The space of non-extendable quasimorphisms

名古屋大学大学院多元数理科学研究科 多元数理科学専攻
丸山修平 (Shuhei MARUYAMA)

概要

群上の “有界な誤差で準同型” となる実数値関数を擬準同型 (quasimorphism) という．正規部分群上の擬準同型が全体の群に拡張できるか, という「擬準同型の拡張問題」について得られた結果を紹介する．とくに, 自由群, 曲面群, 3-manifold 群, 自由群の (IA-) 自己同型群など, 幾何由来の群に関する拡張不可能な擬準同型の空間の決定について紹介する．本稿は川崎盛通氏 (青山学院大学), 木村満晃氏 (京都大学), 松下尚弘氏 (琉球大学), 見村万佐人氏 (東北大学) との共同研究に基づく．

1 序

本稿ではプレプリント [KKM+21] の結果を紹介する．

群 G 上の実数値関数 $\mu\colon G \to \mathbb{R}$ が擬準同型 (quasimorphism) であるとは,

$$D(\mu) = \sup_{g,h\in G} |\mu(gh) - \mu(g) - \mu(h)| < \infty$$

が成り立つときをいう．つまり擬準同型とは “有界な誤差で準同型” な関数である．また, 任意の巡回部分群上で準同型となる擬準同型を斉次擬準同型 (homogeneous quasimorphism) という．斉次擬準同型のなす線形空間を $Q(G)$ で表す．以下では斉次なものしか扱わないので, 単に擬準同型と書いたら斉次なものを指すことにする．

G の正規部分群 N 上の G 不変擬準同型 μ が与えられたとき, それが G 上の擬準同型に拡張できるか, という G 不変擬準同型の拡張問題を扱う (ここで G 不変というのは共役不変の意味である). 拡張不能擬準同型については, 筆者の知る限り [Sht16], [KK19] の例しか無かった.[*1] また [Sht16] の例は拡張不能な準同型なので, 真に擬準同型であり拡張不能なものは [KK19] の例しか見つかっていなかった．

一般に擬準同型の構成は難しいので, 拡張不能な擬準同型を構成するのはなおのこと難しい．そこで, 拡張不能な擬準同型の存在や非存在くらいは示せないだろうか, ということで, 拡張不能な擬準同型のなす線形空間

$$\mathcal{NE}(G,N) = Q(N)^G \big/ \big(i^*Q(G) + H^1(N)^G\big)$$

を導入し (3 章), その線形空間の非自明性や自明性を調べることにする．この空間の正確な意味は 3 章で説明するが, ラフに述べると, この空間 $\mathcal{NE}(G,N)$ が非自明なとき, N 上に拡張不能な G 不変擬準同型が存在する．

[*1] 本研究とほぼ同時期に, 拡張不能準同型の別の例を見つけた [KM20].

本稿の主結果は以下である:

定理 1.1 ([KKM+21])**.** (1) 自由群 $G = F_n$ とその交換子部分群 N に対し, $\mathcal{NE}(G, N) = 0$.
(2) 自由群の自己同型群 $G = \mathrm{Aut}(F_n)$ と IA-自己同型群 $N = \mathrm{IA}_n$ に対し, $\mathcal{NE}(G, N) = 0$.
(3) 連結成分が 2 つの双曲絡み目の基本群 G とその交換子部分群 N に対し, $\mathcal{NE}(G, N) = 0$.
(4) 種数 2 以上の閉曲面の基本群 G とその交換子部分群 N に対し, $\mathcal{NE}(G, N) \cong \mathbb{R}$.
(5) 種数 $l \geq 2$ の閉曲面上の向きを保つ同相写像 f に対し, M_f でその写像トーラスを表し, G を M_f の基本群, N を交換子部分群とする. 同相写像 f が擬アノソフであり, その写像類がトレリ群に入るとき, $\mathcal{NE}(G, N) \cong \mathbb{R}^{2l+1}$.

