A CORRESPONDENCE BETWEEN INVERSE SUBSEMIGROUPS, OPEN WIDE SUBGROUPOIDS AND CARTAN INTERMEDIATE C*-SUBALGEBRAS

慶應義塾大学理工学部 紅村 冬大 (FUYUTA KOMURA)

Abstract. 与えられた作用素環に対し，その部分環を計算することは伝統的な研究である．例えば，群作用から得られる作用素環の部分環は，適当な条件下では作用している群の部分群で計算できる．本稿では逆半群と呼ばれる代数系を導入し，逆半群と C*環のガロア対応とも言うべき結果を紹介する．さらに，応用例として Cuntz 環やグラフ環の部分環の計算について紹介する．本講演は講演者のプレプリント (arXiv:2007.11456) に基づく．

1. Introduction

本稿では筆者の論文 [8] を概説することを目標に，関連する数学的対象の概説を行う．この論文で扱う主な対象は逆半群 (inverse semigroup)，エタール亜群 (étale groupoid) と C*環 (C*-algebra) である．逆半群は完全に代数的な対象であり，エタール亜群は位相と代数の構造を兼ね備えた対象である．C*環論は関数解析の一分野として扱われている．ここで，これらの対象の関係を簡単に説明する．

作用素環論は Hilbert 空間上の作用素がなす代数を扱う分野であり，関数解析の一分野として扱われる．作用素環は一般に無限次元であり位相を考えることが重要となるが，扱う位相の違いによって作用素環は C*環と von Neumann 環に分かれる．本稿で扱う C*環論では，主にノルムから定まる位相を用いる．C*環を定義すること自体は難しくはないが，様々な具体例を構成することは困難であった．今では様々な C*環の構成法が考えられており，その中の一つにエタール亜群を用いるものがある (Renault[14] による)．亜群とは全ての射が可逆となるような小圏である．圏の構造と両立する位相を備えた亜群は位相亜群と呼ばれるが，その中でも特にある離散性を持つ位相亜群をエタール亜群と呼ぶ．エタール亜群が与えられると，その上の convolution algebra を完備化することによって亜群 C*環と呼ばれる C*環が得られる．亜群 C*環の性質をエタール亜群の言語で特徴付ける研究は数多くの研究者によってなされている．亜群 C*環のイデアル構造については [2]，nuclearity などの解析的な性質については [1] が詳しい．[10] では，亜群 C*環のアーベル化をエタール亜群の言語で記述した．

エタール亜群は様々な数学対象から得られる．例えば，離散力学系や多様体上の葉層構造からエタール亜群が得られる．本稿では逆半群から得られるエタール亜群に着目する．逆半群とは一般化逆元を備えた半群であり，群を特殊な場合として含んでいる．群は空間等の大域的な対称性を記述するが，逆半群はフラクタル図形等に見られる “局所的な対称性” (local symmetry) を記述する．逆半群は位相空間に作用していると，その作用からエタール亜群を構成することができる．逆半群は純代数的な対象であるので，逆半群を用いることで C*環やエタール亜群の理論に純代数的なアプローチが得られると期待される．実際に，[6] や [7] ではエタール亜群や亜群 C*環と逆半群の関係について研究が行われている．[9] では，逆半群の商と，universal groupoid と呼ばれるエタール亜群の商，不変集合の関係について述べら

れている．[10] と [9] から，逆半群，エタール亜群，亜群 C*環のそれぞれの商に対応があることが分かる．

本稿のテーマである C*環の部分環について，関係する研究を述べる．群が C*環に作用している時，接合積という C*環を構成することができる．[5] では，接合積の部分環と群の部分群の対応について結果が得られている．また，[3] では，亜群 C*環とエタール亜群の Galois 対応とも言うべき結果が得られている．すなわち，[3] では亜群 C*環の部分環とエタール亜群の部分亜群との間の 1 対 1 対応が示された．一方，エタール亜群は位相を備えた対象であり，そのままでは部分亜群の計算が困難である．そこで，[8] ではエタール亜群の部分亜群と逆半群の部分半群との対応が示された．逆半群は純代数的な対象なので，部分半群の計算が比較的簡単である．[3] の結果と [8] の結果を組み合わせることで，C*環の部分環と逆半群の部分半群との対応が得られる．群よりも逆半群の方が構造が豊かであり，この対応によって多くの部分環を捉えることができると期待される．本稿ではこの結果の紹介を目標に，基本的な定義から説明する．

