあたる関数環として Hilbert 空間 H 上の有界作用素が成す環 $B(H)$ のみを扱っていたのに対して、量子関係はより一般の von Neumann 環 $B \subset B(H)$ を関数環として扱えるようになっている。Musto, Reutter, Verdon[7] は Schur 積の概念を有限次元 C^*-環 B 上の作用素 $A : B \to B$ に拡張することにより、量子隣接行列として量子グラフを定式化した。Musto らは B 上の標準的なトレースを用いて Schur 積を定義したが、その後 Brannan らが δ-form と呼ばれるより一般の状態 (B 上の汎関数 $\psi : B \to \mathbb{C}$ で単位的 $\psi(1_B) = 1$ かつ正値 $\psi(x^*x) \geq 0$ なもの) を用いて同様に量子グラフを定義し、それら量子グラフの量子自己同型群なども導入した。

Musto らの業績は string diagram (cf [10], [4]) を用いた優れた記法を量子グラフなどに適用した点にもあり、筆者の仕事の一部は一般の δ-form のもとでの string diagram の取り扱いについて精密化したことである。

ここでは量子隣接行列としての量子グラフの定式化について述べる。ψ を有限次元 C^*-環 B 上の忠実な状態とする。つまり $\langle x|y\rangle \coloneqq \psi(x^*y)$ で定まる B 上の内積が非退化で、（GNS 構成で）得られる内積空間が $L^2(B,\psi) \cong B$ であるとする。B の環構造から積 $m : B \otimes B \ni a \otimes b \mapsto ab \in B$ が定まるが、Hilbert 空間上の作用素として m の随伴をとることで余積 $m^\dagger : B \to B \otimes B$ を得る.

Definition 2.1 (Banica [1], Musto, Reutter, Verdon [7], Brannan, et al. [2])**.** $\delta > 0$ とする。B

上の忠実な状態 ψ は $mm^\dagger = \delta^2 \mathrm{id}_B$ を充たすときに δ-form と呼ばれる。このとき (B, ψ) を量子集合と呼ぶ。

古典グラフの場合 $C(V)$ 上の δ-form は $\delta^2 = |V|$ となる頂点集合上の一様分布 μ（に関する積分 $\int \cdot \, d\mu$）のみであることが確かめられるため、δ-form は一様分布のある種の一般化になっている。量子集合上の作用素に対しては以下のように Schur 積が一般化される。

Definition 2.2. 量子集合 (B, ψ) 上の作用素 $A_0, A_1 : B \to B$ に対し、その Schur 積 $A_0 \bullet A_1 : B \to B$ を以下により定義する:

$$A_0 \bullet A_1 \coloneqq \delta^{-2} m(A_0 \otimes A_1) m^\dagger.$$

古典グラフの場合 $(C(V), \mu)$ の標準基底 $(e_i)_{i \in V}$ について $m(e_i \otimes e_j) = \delta_{ij} e_i,\ m^\dagger(e_i) = |V| e_i \otimes e_i$ となるため、$A_0 \bullet A_1 : C(V) \to C(V)$ は A_0, A_1 を行列表示したときの成分ごとの積に一致することが分かる。Schur 積を環構造から再構成した Musto らの洞察は見事である。なお、一般の B に対しては Schur 積が非可換な積であることに注意されたし。

Definition 2.3 (Musto, Reutter, Verdon [7], Brannan et al. [2])**.** 量子集合 (B, ψ) 上の量子隣接行列とは、$A : B \to B$ で Schur 冪等なもののことである:

$$A \bullet A = \delta^{-2} m(A \otimes A) m^\dagger = A.$$

このとき $\mathcal{G} = (B, \psi, A)$ を (B, ψ) 上の量子グラフという.

