エネルギー固定条件下における Kepler 型ポテンシャル系の 2 点境界条件を満たす解の存在について

京都大学大学院 情報学研究科 数理工学専攻
黒川大雅 (Taiga KUROKAWA)

概要

宇宙探査機の軌道設計において目的のエネルギー値を実現する軌道を調べることはコストを削減する上で重要な問題である. この問題で用いられる Hill 問題というモデルはポテンシャル系ではないが, ポテンシャル系に対してはある種の minimizer としてこのような軌道が得られることが知られている. 本発表では, 上述の問題を目標とした適当なポテンシャル系に対し, 与えたエネルギー値を実現する軌道の存在証明を試みる.

1 考察するモデル

雛形として, 特異性を持たない次の常微分方程式系を考える.

$$\frac{d^2X_i}{dt^2} = -\frac{\partial U}{\partial X_i},\ i \in \{1, \cdots, d\}$$

$U : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ は上に有界な C^∞ 級関数として, この系を上に有界なポテンシャル系と呼ぶことにする.

空間 Hill 問題とは, 次の常微分方程式系のことであり,

$$\begin{aligned}
\frac{d^2X}{dt^2} &= 2\frac{dY}{dt} + 3X - \frac{X}{(X^2+Y^2+Z^2)^{\frac{3}{2}}}\\
\frac{d^2Y}{dt^2} &= -2\frac{dX}{dt} - \frac{Y}{(X^2+Y^2+Z^2)^{\frac{3}{2}}}\\
\frac{d^2Z}{dt^2} &= -Z - \frac{Z}{(X^2+Y^2+Z^2)^{\frac{3}{2}}}
\end{aligned}$$

空間円周制限 3 体問題の近似系として導出される系である. また, 平面 Hill 問題とは, 空間 Hill 問題を $Z = 0$ 平面に制限した次の常微分方程式系のことである.

$$\begin{aligned}
\frac{d^2X}{dt^2} &= 2\frac{dY}{dt} + 3X - \frac{X}{(X^2+Y^2)^{\frac{3}{2}}}\\
\frac{d^2Y}{dt^2} &= -2\frac{dX}{dt} - \frac{Y}{(X^2+Y^2)^{\frac{3}{2}}}
\end{aligned}$$

これらは, 人工衛星や宇宙探査機の従う運動方程式のモデルとして有効であると考えられており, 宇宙探査機の軌道設計への応用を目標とした本研究でもこれらの系を扱いたいところだが, ポテンシャル系ではないために目的のエネルギー値を実現する軌道を得るために用いたい変分構造を利用するこ

とができない. そのため, 本研究では差し当たり, 平面 Hill 問題についてコリオリ項を除いた, 次のようなポテンシャル系を扱っている.

$$\frac{d^2X}{dt^2} = 3X - \frac{X}{(X^2+Y^2)^{\frac{3}{2}}}$$
$$\frac{d^2Y}{dt^2} = -\frac{Y}{(X^2+Y^2)^{\frac{3}{2}}}$$

また, より一般に次のような系について言及することもある.(衝突解の除去の議論を除いて, この系について言及する.)

$$\frac{d^2X_i}{dt^2} = \frac{\partial f}{\partial X_i} - \frac{X_i}{(\sum_{j=1}^{d} X_j^2)^{\frac{3}{2}}},\ i \in \{1, \cdots, d\}$$

$f : \mathbb{R}^d \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ は下に有界な C^∞ 級関数として, この系を Kepler 型ポテンシャル系と呼ぶことにする.

2　2 点境界値問題

この節では, まず上に有界なポテンシャル系について, エネルギー値の条件を課さない 2 点境界値問題の解の存在についてよく知られている結果を紹介する. 証明についても, 詳細には立ち入らないが, 以降の議論のために概略のみ紹介する.([1] に詳しく書かれている.) その後,Kepler 型ポテンシャル系で同様の結果を得ようとするとき障害となる衝突解の除去に関する問題について紹介する. 最後に, コリオリ項を除いた平面 Hill 問題については衝突解が除去できることを紹介する.

2.1　上に有界なポテンシャル系

まず, 上に有界なポテンシャル系について知られている事実を証明の概略と共に紹介する.