2. 逆半群とエタール亜群

2.1. 逆半群． 本節では逆半群に関する基本的な概念を解説する．省略した証明に関しては [11] などの教科書を参照せよ．

S を半群とする．任意の $s \in S$ に対し

$$s^*ss^* = s^*, ss^*s = s$$

となるような $s^* \in S$ が一意に存在する時，S を逆半群と呼ぶ．s^* は s の一般化逆元 (generalized inverse) と呼ばれる．

S の冪等元全体からなる集合を $E(S)$ と書く．つまり

$$E(S) := \{e \in S \mid e^2 = e\}$$

とする．$E(S)$ の元は互いに可換であり，かつ $E(S)$ は S の部分逆半群になることが知られている．

Example 2.1. X を集合とする．$I(X)$ を，X 上の partial bijection 全体からなる集合とする：

$$I(X) := \{f\colon U \to V \mid U, V \subset X,\ f \text{ は全単射 }\}.$$

写像の合成によって $I(X)$ の積が定まる．また，$f \in I(X)$ に対し $f^* := f^{-1}$ とすれば，$I(X)$ は逆半群となる．partial bijection$f\colon U \to V$ に対し，その定義域，値域をそれぞれ $\operatorname{dom} f := U, \operatorname{ran} f := V$ と書く．

$E(I(X))$ は X の部分集合上の恒等写像全体からなる集合と一致する．また，X の構造によって $I(X)$ の元に適切な条件を課す．例えば，X が位相空間であるときは，$I(X)$ は X の開集合から開集合への同相写像全体からなる集合と定める．

Wagner-Preston の定理は，任意の逆半群がある $I(X)$ の部分半群として実現されることを主張する．これは群論の Cayley の定理の類似物である．

Example 2.2. $n \in \mathbb{N}$ を 2 以上の自然数とする．Polycyclic monoid P_n を以下の式で定める：

$$P_n := \langle S_1, S_2, \ldots, S_n, 0, 1 \mid S_i^* S_j = \delta_{i,j} 1 \rangle.$$

つまり，P_n は $S_i^* S_j = \delta_{i,j} 1$ を満たす $\{S_i\}_{i=1}^n, 0, 1$ で生成されており，そのような逆半群の中で universal なものの事である．

P_n の元の表し方について説明する．$\Sigma := \{1, 2, \ldots, n\}$ とし，$\Sigma^* := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \Sigma^n$ を Σ 上の有限語全体からなる集合とする．ここで，Σ^0 は空語からなる 1 元集合である．Σ^* の元 μ は $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_l \in \Sigma$ を用いて $\mu = (\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_l)$ と表される．この $l \in \mathbb{N}$

を μ の長さと呼び，$|\mu| := l$ と表す．また，$\mu \in \Sigma^*$ に対し $S_\mu := S_{\mu_1} S_{\mu_2} \cdots S_{\mu_l} \in P_n$ と定める．$S_i^* S_j = \delta_{i,j} 1$ という関係式を繰り返し用いることで，

$$P_n = \{S_\mu S_\nu^* \mid \mu, \nu \in \Sigma^*\} \cup \{0\}$$

となることが分かる．

2.2. **エタール亜群.** 本節ではエタール亜群に関する基本的な事項を解説する．端的に言えば，亜群とは全ての射が可逆な小圏である．本稿では以下のような記号を用いる．

Definition 2.3. 亜群 G とは

(1) unit space $G^{(0)} \subset G$,
(2) domain map と range map $d, r \colon G \to G^{(0)}$,
(3) $G^{(2)} := \{(\alpha, \beta) \in G \times G \mid d(\alpha) = r(\alpha)\}$ 上で定義される積