量子グラフ $\mathcal{G} = (B, \psi, A)$ の基本的な性質として以下が挙げられる。構成要素である ψ や A の性質をそのまま $\mathcal{G}$ の性質と呼ぶことも多い。

- ψ が tracial $\psi(xy) = \psi(yx)$ であるとき $\mathcal{G}$ が tracial;
  tracial δ-form τ は $B = \bigoplus_s M_{n_s}$ に対して $\tau = (\dim B)^{-1} \bigoplus_s n_s \operatorname{Tr}_s$ として一意に定まることが知られている。
- A が self-adjoint $A^\dagger = A$ であるとき $\mathcal{G}$ が self-adjoint;
- A が real (実,$*$-preserving)$A(x^*) = (Ax)^*$ であるとき $\mathcal{G}$ が real;
  古典グラフの場合 A は自動的に real であったが、量子グラフの場合そうとは限らない。
- A が real かつ self-adjoint のとき $\mathcal{G}$ が無向 (undirected);
  古典グラフの場合は real が自明なので self-adjoint のみでよかったが、量子グラフの場合 real を課さないと無向グラフらしくならない。
- A が正値（半正定値性を保つ $A(B_+) \subset B_+$）なときに $\mathcal{G}$ が正値; A が完全正値（任意の n について $n \times n$ の B-値行列環に成分ごとの作用で拡張しても正値 $A^{(n)}(M_n(B)_+) \subset M_n(B)_+$）なときに $\mathcal{G}$ が完全正値;
- $A \bullet \mathrm{id}_B = \mathrm{id}_B$ のとき $\mathcal{G}$ が reflexive, $A \bullet \mathrm{id}_B = 0$ のとき irreflexive;
  古典グラフの場合 id_B との内積は行列の対角成分を抜き出すことにあたり、この条件はすべてのループを辺に持つ/持たないことを意味する。
- 定数 d に対し $A1 = d1$ かつ $\psi A = d\psi$ のとき $\mathcal{G}$ が d-正則という。d は次数と呼ばれる。
  古典グラフの場合各頂点に出入りしている辺の数がそれぞれ d のとき d-正則というが、その

特徴付けのひとつである定数関数 1_V が隣接行列の固有値 d の固有ベクトルであることのアナロジーである。

また、Schur 冪等性から次の同値性が導かれる。

Proposition 2.4 (M [6])**.** *量子グラフ* $\mathcal{G} = (B, \psi, A)$ *について、以下は同値:*

- *A は実;*
- *A は正値;*
- *A は完全正値.*

Example 2.5. 量子グラフの典型例として以下が挙げられる。

- 古典グラフ (V, E), V 上の一様分布 μ, 隣接行列 $A : C(V) \to C(V)$ について, $(C(V), \tau, A)$ は量子グラフであり、逆に可換な量子グラフは Gelfand の双対性からこの形で与えられる.
- $A = \mathrm{id}_B$ は '各頂点のループ' のみからなる (B, ψ) 上の自明量子グラフを与え、これは reflexive 1-正則無向量子グラフである。
- $A = \delta^2\psi(\cdot)1 = \delta^2 |1\rangle\langle 1|$ は可能なすべての辺を持つ (B, ψ) 上の (reflexive) 完備グラフを与え、これは reflexive δ^2-正則無向量子グラフである。

このようにして量子グラフが定義され、与えられた量子グラフ (B_i, ψ_i, A_i) からは直和 $(B_0 \oplus B_1, \frac{\delta_0^2\psi_0 \oplus \delta_1^2\psi_1}{\delta_0^2 + \delta_1^2}, A_0 \oplus A_1)$ やテンソル積 $(B_0 \otimes B_1, \psi_0 \otimes \psi_1, A_0 \otimes A_1)$、抽象的な変形で新しい量子グラフを構成する方法 [8] やランダム構成 [3] など、抽象的な量子グラフの構成法は知られていた。しかし、導入されたのが 2010 年代初頭なのもあり量子グラフの明示的な具体例は完備グラフなどの自明なものしか知られていなかった。そこで筆者は最も基本的な非可換環 $B = M_2$ の場合について量子グラフと量子自己同型群の明示的な記述と分類を行った。