定理 1. 上に有界な C^∞ 級関数 $U : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ について, 任意の異なる 2 点 $a, b \in \mathbb{R}^d$ と任意の実数 $T > 0$ に対し, 連続曲線 $c_T : [0, T] \to \mathbb{R}^d$ が存在して, 次の 2 つの条件を満たす.

1. $c_T(0) = a,\ c_T(T) = b,\ (0, T)$ 上で C^∞ 級曲線
2. $\forall t \in (0, T),\ \frac{d^2c_T}{dt^2}(t) = -\frac{\partial U}{\partial x}(c_T(t))$

証明. まず, 集合 $\mathcal{C}(a, b; T)$ を,Sobolev 空間 $W^{1,2}((0, T), \mathbb{R}^d)$ の部分集合として, この Sobolev 空間の連続曲線の空間 $C([0, T], \mathbb{R}^d)$ への埋め込み写像 i を使って, 次のように定義すると

$$\mathcal{C}(a, b; T) \equiv i^{-1}(\{q_T \in C([0, T], \mathbb{R}^d) | q_T(0) = a,\ q_T(T) = b\})$$

$\mathcal{C}(a, b; T)$ は凸集合で, 弱位相についても閉であることがわかる. 次に, この集合上の汎関数 $\mathcal{A}_T : \mathcal{C}(a, b; T) \to \mathbb{R}$ を次のように定義すると

$$\mathcal{A}_T(q_T) \equiv \int_0^T \ \frac{1}{2}||\frac{dq_T}{dt}(t)||^2 - U(q_T(t))\ dt$$

上に有界な C^∞ 級関数 U について,$\mathcal{A}_T$ は $W^{1,2}((0,T),\mathbb{R}^d)$ の弱位相について下半連続で, 強圧性条件も満たされることがわかる. 従って $\mathcal{A}_T$ の minimizer の存在が保証される.

$$\exists c_T \in \mathcal{C}(a,b;T) \text{ s.t. } \mathcal{A}_T(c_T) = \inf_{q_T \in \mathcal{C}(a,b;T)} \mathcal{A}_T(q_T)$$

さらに, この c_T は C^∞ 級曲線であることが示され,1 を満たすことがわかる. また, 変分学の基本補題から 2 を満たすことも示される.□

以上が証明の概略であり,Hilbert 空間の閉凸部分集合上で minimizer を捉えることによって示されていることに注意したい. 各 $T>0$ に対し minimizer の集合 $\mathcal{M}_T$ を

$$\mathcal{M}_T \equiv \{c_T \in \mathcal{C}(a,b;T) | \mathcal{A}_T(c_T) = \inf_{q_T \in \mathcal{C}(a,b;T)} \mathcal{A}_T(q_T)\}$$

定めておく. もちろん, 定理 1 より任意の $T>0$ に対し $\mathcal{M}_T \neq \varnothing$ である.

2.2 Kepler 型ポテンシャル系

Kepler 型ポテンシャル系も上に有界なポテンシャルであるが, 原点で定義されない点で状況が異なっており, 定理 1 の証明と同様の議論を行うことを考えるとき,$\bar{\mathcal{A}}_T : \mathrm{cl}(\tilde{\mathcal{C}}(a,b;T)) \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, $\bar{\mathcal{A}}_T(q_T) \equiv \int_0^T \frac{1}{2}||\frac{dq_T}{dt}(t)||^2 + f(q_T(t)) + \frac{1}{||q_T(t)||}\ dt$($\tilde{\mathcal{C}}(a,b;T)$ の定義はすぐ後で行う.) の minimizer の存在が保証される集合が

$$\tilde{\mathcal{C}}(a,b;T) \equiv i^{-1}(\{\tilde{q}_T \in C([0,T],\mathbb{R}^d \setminus \{0\}) | \tilde{q}_T(0) = a,\ \tilde{q}_T(T) = b\})$$

ではなく, この集合の $W^{1,2}((0,T),\mathbb{R}^d)$ のノルム位相についての閉包

$$\mathrm{cl}(\tilde{\mathcal{C}}(a,b;T)) = i^{-1}(\{q_T \in C([0,T],\mathbb{R}^d) | q_T(0) = a,\ q_T(T) = b\})$$