$$G^{(2)} \ni (\alpha, \beta) \mapsto \in \alpha\beta \in G$$

から構成され，これらは以下の条件を満たす：

- 任意の $x \in G^{(0)}$ に対し $d(x) = r(x) = x$ が成り立つ，
- 任意の $(\alpha, \beta) \in G^{(2)}$ に対し $d(\alpha)\beta = \beta$, $\alpha r(\beta) = \alpha$ が成り立つ，
- 任意の $(\alpha, \beta) \in G^{(2)}$ に対し，$d(\alpha\beta) = d(\beta)$, $r(\alpha\beta) = r(\alpha)$ が成り立つ，
- 任意の $(\alpha, \beta), (\beta, \gamma) \in G^{(2)}$ に対し，$(\alpha\beta)\gamma = \alpha(\beta\gamma)$ が成り立つ，
- 任意の $\gamma \in G$ に対し，ある $\gamma' \in G$ が存在して $(\gamma', \gamma), (\gamma, \gamma') \in G^{(2)}$，$d(\gamma) = \gamma'\gamma$ と $r(\gamma) = \gamma\gamma'$ が成り立つ．

上のような γ' は γ から一意に定まるので γ^{-1} と表す．

Example 2.4. 群は unit space が 1 点集合となる亜群と同一視することができる．集合は unit space が全体と一致するような亜群と同一視することができる．

上記の例は亜群の極端な例である．一般には群が集合や空間に作用している時に，変換亜群という亜群を構成することができる．本稿ではさらに一般化して，逆半群の作用から得られる亜群を扱う．

群に対して位相群という概念があるように，亜群に対しても位相亜群を考える．位相亜群 G とは，積と inverse $G \ni \gamma \mapsto \gamma^{-1} \in G$ が連続となる位相を備えた亜群 G のことである．$d(\gamma) = \gamma^{-1}\gamma, r(\gamma) = \gamma\gamma^{-1}$ が任意の $\gamma \in G$ に対し成り立つことから，位相亜群の domain map と range map は連続である．

Definition 2.5. G を位相亜群とする．G がエタールであるとは，domain map $d \colon G \to G^{(0)}$ が局所同相写像になることである．[1)]エタール位相亜群を単にエタール亜群と呼ぶ．

位相亜群において inverse をとる写像は同相写像なので，エタール亜群の range map も局所同相写像になる．

本稿ではエタール亜群 G の unit space $G^{(0)}$ が局所コンパクトハウスドルフ空間であることを仮定する．この仮定は G 上の連続関数が豊富に存在することを保証し，C*環を構成する際に重要となる．また，G 全体がハウスドルフであるとは限らず，実際にハウスドルフでない例は自然に現れる．ハウスドルフでないエタール亜群の扱い方については [12] が詳しい．

次に，逆半群の空間への作用から得られるエタール亜群について解説する．逆半群の作用から得られるエタール亜群が本稿の考察の対象となる．

[1)] $d \colon G \to G^{(0)}$ が局所同相写像であるとは，任意の $\gamma \in G$ に対し $\gamma \in U$ となる開集合 $U \subset G$ が存在し $d(U) \subset G^{(0)}$ が開集合かつ $d|_U$ が像への同相写像となることである．

Definition 2.6. S を逆半群，X を位相空間とする．S の X への作用とは，逆半群の準同型 $\alpha\colon S \to I(X)$ のことである．この時，$\alpha\colon S \curvearrowright X$ と書く．また，$s \in S$ の α による像を $\alpha_s \in I(X)$ と書く．

Definition 2.7. S を逆半群，X を局所コンパクトハウスドルフ空間，$\alpha\colon S \curvearrowright X$ を作用とする．集合

$$S * X := \{(s,x) \in S \times X \mid x \in \mathrm{dom}(\alpha_s)\}$$

上の同値関係 $\sim$ を以下のように定める：

$$(s,x) \sim (t,y) \iff x = y \text{ かつ } se = te \text{ なる } e \in E(S) \text{ が存在する．}$$

$S \ltimes_\alpha X := S * X/{\sim}$ と定め，$(s,x) \in S * X$ の同値類を $[s,x] \in S \ltimes_\alpha X$ と書く．

$S \ltimes_\alpha X$ の亜群としての構造は以下のように定まる．まず，unit space を

$$(S \ltimes_\alpha X)^{(0)} := \{[e,x] \in S \ltimes_\alpha X \mid x \in \mathrm{dom}(\alpha_e)\}$$