$\mathcal{NE}(G, N)$ は商空間として定義されているが, 上定理の例ではすべて分子の空間も分母の空間も非可算無限次元の空間である (定理 2.2 から分かる). しかし商を取りその差を見てみると, 自由群の例だと分子と分母の差はなく, 曲面群の例だとその差はたったの 1 次元分しかない.

拡張不能擬準同型やその空間にはいくつか応用がある ([KKMM21b], [KKM+21]). とくに空間 $\mathcal{NE}(G, N)$ に関して, 次の安定交換子長 scl_G と $\mathrm{scl}_{G,N}$ の同値定理が成り立つ.

定理 1.2 ([KKM+21])**.** $\mathcal{NE}(G, N) = 0$ のとき, scl_G と $\mathrm{scl}_{G,N}$ は双リプシッツ同値である.

2 擬準同型と交換子長

以下では擬準同型と (安定) 交換子長の基礎的なことを紹介する. 擬準同型や (安定) 交換子長については [Cal09] が標準的な教科書である.

擬準同型は準同型を含む広いクラスであるが, 擬準同型を考える動機の一つに完全群がある. 完全群とは任意の元が交換子 $[g, h] = ghg^{-1}h^{-1}$ の積で表せるという群である. G を完全群としたとき, 実数値準同型 $G \to \mathbb{R}$ はすべて自明となることが定義から直ちに分かる. したがって, 実数値準同型を用いて完全群の情報を取り出すことは不可能である. 一方, 完全群は擬準同型なら許容し得て, その擬準同型を用いてその完全群の代数的な情報 (例えば交換子長など) を取り出すことができる.

群 G の交換子部分群 $[G, G]$ の元 g について, その交換子長 (commutator length) $\mathrm{cl}_G(g)$ は, g を与える交換子の最小数

$$\mathrm{cl}_G(g) = \min\{l \in \mathbb{N} \mid g = [a_1, b_1] \cdots [a_l, b_l]\}$$

である. 交換子長は幾何的には “最小種数” とみなすことができる. 例えば G として多様体の基本群を考える (もしくは離散群 G の分類空間を考える). このとき G の元 g は多様体上のループで実現できるが, そのループを張る境界付き曲面の種数の最小数がまさに g の交換子長である.

一般に交換子長の計算は非常に難しい.*2 そこで交換子長の安定化として安定交換子長 (stable commutator length)

$$\mathrm{scl}_G(g) = \lim_{n \to \infty} \frac{\mathrm{cl}_G(g^n)}{n}$$

を考える. 交換子長は劣加法性を持つので, 極限は必ず存在する. 安定交換子長の計算については, 擬

*2 プレプリント [Heu20] のタイトルを見よ.

準同型を用いた次の定理がある.

定理 2.1 ([Bav91], Bavard の双対定理)**.** 交換子部分群の元 $g \in [G,G]$ に対し,

$$\mathrm{scl}_G(g) = \sup_{\mu \in Q(G)/H^1(G)} \frac{|\mu(g)|}{2D(\mu)}$$

が成り立つ.

したがって具体的な擬準同型が構成できたとすると, それを用いて安定交換子長の lower bound を与えることができる. とくに安定交換子長が非零とすると, 交換子長は非有界関数であることが分かる. 完全群 G について交換子長が有界関数になるとき, G を一様完全群という. つまり完全群上に非自明な擬準同型が存在すると, その群は一様完全群にはなり得ないことが分かる.