であることに注意が必要である. 仮に $\tilde{\mathcal{C}}(a,b;T)$ で minimizer の存在が保証されれば, 同様の議論により 1,2 に対応する性質を満たす連続曲線 $\tilde{c}_T : [0,T] \to \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ の存在が保証される. 従って, 考えたい f について,$\tilde{\mathcal{C}}(a,b;T)$ での minimizer の存在が保証できることを確認する必要がある. 各 $T>0$ に対し minimizer の集合 $\bar{\mathcal{M}}_T$ を

$$\bar{\mathcal{M}}_T \equiv \{c_T \in \mathrm{cl}(\tilde{\mathcal{C}}(a,b;T)) | \bar{\mathcal{A}}_T(c_T) = \inf_{q_T \in \mathrm{cl}(\tilde{\mathcal{C}}(a,b;T))} \bar{\mathcal{A}}_T(q_T)\}$$

定めておく. もちろん, 以上の議論より任意の $T>0$ に対し $\bar{\mathcal{M}}_T \neq \varnothing$ である.

2.3 コリオリ項を除いた平面 Hill 問題

この節では, まず, コリオリ項を除いた平面 Hill 問題が, 点変換によっては変数分離系に移せないことを Bertrand-Darboux の定理を適用することによって示す.

命題 1. 次の Hamiltonian についての

$$H(x,y,p_x,p_y) = \frac{1}{2}(p_x^2 + p_y^2) - \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} - (\alpha x^2 + \beta y^2)$$

2 自由度 Hamilton 系が点変換によって変数分離系に移されるための必要十分条件は

$$\alpha = \beta \text{ or } 4\alpha = \beta \text{ or } \alpha = 4\beta$$

である.

証明. Bertrand-Darboux の定理は,2 自由度 Hamilton 系 $\tilde{H}(x, y, p_x, p_y) = \frac{1}{2}(p_x^2 + p_y^2) + V(x, y)$ が点変換によって変数分離系に移されるための必要十分条件が,

$$(2axy+bx+dy+e)(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial y^2})-2(a(x^2-y^2)+dx-by+c)\frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y}+3(2ay+b)\frac{\partial V}{\partial x}-3(2ax+d)\frac{\partial V}{\partial y}$$

が x, y について恒等的に 0 になるような,$(a, b, c, d, e) \in \mathbb{R}^5 \setminus \{0\}$ が存在することであると主張する. 今の系については,

$$\begin{aligned}
&(2axy + bx + dy + e)(-3\frac{x^2}{r^5} + \frac{1}{r^3} - 2\alpha + 3\frac{y^2}{r^5} - \frac{1}{r^3} + 2\beta) \\
&- 2(a(x^2 - y^2) + dx - by + c)(-3\frac{xy}{r^5}) \\
&+ 3(2ay + b)(\frac{x}{r^3} - 2\alpha x) - 3(2ax + d)(\frac{y}{r^3} - 2\beta y) \\
=&16(-\alpha + \beta)axy + 2(-4\alpha + \beta)bx + 2(-\alpha + 4\beta)dy + e(-2\alpha + 2\beta - 3\frac{x^2 - y^2}{r^5}) + 6c\frac{xy}{r^5}
\end{aligned}$$

が x, y について恒等的に 0 になるような,$(a, b, c, d, e) \in \mathbb{R}^5 \setminus \{0\}$ の存在を考えればよいが,c, e は 0 にせざるを得ない.$\alpha = \beta$ のとき,$a \neq 0,\ b, d = 0$ が,$4\alpha = \beta$ のとき,$b \neq 0,\ a, d = 0$ が,$\alpha = 4\beta$ のとき,$d \neq 0,\ a, b = 0$ が取れ,$(a, b, c, d, e) \in \mathbb{R}^5 \setminus \{0\}$ が存在するのは, この場合に限ることがわかる.□

従って, 特にコリオリ項を除いた平面 Hill 問題 ($\alpha = \frac{3}{2}, \beta = 0$ のとき) は, 点変換によっては変数分離系に移せないことがわかった.

次に, コリオリ項を除いた平面 Hill 問題については衝突解が除去できることを示す. 以下の証明は,[2],[3] とほとんど同様であるが,Sundman の評価の証明については計算が異なるため詳細に述べることにする.