と定める．写像

$$(S \ltimes_\alpha X)^{(0)} \ni [e,x] \mapsto x \in X$$

は全単射になることが分かるので，この全単射によって $(S \ltimes_\alpha X)^{(0)}$ と X を同一視する．$S \ltimes_\alpha X$ の domain map, range map をそれぞれ

$$d([s,x]) = x, r([s,x]) = \alpha_s(x)$$

と定める．$[s,x],[t,y] \in S \ltimes_\alpha X$ の積は $x = \alpha_t(y)$ の時に定義し

$$[s,x][t,y] := [st,y]$$

と定める．[2] $[s,x]$ の逆元は $[s^*, \alpha_s(x)]$ と定まる．以上の構造によって $S \ltimes_\alpha X$ は亜群となる．また，$s \in S$ と開集合 $U \subset \mathrm{dom}(\alpha_s)$ に対し

$$Z(s,U) := \{[s,x] \in S \ltimes_\alpha X \mid x \in U\}$$

と定める．$S \ltimes_\alpha X$ の位相として $Z(s,U)$ 全体が生成する位相を考える．この位相によって $S \ltimes_\alpha X$ はエタール亜群になる．

最後に，本稿の考察の対象である strongly tight な作用を定義する．

Definition 2.8. S を逆半群，X を全不連結局所コンパクトハウスドルフ空間，$\alpha\colon S \curvearrowright X$ を作用とする．作用 α が ample であるとは，任意の $e \in E(S)$ に対し $\mathrm{dom}\,\alpha_e \subset X$ がコンパクト開集合になることとする．Ample な作用 α が strongly tight であるとは，$\{\mathrm{dom}\,\alpha_e\}_{e \in E(S)}$ が X の開基になっていることとする．

Strongly tight という条件は，大雑把に言えば空間 X の情報が $E(S)$ に反映されているという条件である．従って，strongly tight な作用に対しては，作用の性質が逆半群そのものの代数的な性質に反映されることが期待される．

Example 2.9. P_n を polycyclic monoid，$\Sigma := \{1,2,\ldots,n\}$ とする (Example 2.2 参照)．P_n の $\Sigma^{\mathbb{N}}$ への strongly tight な作用を定義する．まず，直積位相を考えることで $\Sigma^{\mathbb{N}}$ をコンパクトハウスドルフ空間とみなす．$\mu \in \Sigma^*$ に対し，$C(\mu) \subset \Sigma^{\mathbb{N}}$ を μ から始まる無限文字列全体からなる集合とする．$C(\mu)$ は $\Sigma^{\mathbb{N}}$ のコンパクト開集合となることに注意せよ．$S_\mu S_\nu^* \in P_n$ に対し，同相写像 $\beta_{S_\mu S_\nu^*}\colon C(\nu) \to C(\mu)$ が $\beta_{S_\mu S_\nu^*}(\nu x) = \mu x$ によって定まる (ただし，$x \in \Sigma^{\mathbb{N}}$ である)．$0 \in P_n$ には空写像を対応させることで，作用 $\beta\colon P_n \curvearrowright \Sigma^{\mathbb{N}}$ が定まる．$C(\mu)$ が $\Sigma^{\mathbb{N}}$ の開基であることから，β は strongly tight となることが分かる．

---

[2] domain map や range map, 積が実際に well-defined であることは容易に確かめられる．

上記の例は Cuntz 環という C*環と深い関係を持つ重要な例である．

3. 部分半群と部分亜群の対応

S を逆半群，X を全不連結局所コンパクトハウスドルフ空間とし，$\alpha\colon S \curvearrowright X$ を strongly tight な作用とする．この時エタール亜群 $S \ltimes_\alpha X$ が定まるのであった (Definition 2.7)．まず，$S \ltimes_\alpha X$ の開部分亜群と S の部分半群の対応について述べる．その後，C*環論への応用を述べる．

Definition 3.1. S を逆半群, X を局所コンパクトハウスドルフ空間とし, $\alpha\colon S \curvearrowright X$ を作用とする．また，$G := S \ltimes_\alpha X$ とおく．部分亜群 $G^{(0)} \subset H \subset G$ と部分半群 $E(S) \subset T \subset S$ に対し，T_H と H_T をそれぞれ

$$T_H := \{s \in S \mid Z(s, \operatorname{dom}\alpha_s) \subset H\},$$
$$H_T := \{[t, x] \in G \mid t \in T, x \in \operatorname{dom}\alpha_t\}$$