3 量子自己同型群

量子グラフの量子自己同型群とは、量子グラフに作用する普遍的なコンパクト量子群 (CQG) のことを指し、具体的には以下で与えられる。

Definition 3.1 (Woronowicz [11, 12])**.** コンパクト量子群とは可分単位的 C^*-環 $\mathcal{A}$ と余積と呼ばれる $*$-準同型 $\Delta : \mathcal{A} \to \mathcal{A} \otimes_{\min} \mathcal{A}$ の組 $G = (\mathcal{A}, \Delta)$ で以下を充たすもののことである:

(coassociative) $(\Delta \otimes \mathrm{id}_{\mathcal{A}})\Delta = (\mathrm{id}_{\mathcal{A}} \otimes \Delta)\Delta$;
(cancellative) $(\mathcal{A} \otimes 1)\Delta(\mathcal{A})$ と $(1 \otimes \mathcal{A})\Delta(\mathcal{A})$ は $\mathcal{A} \otimes \mathcal{A}$ で稠密.

古典的なコンパクト群 G は $\Delta : C(G) \to C(G) \otimes C(G) \cong C(G \times G), (\Delta f)(x, y) = f(xy)$ として CQG $(C(G), \Delta)$ と見なせる。$\mathcal{A}$ は一般に非可換であるが、古典群とのアナロジーから形式的に $C(G)$ と書くのが一般的である。Gelfand の双対性から $C(G)$ が量子群の台集合を与え、Δ が群演算を与えていると言える。

Definition 3.2 (Brannan et al. [2])**.** 量子グラフ $\mathcal{G} = (B, \psi, A)$ の量子自己同型群は以下を充たす組 $\mathrm{Qut}(\mathcal{G}) = (C(\mathrm{Qut}(\mathcal{G})), \Delta)$ からなる CQG である:

- $C(\mathrm{Qut}(\mathcal{G}))$: $B = L^2(B, \psi)$ の正規直交基底 (e_i) に対して、

$$\rho : B \ni e_i \mapsto \sum_k e_k \otimes u_i^k \in B \otimes C(\mathrm{Qut}(\mathcal{G}))$$

  を単位的 $*$-準同型とし $\rho\, A = (A \otimes \mathrm{id})\rho$ を充たす unitary $u = (u_i^k)_{k,i} \in M_n(C(\mathrm{Qut}(\mathcal{G})))$ の係数 u_i^k で生成される単位的普遍 C^*-環;
- 余積 $\Delta : C(\mathrm{Qut}(\mathcal{G})) \to C(\mathrm{Qut}(\mathcal{G})) \otimes C(\mathrm{Qut}(\mathcal{G}))$ は $*$-準同型で次を充たすもの:

$$\Delta u_i^k = \sum_j u_j^k \otimes u_i^j.$$

上記の ρ は基本表現と呼ばれ、対称群 $S_N = \mathrm{Aut}(X)$ でいう N 点集合 X への自然な作用にあたるものである。古典群の集合への作用は $S_N \times X \to X$ という写像で記述されるが、量子群としての作用は Gelfand 双対をとった関数環の準同型 $C(X) \to C(S_N \times X) \cong C(S_N) \otimes C(X)$ で余積と余結合的なものとして記述される。

4 M_2 における分類

M_2 上の tracial 2-form は $\tau = \mathrm{Tr}\,/2$ で与えられる. 隣接行列 A を ONB $(\sqrt{2}e_{11}, \sqrt{2}e_{12}, \sqrt{2}e_{21}, \sqrt{2}e_{22})$ について行列表示して条件式を解くことにより以下を得る.

Theorem 4.1 (M [6], Gromada [5])**.** (M_2, τ) 上の *reflexive* 無向量子グラフ A は以下の d-正則量子グラフのいずれかに同型である.

$$d = 1) \quad A_1 = \mathrm{id}_B = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix}, \mathrm{Spec}(A_1) = \{1, 1, 1, 1\}.$$

$$d = 2) \quad A_2 = \begin{pmatrix} 2 & & & \\ & 0 & & \\ & & 0 & \\ & & & 2 \end{pmatrix}, \mathrm{Spec}(A_2) = \{2, 2, 0, 0\}.$$

$$d = 3) \quad A_3 = \begin{pmatrix} 1 & & & 2 \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ 2 & & & 1 \end{pmatrix}, \mathrm{Spec}(A_3) = \{3, 1, 1, -1\}.$$

$$d = 4) \quad A_4 = 4\tau(\cdot)1 = \begin{pmatrix} 2 & & & 2 \\ & 0 & & \\ & & 0 & \\ 2 & & & 2 \end{pmatrix}, \mathrm{Spec}(A_4) = \{4, 0, 0, 0\}.$$