まず,Levi-Civita 変換による正則化を行う. すなわち $(X, Y) \to (\frac{1}{2}(\xi_1^2 - \xi_2^2), \xi_1\xi_2)$ なる点変換を行うと,

$$H(\xi_1, \xi_2, \eta_1, \eta_2) = \frac{||\eta||^2}{2||\xi||^2} - \frac{2}{||\xi||^2} - \frac{3}{8}(\xi_1^2 - \xi_2^2)^2$$

と変換される.Hamiltonian は軌道に沿って保存されるから,$H = h$ と固定し,$s \equiv \frac{t}{||\xi||^2}$ とパラメータを取り替えると, このエネルギーレベル集合上で軌道の従う微分方程式は,ξ についての原点近傍で次のように書かれる.

$$\begin{aligned}
\frac{d\xi_i}{ds} &= \eta_i \\
\frac{d\eta_i}{ds} &= 2h\xi_i + o(||\xi||^4)
\end{aligned}$$

ここで,$i \in \{1, 2\}$ である. 解析的な微分方程式の解は解析的であるから ([4] 等を参照されたい.),$s = 0$ で $\xi = 0$ となる衝突解は,

$$\xi_1 = \sum_{i=1}^{\infty} a_i s^i, \xi_2 = \sum_{i=1}^{\infty} b_i s^i, \eta_1 = \sum_{i=0}^{\infty} c_i s^i, \eta_2 = \sum_{i=0}^{\infty} d_i s^i$$

の形で書ける. 従って,

$$t = \int (a_1^2 + b_1^2)s^2 + O(s^3)ds = \frac{a_1^2 + b_1^2}{3}s^3 + O(s^4)$$

であり,

$$X = \sum_{i=2}^{\infty} \tilde{a}_i t^{i/3}, Y = \sum_{i=2}^{\infty} \tilde{b}_i t^{i/3}$$

衝突解が ξ についての原点近傍で評価できた.(この評価を,Sundman の評価と呼ぶ.) この評価を用いて,[3] とほとんど同様に次の命題が示される.

命題 2. コリオリ項を除いた平面 Hill 問題については, 任意の異なる 2 点 $a, b \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ と任意の実数 $T > 0$ で,

$$\bar{\mathcal{M}}_T \subset \tilde{\mathcal{C}}(a, b; T)$$

が成り立つ.

3 エネルギー固定条件下における 2 点境界値問題

この節では, いよいよ与えられたエネルギー値を実現する解の存在について議論する. まず, 与えられたエネルギー値を実現する解を得る変分構造について紹介する. その後, 上に有界なポテンシャル系とコリオリ項を除いた平面 Hill 問題, それぞれについて,$\mathbb{R}^d$ または $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ から勝手に 2 点取って, その 2 点境界条件を満たし, なおかつエネルギー値の条件を満足するような解が存在するためのエネルギー値の範囲についての十分条件を与える. 最後に, 先行研究との比較を行う.

3.1 与えられたエネルギー値を実現する解を得る変分構造

まず, 上に有界なポテンシャル系について考える. 実数 $E \in \mathbb{R}$ に対し, 関数 $A_E : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ を $c_T \in \mathcal{M}_T$ を用いて $A_E(T) \equiv \mathcal{A}_T(c_T) + ET$ と定義する. 次の命題が成り立つ.

命題 3.

$$\exists \delta > 0 \text{ s.t. } A_E(T_0) = \inf_{T \in (T_0 - \delta, T_0 + \delta)} A_E(T)$$
$$\Rightarrow \forall c_{T_0} \in \mathcal{M}_{T_0},\ \forall t \in (0, T_0),\ \frac{1}{2}||\frac{dc_{T_0}}{dt}(t)||^2 + U(c_{T_0}(t)) = E$$

証明.