擬準同型と一様完全性に関する例として, Poincaré の translation number ([Poi81]) を挙げる. 円周の向きを保つ同相群を $\mathcal{H}$, 実数直線上の同相写像で 1 平行移動と可換なもののなす群を $\widetilde{\mathcal{H}}$ で表す. $\widetilde{\mathcal{H}}$ は $\mathcal{H}$ の普遍被覆群となることが知られている. 写像 $\tau\colon \widetilde{\mathcal{H}} \to \mathbb{R}$ を

$$\tau(h) = \lim_{n\to\infty} \frac{h^n(0)}{n}$$

で定める. 極限が必ず存在し, 擬準同型となることは簡単に分かる. この τ を Poincaré の translation number という. Translation number は円周の力学系の研究の過程で [Poi81] で導入され, その有理性と円周の同相写像の周期点の存在が同値となるなど, 円周の力学系における基本的で重要な道具である. 簡単に分かるように 1 平行移動 $T \in \widetilde{\mathcal{H}}$ について $\tau(T) = 1$ なので, $\mathrm{scl}_{\widetilde{\mathcal{H}}}(T) > 0$ である.[*3] $\mathcal{H}$ は一様完全群であることが知られている. 一方, $\widetilde{\mathcal{H}}$ は完全群であることが知られているが, 上記の理由から $\widetilde{\mathcal{H}}$ は一様完全でないことが分かる.

Thurston や Banyaga の定理により, 閉多様体の微分同相群やハミルトン微分同相群は完全群であることが知られている. このことから擬準同型は微分同相群などでよく調べられているが, 幾何群論的な視点から有限生成群においても擬準同型は盛んに調べられている. 擬準同型の存在について, 次の定理がある.

定理 2.2 ([EF97])**.** G が非初等的双曲群のとき, $Q(G)$ は非可算無限次元である.

例えば閉双曲多様体の基本群上には, 擬準同型が豊富に存在している.

3 G 不変擬準同型と (G,N)-交換子長

ここまでの章では, 群を一つ固定して, その群上の擬準同型について述べてきた. 以下では, 群 G とその正規部分群 N を固定して, 各群上の擬準同型の関係について「擬準同型の拡張可能性」の観点から話をする.

簡単に分かることとして, G 上の擬準同型 μ は G 不変, つまり任意の $g, h \in G$ に対し $\mu(ghg^{-1}) = \mu(h)$ が成り立つ. このことから, 擬準同型 $\mu\colon G \to \mathbb{R}$ の N への制限も以下の G 不変性を持つ.

[*3] 実際には $\mathrm{scl}_{\widetilde{\mathcal{H}}}(T) = 1/2$ となる.

定義 3.1. N 上の擬準同型 μ が G 不変であるとは, 任意の $g \in G$, $x \in N$ に対し $\mu(gxg^{-1}) = \mu(x)$ を満たすときをいう. G 不変擬準同型のなす空間を $Q(N)^G \subset Q(N)$ で表す.

したがって, G 不変性は N 上の擬準同型が G に拡張するための簡単な必要条件である.

一般に, N 上の G 不変擬準同型が G 上の擬準同型の制限として得られるとは限らない. そのような擬準同型の存在や非存在を議論するために, 次の空間を導入する.

定義 3.2. 商空間

$$\mathcal{NE}(G,N) = Q(N)^G \big/ \big(i^*Q(G) + H^1(N)^G\big)$$

を拡張不能擬準同型のなす空間とよぶ. ここで $H^1(N)^G$ は N 上の G 不変準同型のなす空間である.

G 不変な準同型で割っているので, 真に擬準同型で拡張不能なものを見ている. 拡張不能性の観点から言うと, 空間 $\mathcal{NE}(G,N)$ は G 不変準同型で摂動しても拡張できない擬準同型と見ていることになる.

この空間を考える一つの動機に (G,N)-交換子長がある. まず, $g \in G$ と $x \in N$ に対し, 元 $[g,x] = gxg^{-1}x^{-1}$ を (G,N)-交換子とよび, (G,N)-交換子で生成される群 $[G,N]$ を (G,N)-交換子部分群とよぶ. (G,N)-交換子部分群の元 g に対し, (G,N)-交換子長 $\mathrm{cl}_{G,N}(g)$ を

$$\mathrm{cl}_{G,N}(g) = \min\{l \in \mathbb{N} \mid g = [g_1,x_1]\cdots[g_l,x_l],\ x_1,\ldots,x_l \in N\}$$

で定義する. 安定 (G,N)-交換子長 $\mathrm{scl}_{G,N}(g)$ も同様に

$$\mathrm{scl}_{G,N}(g) = \lim_{n\to\infty} \frac{\mathrm{cl}_{G,N}(g^n)}{n}$$

と定める. (G,N)-交換子長にも劣加法性があり, 極限が必ず存在する. この安定 (G,N)-交換子長にも Bavard の双対定理と同様の定理が成り立つ.