なお、tracial な場合については筆者と同様の動機から Gromada が辺の空間 $\mathcal{S}$ との対応を利用する別の手法で同様の分類結果を出している。

M_2 上の一般の δ-form は Powers state $\omega_q = Tr(Q\cdot)$ にユニタリ同値であり、$\delta = q + q^{-1}$, $q \in (0,1]$, $Q = \frac{1}{1+q^2}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & q^2\end{pmatrix}$ で与えられる. $q = 1$ とすると $\omega_1 = \tau$ に帰着するから $q < 1$ としてよい。このとき ONB$(e_{ij}Q^{-1/2})$ について (M_2, ω_q) 上の隣接行列 A を行列表示すると以下を得る.

Theorem 4.2 (M [6]). *$q \in (0,1)$ に対して、(M_2, ω_q) 上の reflexive 無向量子グラフ A は以下のいずれかである.*

- $A_1^q = \mathrm{id}_B = \begin{pmatrix}1 & & & 0\\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ 0 & & & 1\end{pmatrix}$, 1-正則.
- $A_3^q = \begin{pmatrix}1 & & & \delta\\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ \delta & & & 1\end{pmatrix}$, 非正則.
- $A_2^q = \begin{pmatrix}q^{-1}\delta & & & \\ & 0 & & \\ & & 0 & \\ & & & q\delta\end{pmatrix}$, 非正則.
- $A_4^q = \delta^2\omega_q(\cdot)1 = \begin{pmatrix}q^{-1}\delta & & & \delta\\ & 0 & & \\ & & 0 & \\ \delta & & & q\delta\end{pmatrix}$, δ^2-正則.

なお、上のパラメータで $q = 1$ とすると、tracial な場合に分類した量子グラフに一致する。これらの量子グラフ $\mathcal{G}_d^q = (M_2, \omega_q, A_d^q)$ の量子自己同型群として、特殊直交量子群 $SO_q(3)$ や直交群 $O(2)$, ユニタリトーラス $\mathbb{T} = U(1)$ が以下のように得られた。

Theorem 4.3 (M [6], Gromada [5]). *Tracial な場合、*

$$\mathrm{Qut}(\mathcal{G}_1^1) = \mathrm{Qut}(\mathcal{G}_4^1) \cong SO(3). \qquad \mathrm{Qut}(\mathcal{G}_2^1) = \mathrm{Qut}(\mathcal{G}_3^1) \cong O(2).$$

Theorem 4.4 (M [6]). *$q \in (0,1)$ について、*

$$\mathrm{Qut}(\mathcal{G}_1^q) = \mathrm{Qut}(\mathcal{G}_4^q) \cong SO_q(3). \qquad \mathrm{Qut}(\mathcal{G}_2^q) = \mathrm{Qut}(\mathcal{G}_3^q) \cong \mathbb{T} < SO_q(3).$$

証明には Sołtan [9] による (M_2, ω_q) に作用する普遍的な CQG としての $SO_q(3)$ の特徴付けが利いている.

さて、ここで tracial な場合の正則量子グラフ $\mathcal{G}_d^1$ のスペクトルを観察すると、実は 4 点集合上の reflexive 正則古典グラフのスペクトルに一致していることに気付く。実際これらの間には量子同型と呼ばれる同型より弱いが高い類似性があることを示すことができる。集合間の同型はスカラー ($\mathbb{C}$ の射影 $\{0,1\}$) 値の permutation 行列を用いて記述できるが、集合間の量子同型は対応を与える行列として作用素 ($B(H)$ の射影) 値の量子 permutation 行列を許すことで得られ、量子グラフの量子同型はそれらを一般化したものになっている。