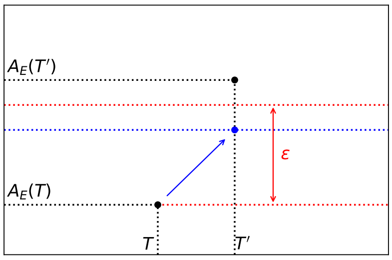
$$\exists \delta > 0 \text{ s.t. } A_E(T_0) = \inf_{T \in (T_0 - \delta, T_0 + \delta)} A_E(T)$$
$$\Rightarrow \exists \delta > 0 \text{ s.t. } \forall c_{T_0} \in \mathcal{M}_{T_0}, \forall T \in (T_0 - \delta, T_0 + \delta), \mathcal{A}_{T_0}(c_{T_0}) + ET_0 \le \mathcal{A}_T(c_{T_0} \circ \mathrm{trans}_{T_0,T}) + ET$$
$$\Leftrightarrow \exists \delta > 0 \text{ s.t. } \forall c_{T_0} \in \mathcal{M}_{T_0}, \forall T \in (T_0 - \delta, T_0 + \delta), \mathcal{K}_{T_0}(c_{T_0}) - \mathcal{P}_{T_0}(c_{T_0}) \le \frac{T_0}{T}\mathcal{K}_{T_0}(c_{T_0}) - \frac{T}{T_0}\mathcal{P}_{T_0}(c_{T_0})$$
$$\Rightarrow \forall c_{T_0} \in \mathcal{M}_{T_0},\ \mathcal{K}_{T_0}(c_{T_0}) + \mathcal{P}_{T_0}(c_{T_0}) = 0$$
$$\Leftrightarrow \forall c_{T_0} \in \mathcal{M}_{T_0},\ \forall t \in (0, T_0),\ \frac{1}{2}||\frac{dc_{T_0}}{dt}(t)||^2 + U(c_{T_0}(t)) = E$$

ここで $\mathrm{trans}_{T_2,T_1}:[0,T_1]\to[0,T_2]$, $\mathcal{K}_T,\mathcal{P}_T:\mathcal{C}(a,b;T)\to\mathbb{R}$ は, それぞれ次のように定義した.

$$\mathrm{trans}_{T_2,T_1}=\frac{T_2}{T_1}t,\ \mathcal{K}_T(q_T)\equiv\int_0^T\ \frac{1}{2}||\frac{dq_T}{dt}(t)||^2\ dt,\ \mathcal{P}_T(q_T)\equiv\int_0^T\ U(q_T(t))-E\ dt\ \square$$

また, 次の命題も成り立つ.

命題 4. 任意の実数 $E\in\mathbb{R}$ について A_E は上半連続関数である.



証明. 背理法を用いて示す. すなわち $\exists\epsilon>0$ s.t. $\forall\delta>0,\ \exists T'\in(T-\delta,T+\delta)$ s.t. $A_E(T')-A_E(T)>\epsilon$ と仮定する. また $\mathcal{K}_T(c_T),\mathcal{P}_T(c_T)$ が実数値であることに注意する.

$$\mathcal{A}_{T'}(c_T\circ\mathrm{trans}_{T,T'})+ET'-A_E(T)=(\frac{T}{T'}-1)\mathcal{K}_T(c_T)-(\frac{T'}{T}-1)\mathcal{P}_T(c_T)<\epsilon$$

を導いて矛盾を示したい. これは次と同値であり

$$-\mathcal{P}_T(c_T)(T'-T)^2-T(\mathcal{K}_T(c_T)+\mathcal{P}_T(c_T)+\epsilon)(T'-T)-T^2\epsilon<0$$

δ を十分小さくとれば成り立つことがわかる.$\square$

さらに, 次の命題も成り立つことがわかった.

命題 5. ポテンシャル U がある実数 $M\in\mathbb{R}$ について $U\leq M$ を満たすとき, 任意の実数 $E\geq M$ について A_E は下半連続関数である.

最後に, 次の命題も成り立つ.

命題 6. 任意の実数 $E\in\mathbb{R}$ について A_E は $T\to 0$ で正に発散する.

証明. $\exists M\in\mathbb{R}$ s.t. $U\leq M$ であるから

$$\begin{aligned}A_E(T)&=\inf_{q_T}\int_0^T\ \frac{1}{2}||\frac{dq_T}{dt}||^2-U(q_T)+E\ dt\\&\geq\inf_{q_T}\int_0^T\ \frac{1}{2}||\frac{dq_T}{dt}||^2\ dt+(E-M)T\\&\geq\frac{1}{2T}||b-a||^2+(E-M)T\end{aligned}$$

最後の不等式は Hölder の不等式を用いた.$\square$

次に,Kepler 型ポテンシャル系について考える. 実数 $E \in \mathbb{R}$ に対し, 関数 $\bar{A}_E : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ を $c_T \in \bar{\mathcal{M}}_T$ を用いて $\bar{A}_E(T) \equiv \bar{\mathcal{A}}_T(c_T) + ET$ と定義する. 命題 3, 命題 4, 命題 5, 命題 6 それぞれの系として以下が成り立つ.