定理 3.3 ([KKMM21a])**.** (G,N)-交換子部分群の元 $g \in [G,N]$ に対し,

$$\mathrm{scl}_{G,N}(g) = \sup_{\mu \in Q(N)^G/H^1(N)^G} \frac{|\mu(g)|}{2D(\mu)}$$

が成り立つ.

定理 2.1 と定理 3.3 を見比べてみると, sup を取る範囲の差がちょうど $\mathcal{NE}(G,N)$ である. したがって, 空間 $\mathcal{NE}(G,N)$ は scl_G と $\mathrm{scl}_{G,N}$ の差を測っているとも思える. 例えば $\mathcal{NE}(G,N)$ が自明のとき, scl_G と $\mathrm{scl}_{G,N}$ との間に差がないことが期待されるが, 実際に次の定理が成り立つ.

定理 3.4 ([KKM$^+$21])**.** 空間 $\mathcal{NE}(G,N)$ が自明のとき, scl_G と $\mathrm{scl}_{G,N}$ とは双リプシッツ同値である.

簡単に分かるように $[G,N]$ 上で $\mathrm{scl}_G \le \mathrm{scl}_{G,N}$ が成り立つので, 双リプシッツ同値とはある定数 C が存在して $[G,N]$ 上

$$\mathrm{scl}_G \le \mathrm{scl}_{G,N} \le C \cdot \mathrm{scl}_G$$

が成り立つことを意味している.

4 相対コホモロジーの五項完全列

群 G とその正規部分群 N を与えると, 商群 $\Gamma = G/N$ と合わせて短完全列

$$1 \to N \xrightarrow{i} G \xrightarrow{p} \Gamma \to 1$$

が得られる．このとき, 擬準同型のなす空間について次が完全列が知られている．

命題 4.1 ([Cal09, Remark 2.90])**.** 次は完全列である:

$$0 \to Q(\Gamma) \xrightarrow{p^*} Q(G) \xrightarrow{i^*} Q(N)^G.$$

また, 準同型については次の完全列が知られている．

定理 4.2 ([HS53], 五項完全列)**.** 以下の完全列が存在する:

$$0 \to H^1(\Gamma) \to H^1(G) \to H^1(N)^G \to H^2(\Gamma) \to H^2(G).$$

ここで $H^*(-)$ は群の実数係数コホモロジー群である．

注意として, 群 G の実数係数 1 次コホモロジー群は, G 上の実数値準同型のなす空間と同型である．

一旦, 準同型の拡張問題を考える．「N 上の G 不変準同型 h が G に拡張できるか」は, 定理 4.2 の完全列から「h が $H^2(\Gamma)$ 上で自明となるか」と問うのと同値である．例えば $H^2(\Gamma) = 0$ となる場合, N 上の G 不変準同型は常に G 上に拡張可能である．

擬準同型の場合, 命題 4.1 の完全列が $Q(N)^G$ のところで途切れているのが問題である．そこで, $Q(N)^G$ の右側を埋める形で以下の完全列を構成した．