Theorem 4.5 (M [6], Gromada [5]). *各 $d = 1,2,3,4$ について、(M_2, τ) 上の $\mathcal{G}_d^1$ は 4 点集合上の reflexive d-正則古典グラフと量子同型である.*

筆者は量子同型を計算することによりこれを示した。一方、Gromada は $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ の Cayley グラフを量子同型な別のグラフに変形する方法でこれを示している。

CQG G_0, G_1 について、そのユニタリ表現を対象とし intertwiner を射とする圏 $\mathrm{Rep}(G_i)$ の間に表現のテンソル積を保つ同値（テンソル圏としての同値）が成り立つときに G_0, G_1 がモノイド同値 $G_0 \sim_{mon} G_1$ であるという。Brannan らにより量子同型がモノイド同値を誘導することが示されている。

Theorem 4.6 (Brannan et al. [2, Theorem 4.7])**.** 量子グラフの量子同型 $\mathcal{G}_0 \cong_q \mathcal{G}_1$ に対して、量子自己同型群のモノイド同値 $\mathrm{Qut}(\mathcal{G}_0) \sim_{mon} \mathrm{Qut}(\mathcal{G}_1)$ が成り立つ。

したがって、Theorem 4.5M [6], Gromada [5]dfn.4.5 の系として以下を得る。

Corollary 4.7. (1)　特殊直交群 $SO(3)$ は量子対称群 S_4^+ とモノイド同値である.
(2)　直交群 $O(2)$ は量子正八面体群 $H_2^+ < S_4^+$ とモノイド同値である.

これらのモノイド同値は量子群論において既に知られている結果ではあるが、重要な量子群の間のモノイド同値を量子グラフの応用という新たな手法で示すことができたという点で興味深い。具体的な量子グラフの構成法などの発展に伴い、今後量子群興味深い具体例やモノイド同値が得られるのではないかと期待される。

参考文献

[1] Teodor Banica. Quantum groups and Fuss–Catalan algebras. *Communications in mathematical physics*, 226(1):221–232, 2002.

[2] Michael Brannan, Alexandru Chirvasitu, Kari Eifler, Samuel Harris, Vern Paulsen, Xiaoyu Su, and Mateusz Wasilewski. Bigalois extensions and the graph isomorphism game. *Communications in Mathematical Physics*, 375(3):1777–1809, Sep 2019.

[3] Alexandru Chirvasitu and Mateusz Wasilewski. Random quantum graphs. *arXiv preprint arXiv:2011.14149*, 2020.

[4] Bob Coecke and Aleks Kissinger. *Picturing Quantum Processes: A First Course in Quantum Theory and Diagrammatic Reasoning*. Cambridge University Press, 2017.

[5] Daniel Gromada. Some examples of quantum graphs. *arXiv preprint arXiv:2109.13618*, 2021.

[6] Junichiro Matsuda. Classification of quantum graphs on m_2 and their quantum automorphism groups. *arXiv preprint arXiv:2110.09085*, 2021.

[7] Benjamin Musto, David Reutter, and Dominic Verdon. A compositional approach to quantum functions. *Journal of Mathematical Physics*, 59(8):081706, 2018.

[8] Benjamin Musto, David Reutter, and Dominic Verdon. The Morita theory of quantum graph isomorphisms. *Communications in Mathematical Physics*, 365(2):797–845, 2019.

[9] Piotr M Sołtan. Quantum $SO(3)$ groups and quantum group actions on M_2. *Journal of Noncommutative Geometry*, 4(1):1–28, 2010.

[10] Jamie Vicary. Categorical formulation of finite-dimensional quantum algebras. *Communi-*

cations in Mathematical Physics, 304(3):765–796, 2011.

[11] Stanisław L Woronowicz. Compact matrix pseudogroups. *Communications in Mathematical Physics*, 111(4):613–665, 1987.

[12] Stanisław L Woronowicz. Compact quantum groups. *Symetries quantiques, Papers from the NATO Advanced Study Institute, Les Houches, 1995*, pages 845–884, 1998.