系 1.

$$\exists \delta > 0 \text{ s.t. } \bar{A}_E(T_0) = \inf_{T \in (T_0-\delta, T_0+\delta)} \bar{A}_E(T) \text{ かつ } \bar{\mathcal{M}}_{T_0} \cap \tilde{\mathcal{C}}(a,b;T_0) \neq \varnothing$$
$$\Rightarrow \forall c_{T_0} \in \bar{\mathcal{M}}_{T_0} \cap \tilde{\mathcal{C}}(a,b;T_0),\ \forall t \in (0,T_0),\ \frac{1}{2}||\frac{dc_{T_0}}{dt}(t)||^2 - f(c_{T_0}(t)) - \frac{1}{||c_{T_0}(t)||} = E$$

系 2. 任意の実数 $E \in \mathbb{R}$ について $\bar{A}_E$ は上半連続関数である.

系 3. 関数 f がある実数 $M \in \mathbb{R}$ について $f \geq -M$ を満たすとき, 任意の実数 $E \geq M$ について A_E は下半連続関数である.

系 4. 任意の実数 $E \in \mathbb{R}$ について $\bar{A}_E$ は $T \to 0$ で正に発散する.

3.2 上に有界なポテンシャル系

まず, 上に有界なポテンシャル系について, 命題 6 の証明から直ちに次の命題が従う.

命題 7. ポテンシャル U がある実数 $M \in \mathbb{R}$ について $U \leq M$ を満たすとき, 任意の実数 $E > M$ について A_E は $T \to +\infty$ で正に発散する.

従って, 以上の議論 (命題 3,5,6,7) から次の定理が示される.

定理 2. 上に有界な C^∞ 級関数 $U : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}, U \leq M$ について, 任意の異なる 2 点 $a, b \in \mathbb{R}^d$ と任意の実数 $E > M$ に対し, 実数 $T > 0$ と連続曲線 $c_T : [0,T] \to \mathbb{R}^d$ が存在して, 次の 3 つの条件を満たす.

1. $c_T(0) = a,\ c_T(T) = b,\ (0,T)$ 上で C^∞ 級曲線
2. $\forall t \in (0,T),\ \frac{d^2 c_T}{dt^2}(t) = -\frac{\partial U}{\partial x}(c_T(t))$
3. $\forall t \in (0,T),\ \frac{1}{2}||\frac{dc_T}{dt}(t)||^2 + U(c_T(t)) = E$

3.3 Kepler 型ポテンシャル系 $(d=2)$

次に,Kepler 型ポテンシャル系 $(d=2)$ については, 次の命題が成り立つことがわかった.Kepler 問題の解の特性を用いることで証明できる.

命題 8. 関数 f がある実数 $M \in \mathbb{R}$ について $f \geq -M$ を満たすとき, 任意の実数 $E \geq M$ について $\bar{A}_E$ は $T \to +\infty$ で正に発散する.

3.4 コリオリ項を除いた平面 Hill 問題

従って, 以上の議論 (命題 2, 系 1,3,4, 命題 8) から次の定理が示される.

定理 3. 任意の異なる 2 点 $a, b \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ と任意の実数 $E \geq 0$ に対し, 実数 $T > 0$ と連続曲線 $c_T : [0, T] \to \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ が存在して, 次の 3 つの条件を満たす.

1. $c_T(0) = a,\ c_T(T) = b,\ (0, T)$ 上で C^∞ 級曲線
2. $\forall t \in (0, T),\ \frac{d^2 X \circ c_T}{dt^2}(t) = 3X(c_T(t)) - \frac{X(c_T(t))}{||c_T(t)||^3},\ \frac{d^2 Y \circ c_T}{dt^2}(t) = -\frac{Y(c_T(t))}{||c_T(t)||^3}$
3. $\forall t \in (0, T),\ \frac{1}{2}||\frac{dc_T}{dt}(t)||^2 - \frac{3}{2}X^2(c_T(t)) - \frac{1}{||c_T(t)||} = E$

3.5 先行研究との比較

現時点で把握している先行研究としては,Mañé set に関連して,Tonelli Lagrange System について知られている, 次の結果がある.([5])

定理 4. M を境界を持たない d 次元完備 Riemann 多様体,$L : TM \to \mathbb{R}$ を C^∞ 級関数で次の 3 つの条件を満たすものとする.