定理 4.3 ([KKM$^+$21], 相対コホモロジーの五項完全列)**.** 以下の完全列が存在する:

$$0 \to Q(\Gamma) \to Q(G) \to Q(N)^G \to H^2_{/b}(\Gamma) \to H^2_{/b}(G).$$

ここで $H^2_{/b}$ は群コホモロジーの有界コチェイン複体に関する相対コホモロジー群である．

また, この完全列は群コホモロジーの五項完全列と整合的である．とくに次の各行各列が完全列となる可換図式がある:

$$\begin{tikzcd}
 & & & H^2_b(\Gamma) \arrow[r] \arrow[d] & H^2_b(G) \arrow[d, "c_G"] \\
0 \arrow[r] & H^1(\Gamma) \arrow[r] \arrow[d] & H^1(G) \arrow[r] \arrow[d] & H^1(N)^G \arrow[r] \arrow[d] & H^2(\Gamma) \arrow[r, "p^*"] \arrow[d] & H^2(G) \arrow[d] \\
0 \arrow[r] & Q(\Gamma) \arrow[r] & Q(G) \arrow[r] & Q(N)^G \arrow[r] & H^2_{/b}(\Gamma) \arrow[r] \arrow[d] & H^2_{/b}(G) \arrow[d] \\
 & & & & H^3_b(\Gamma) \arrow[r] & H^3_b(G).
\end{tikzcd}$$

ここで H_b^* は実数係数の有界コホモロジー群である．

上の完全列は $\mathcal{NE}(G,N) = Q(N)^G \big/ \big(i^*Q(G) + H^1(N)^G\big)$ の各項 $Q(N)^G, i^*Q(G), H^1(N)^G$ を含んでいる．

補題 4.4. 各列各行が完全列であるような線形空間の可換図式

$$\begin{tikzcd}
 & & & A \arrow[d, "i"] \\
 & B \arrow[r] \arrow[d, "k"] & C \arrow[r, "j"] \arrow[d, "\cong"] & D \arrow[d] \\
E \arrow[r, "l"] & F \arrow[r] & G \arrow[r] & H
\end{tikzcd}$$

で $C \to G$ が同型だとする．このとき，自然な写像 $F \to D$ は同型

$$F \big/ \big(l(E) + k(B)\big) \cong \operatorname{Im} i \cap \operatorname{Im} j$$

を誘導する．

例えば Γ がアーベル群 (より広く amenable 群) のとき，自然な写像 $H^2(\Gamma) \to H^2_{/b}(\Gamma)$ は同型となる．このように $H^2(\Gamma) \to H^2_{/b}(\Gamma)$ が同型のとき，補題 4.4 を上の可換図式に適用すると，同型 $\mathcal{NE}(G,N) \cong \operatorname{Im} c_G \cap \operatorname{Im} p^*$ が得られる．この同型を用いると，拡張不能擬準同型のなす空間を群コホモロジーと有界コホモロジーを用いて調べることができるようになる．これが定理 1.1 の証明の鍵である．

5　定理 1.1 の証明の概略

定理 1.1 の (2)

定理 1.1 の中で (2) が原理的には最も単純である．自由群 F_n の自己同型群 $G = \operatorname{Aut}(F_n)$ を考える．F_n のアーベル化は $\mathbb{Z}^n$ であり，そこに自明に作用する部分群を $N = \mathrm{IA}_n$ とおく．このとき G と N は完全列

$$1 \to N \to G \to GL(n,\mathbb{Z}) \to 1$$

をなす．簡単のため $n \geq 3$ とする．このとき，[Mil71] より $H^2(GL(n,\mathbb{Z})) = 0$ であり，[Mon04] と [Mon10] を合わせると $H_b^3(GL(n,\mathbb{Z})) = 0$ が分かる ([KKM$^+$21, Lemma 7.5])．したがって $H^2_{/b}(GL(n,\mathbb{Z})) = 0$ である．よって定理 4.3 から $Q(N)^G/i^*Q(G) = 0$ である．とくに $\mathcal{NE}(G,N) = 0$ である．

定理 1.1 の (1)