と定める．T_H は $E(S)$ を含む S の部分半群となり，H_T は $G^{(0)}$ を含む G の開部分亜群となる．

写像 $H \mapsto T_H$ と $T \mapsto H_T$ は互いの逆写像になりそうであるが，一般にはそうではない．$T \mapsto T_H$ の定義域を特別な部分半群のクラスに制限することで，これらの写像は互いの逆写像となる．

Definition 3.2. S を逆半群, X を局所コンパクトハウスドルフ空間とし, $\alpha\colon S \curvearrowright X$ を作用とする．部分半群 $T \subset S$ が α-join closed であるとは，以下の条件が成り立つことである：

‘任意の $s \in S$ に対し，「$s \in T$ であること」と「ある有限集合 $F \subset E(S))$ が存在し，$sF \subset T$ かつ $\operatorname{dom}\alpha_s \subset \bigcup_{f\in F}\operatorname{dom}\alpha_f$ が成り立つこと」が同値である．’

Remark 3.3. $s \in T$ ならば，$F = \{s^*s\}$ とすれば上記の後半の条件が成り立つ．従って，上記の “only if part” は自動的に成り立つ．部分半群が α-join closed であることを示す際は，上記の “if part” を確かめれば良い．

本稿の主定理は以下である．

Theorem 3.4 ([8, Theorem 2.1.10])**.** S を逆半群，X を局所コンパクトハウスドルフ空間とし，$\alpha\colon S \curvearrowright X$ を strongly tight な作用とする．また，$\mathcal{T}$ を α-join closed で $E(S)$ を含む S の部分半群全体からなる集合とし，$\mathcal{H}$ を $G^{(0)}$ を含む G の開部分亜群全体からなる集合とする．この時，以下の写像

$$\mathcal{T} \ni T \mapsto H_T \in \mathcal{H},$$
$$\mathcal{H} \ni H \mapsto T_H \in \mathcal{T}$$

は互いに逆写像である．

上の定理は開部分亜群は部分半群で捉えられることを主張する．C*環論に応用する上では開かつ閉の部分亜群も重要となるが，H_T が閉になるための T の必要十分条件も得られている [8, Theorem 2.2.6].

4. C*環の Cartan 中間環

前節では部分亜群と部分半群の対応を見た．この節では．前節の内容がどのように C*環論に応用されるか説明する．

4.1. **C*環.** まず，C*環について簡単に説明する．詳細は作用素環の教科書を参照せよ ([17] など)．

大雑把に言えば，C*環 A とは複素数体 $\mathbb{C}$ 上の Banach 空間であり，積と対合 (involution) $A \ni a \mapsto a^* \in A$ を備えたもののことである．ここでは正確な定義をする代わりに，具体例をいくつか挙げる．

Example 4.1. X をコンパクトハウスドルフ空間とし，$C(X)$ を X 上の複素数値連続関数全体からなる集合とする (X が局所コンパクトの場合は，無限遠で消える連続関数からなる C*環 $C_0(X)$ を考える)．$C(X)$ は以下の構造について C*環となる．関数の各点での和，スカラー倍，積を考えることで，$C(X)$ は積を備えた $\mathbb{C}$ ベクトル空間 ($\mathbb{C}$ 代数) となる．$f \in C(X)$ に対し $f^* \in C(X)$ を $f^*(x) := \overline{f(x)}$ と定めることで，$C(X)$ の対合 $f \mapsto f^*$ が定まる．また，$C(X)$ のノルムは sup ノルム $\|f\| := \sup_{x \in X}|f(x)|$ である．以上の構造によって，$C(X)$ は C*環となる．特に，$C(X)$ の積は可換であり，$C(X)$ は積の単位元を持つ．逆に，積の単位元を持つ可換 C*環はある $C(X)$ と同型になることも知られている (Gelfand-Naimark の定理)．