1. $\exists A > 0$ s.t. $\forall (x, v) \in TM,\ \forall w \in T_x M,\ w \cdot L_{vv}(x, v) \cdot w \geq A||w||_x^2$
2. $\forall A \in \mathbb{R},\ \exists B \in \mathbb{R}$ s.t. $\forall (x, v) \in TM,\ L(x, v) \geq A||v||_x - B$
3. $\forall r \geq 0,\ \sup_{(x,v) \in TM, ||v||_x \leq r} L(x, v) < +\infty,$
   $\sup_{(x,v) \in TM, ||v||_x \leq r, ||w||_x = 1} w \cdot L_{vv}(x, v) \cdot w < +\infty$

このとき, 任意の異なる 2 点 $a, b \in \mathbb{R}^d$ と任意の実数 $E > c(L)$($c(L)$ は Mañé's critical value を表す. 定義については後で述べる.) に対し, 実数 $T > 0$ と連続曲線 $c_T : [0, T] \to M$ が存在して, 次の 3 つの条件を満たす.

1. $c_T(0) = a,\ c_T(T) = b,\ (0, T)$ 上で C^∞ 級曲線
2. $\forall t \in (0, T),\ \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial v}(c_T(t), \frac{dc_T}{dt}(t)) = \frac{\partial L}{\partial x}(c_T(t), \frac{dc_T}{dt}(t))$
3. $\forall t \in (0, T),\ \frac{\partial L}{\partial v}(c_T(t), \frac{dc_T}{dt}(t)) \cdot \frac{dc_T}{dt}(t) - L(c_T(t), \frac{dc_T}{dt}(t)) = E$ □

ここで,Mañé's critical value の定義は,

$$c(L) \equiv \sup\{k \in \mathbb{R} : \exists T > 0,\ \exists \textit{ a closed curve } \gamma_T \text{ s.t. } \mathcal{A}_T(\gamma_T) + kT < 0\}$$

である. また,$c(L) = \inf\{k \in \mathbb{R} : \forall T > 0,\ \forall \textit{ closed curves } \gamma_T \text{ s.t. } \mathcal{A}_T(\gamma_T) + kT \geq 0\}$ が直ちに従う.

さて, 定理 2 との比較を考える.$c(L) \leq M$ であることに注意すれば, 定理 4 の L の条件 3 を満たさないことが相違点である.[5] では,A_E の連続性の証明で, この条件を本質的に使っているため, 定理 2 は少なくとも定理 4 とは異なる結果である. また, 定理 3 については $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ が境界を持つことや, エネルギーの範囲の十分条件が 0 も含むことも, 条件 3 と合わせて定理 4 とは異なっている.

4　今後の研究の方針

本筋からは逸れるが, コリオリ項を除いた平面 Hill 問題が点変換では変数分離系に移せないことはわかったので, 非可積分であるかどうかに興味がある.

本筋に沿った今後の方針としては, 平面 Kepler 問題, コリオリ項を除いた平面 Hill 問題に対し,$E \geq 0$ のエネルギーについては, 配位空間から勝手に異なる 2 点を選んで, そのエネルギーで 2 点間を結ぶ軌道の存在が保証されることがわかったので, 差し当たり, 平面 Kepler 問題に対し,$E < 0$ のエネルギーについて, 勝手に異なる 2 点を選んで, そのエネルギーで 2 点間を結ぶ軌道の存在が保証されるような配位空間の領域の十分条件を得たい.

参考文献

[1] 柴山允瑠, 特別講義 解析学 A「n 体問題の周期解の変分解析」, 神戸大学集中講義, https://sites.google.com/view/mitsurushibayama/.

[2] Y. Kajihara & M. Shibayama, Variational existence proof for multiple periodic orbits in the planar circular restricted three-body problem, Preprint.

[3] A. Chenciner, Action Minimizing Solutions of the Newtonian n-body Problem: From Homology to Symmetry, *Proceedings of the International Congress of Mathematicians*, Vol. 3 (Beijing, 2002), 279-294, Higher Ed. Press, Beijing, 2002.

[4] E. Hille, Ordinary differential equations in the complex domain, Dover Publications, 1997.

[5] G. Contreras & R. Iturriaga, Global minimizers of autonomous Lagrangians, 22o Colóquio Brasileiro de Matemática, [22nd Brazilian Mathematics Colloquium], Instituto de Matemática Pura e Aplicada (IMPA), Rio de Janeiro, 1999.