(1) に限らず (3), (4), (5) においても，N が交換子部分群なので $\Gamma = G/N$ はアーベル群である．よって同型 $\mathcal{NE}(G,N) \cong \operatorname{Im} c_G \cap \operatorname{Im} p^*$ が使える．G が自由群 F_n のとき $H^2(G) = 0$ なので $\operatorname{Im} c_G \cap \operatorname{Im} p^* = 0$ である．よって $\mathcal{NE}(G,N) = 0$ である．

定理 1.1 の (3)

G を連結成分 2 つの双曲絡み目の基本群とし, N をその交換子部分群とする. [FS02] より $\operatorname{Im} c_G \neq H^2(G)$ であり, $H^2(G) \cong \mathbb{R}$ なことから $\operatorname{Im} c_G = 0$ を得る. よって $\mathcal{NE}(G,N) \cong \operatorname{Im} c_G \cap \operatorname{Im} p^* = 0$ である.

定理 1.1 の (4)

G を種数 $l \geq 2$ の閉曲面 Σ_l の基本群とし, N を交換子部分群とする. このとき $H^2(G) \cong H^2(\Sigma_l) \cong \mathbb{R}$ と $\operatorname{Im} c_G \cap \operatorname{Im} p^* \subset H^2(G)$ より $\operatorname{Im} c_G \cap \operatorname{Im} p^* = 0$ または $\mathbb{R}$ である. 閉曲面 Σ_l は双曲多様体なので, [Gro82] より $c_G \colon H_b^2(G) \to H^2(G)$ は全射である. また, 具体的な計算で $p^* \colon H^2(G/N) \to H^2(G)$ の全射性も分かる. 以上より

$$\mathcal{NE}(G,N) \cong \operatorname{Im} c_G \cap \operatorname{Im} p^* = H^2(G) = \mathbb{R}$$

である.

定理 1.1 の (5)

種数 $l \geq 2$ の閉曲面 Σ_l 上の向きを保つ擬アノソフ同相写像 f で, その写像類がトレリ群に入るとする. G を f の写像トーラス M_f の基本群とし, N をその交換子部分群とする.

[Thu86]([Ota96]) より, f が擬アノソフであることと写像トーラス M_f が双曲構造を持つことが同値である. したがって (4) のときと同様, [Gro82] より $c_G \colon H_b^2(G) \to H^2(G)$ は全射である.

写像類がトレリ群に入るので, f は閉曲面のホモロジーに自明に作用する. ここから写像トーラスのホモロジー, コホモロジーが計算でき, M_f が $K(\pi,1)$-多様体なことを合わせると $G/N \cong H_1(G;\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}^{2l+1}$ および $H^2(G) \cong \mathbb{R}^{2l+1}$ が分かる. また, トレリ性をうまく使って計算すると $p^* \colon H^2(G/N) \to H^2(G)$ が全射となることが分かる. 以上より

$$\mathcal{NE}(G,N) \cong \operatorname{Im} c_G \cap \operatorname{Im} p^* = H^2(G) = \mathbb{R}^{2l+1}$$

である.

注意 5.1. (1) トレリ群の中で擬アノソフ元は以下の意味で generic に存在する: 種数 3 以上のときトレリ群は有限生成であり, その Cayley グラフ上でランダムウォークをしたときに擬アノソフ元にいない確率が exponential order で 0 に収束する ([LM12], [MS13]).

(2) 定理 1.1 の (5) の例 (写像トーラス) は 3 次元双曲多様体の中で基本的な対象である. 実際, 任意の 3 次元閉双曲多様体は有限被覆を取ることで写像トーラスにできることが分かっている ([Thu82] の virtual fibering 予想, [Ago13] により肯定的に解決).

参考文献

[Ago13] Ian Agol, *The virtual Haken conjecture*, Doc. Math. **18** (2013), 1045–1087, With an appendix by Agol, Daniel Groves, and Jason Manning.

[Bav91] Christophe Bavard, *Longueur stable des commutateurs*, Enseign. Math. (2) **37** (1991), no. 1-2, 109–150.

[Cal09] Danny Calegari, *scl*, MSJ Memoirs, vol. 20, Mathematical Society of Japan, Tokyo, 2009.

[EF97] David B. A. Epstein and Koji Fujiwara, *The second bounded cohomology of word-hyperbolic groups*, Topology **36** (1997), no. 6, 1275–1289.

[FS02] Koji Fujiwara and Teruhiko Soma, *Bounded classes in the cohomology of manifolds*, vol. 92, 2002, Dedicated to John Stallings on the occasion of his 65th birthday, pp. 73–85.

[Gro82] Michael Gromov, *Volume and bounded cohomology*, Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. (1982), no. 56, 5–99 (1983).

[Heu20] Nicolaus Heuer, *Computing commutator length is hard*, arXiv:2001.10230 (2020).

[HS53] Gerhard Paul Hochschild and Jean-Pierre Serre, *Cohomology of group extensions*, Trans. Amer. Math. Soc. **74** (1953), 110–134.

[KK19] Morimichi Kawasaki and Mitsuaki Kimura, *$\hat{G}$-invariant quasimorphisms and symplectic geometry of surfaces*, to appear in *Israel J. Math*, arXiv:1911.10855v2 (2019).

[KKM$^+$21] Morimichi Kawasaki, Mitsuaki Kimura, Shuhei Maruyama, Takahiro Matsushita, and Masato Mimura, *The space of non-extendable quasimorphisms*, arXiv:2107.08571 (2021).

[KKMM21a] Morimichi Kawasaki, Mitsuaki Kimura, Takahiro Matsushita, and Masato Mimura, *Bavard's duality theorem for mixed commutator length*, preprint, arXiv:2007.02257v2 (2021).

[KKMM21b] Morimichi Kawasaki, Mitsuaki Kimura, Takahiro Matsushita, and Masato Mimura, *Commuting symplectomorphisms on a surface and the flux homomorphism*, preprint, arXiv:2102.12161v3 (2021).

[KM20] Morimichi Kawasaki and Shuhei Maruyama, *On boundedness of characteristic class via quasi-morphism*, preprint, arXiv:2012.10612 (2020).

[LM12] Alexander Lubotzky and Chen Meiri, *Sieve methods in group theory II: the mapping class group*, Geom. Dedicata **159** (2012), 327–336.

[Mil71] John Milnor, *Introduction to algebraic K-theory*, Princeton University Press, Princeton, N.J.; University of Tokyo Press, Tokyo, 1971, Annals of Mathematics Studies, No. 72.

[Mon04] Nicolas Monod, *Stabilization for* SL_n *in bounded cohomology*, Discrete geometric analysis, Contemp. Math., vol. 347, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2004, pp. 191–202.

[Mon10] ———, *On the bounded cohomology of semi-simple groups, S-arithmetic groups and products*, J. Reine Angew. Math. **640** (2010), 167–202.

[MS13] Justin Malestein and Juan Souto, *On genericity of pseudo-Anosovs in the Torelli group*, Int. Math. Res. Not. IMRN (2013), no. 6, 1434–1449.

[Ota96] Jean-Pierre Otal, *Le théorème d'hyperbolisation pour les variétés fibrées de dimension 3*, Astérisque (1996), no. 235, x+159.

[Poi81] Henri Poincaré, *Mémoire sur les courbes définies par une équation différentielle (i)*, Journal de Mathématiques Pures et Appliquées **7 et 8** (1881), 375–422 et 251–296 (fre).

[Sht16] Alexander I. Shtern, *Extension of pseudocharacters from normal subgroups, III*, Proc. Jangjeon Math. Soc. **19** (2016), no. 4, 609–614.

[Thu82] William P. Thurston, *Three-dimensional manifolds, Kleinian groups and hyperbolic geometry*, Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.) **6** (1982), no. 3, 357–381.

[Thu86] ———, *Hyperbolic structures on 3-manifolds, II: Surface groups and 3-manifolds which fiber over the circle*, 1986.