Example 4.2. H を $\mathbb{C}$ 上の Hilbert 空間とする．$B(H)$ を H から H への有界線形作用素全体からなる集合とする．この時，$B(H)$ は以下の構造について C*環となる．$B(H)$ は各点での演算を考えることで $\mathbb{C}$ ベクトル空間となる．また，写像の合成によって $B(H)$ の積が定まる．$A \in B(H)$ のノルムは $\|A\| := \sup_{\|\xi\|=1}\|A\xi\|$ によって定まる (右辺に現れるノルムが H のノルムであることに注意せよ)．また，対合 $A^* \in B(H)$ は A の随伴 (adjoint) 作用素として定まる ([13] など，関数解析の教科書を参照せよ)．これらの構造によって $B(H)$ は C*環となる．H が有限次元の時は，$B(H)$ は行列環 $M_{\dim H}(\mathbb{C})$ と同型になる．この時，$B(H)$ の対合と $M_{\dim H}(\mathbb{C})$ の共役転置が対応する．また，任意の C*環が $B(H)$ の部分環として実現できることも Gelfand-Naimark の定理として知られている．

Example 4.3. 非自明な C*環の例として，Cuntz 環を紹介する．2 以上の自然数 n に対し，Cuntz 環 $\mathcal{O}_n$ は

$$t_i^* t_j = \delta_{i,j}1, \quad \sum_{i=1}^{n} t_i t_i^* = 1$$

を満たす $t_1, t_2, \ldots, t_n$ で生成される univesal な C*環として定義される．ここで，universal とは上記の関係式を満たす元で生成される他の C*環に対し $\mathcal{O}_n$ から全射が誘導される，という意味である．上記の関係式を用いることで，$\{t_\mu t_\nu^*\}_{\mu,\nu \in \Sigma^*}$ の線型結合が $\mathcal{O}_n$ で稠密になっていることが分かる (ここで，Example 2.2 の記法を用いた)．

4.2. **亜群 C*環と Cartan 中間環.** 上述のように C*環は $B(H)$ の部分環として実現されるものの，特定の性質を持つように具体例を構成することは困難である．そこで，群作用や有向グラフなどさまざまな数学的対象から C*環を構成する方法が考えられ，材料となった対象と構成された C*環の関係が調べられた．このように C*環を構成する方法はさまざまなものが考えられていたが，多くの構成法を包括する形でエタール亜群による C*環の構成法が Renault によって提案された [14]．

エタール亜群から C*環を構成する方法について簡単に説明する．詳しくは [14] や [16] を参照せよ．G をハウスドルフなエタール亜群とする (ハウスドルフでない場合は工夫が必要となる．[12] を参照せよ)．$C_c(G)$ を G 上のコンパクトサポートを持つ連続関数からなる $\mathbb{C}$ ベクトル空間とする．$f, g \in C_c(G)$ に対し

$$f * g(\gamma) := \sum_{\alpha\beta=\gamma} f(\alpha)g(\beta), \quad f^*(\gamma) := \overline{f(\gamma^{-1})}$$

と定めることで $C_c(G)$ の積と対合が定まる．$C_c(G)$ を適切なノルムで完備化すれば C*環が得られるが，ノルムの選び方は一通りではない．よく研究されているノルムは最大のノルムである universal norm と，左正則表現から定まる reduced norm である．universal norm と reduced norm による $C_c(G)$ の完備化をそれぞれ $C^*(G), C^*_\lambda(G)$ と書き，それぞれ普遍亜群 C*環 (universal groupoid C*-algebra)，被約亜群 C*環 (reduced groupoid C*-algebra) と呼ぶ．また，これらをまとめて亜群 C*環と呼ぶ．

亜群 C*環の性質と材料となったエタール亜群の性質はよく調べられている．亜群 C*環のイデアルは [2] などで調べられており，従順性などの解析的な性質は [1] や [4] にまとめられている．

様々な C*環が亜群 C*環として実現されることが知られている．与えられた C*環を亜群 C*環として実現するには，Cartan 部分環の理論が有用である [15]．亜群 C*環は可換 C*環 $C_0(G^{(0)})$ を部分環として持つが，逆に Cartan 部分環と呼ばれる "良い" 可換部分環を持つ C*環が (twisted) 亜群 C*環と同型になることが [15] で示された．

A を C*環，$D \subset A$ を Cartan 部分環とする．この時，$A \simeq C^*_\lambda(G), D \simeq C_0(G^{(0)})$ となるエタール亜群 G が存在する (簡単のため，twist は自明であるとする)．この時，Cartan 中間環 $D \subset B \subset A$ と開部分亜群 $G^{(0)} \subset H \subset G$ が 1:1 対応することが [3] で示された．G が strongly tight action を用いて $G = S \ltimes X$ と表される場合は，Theorem 3.4 によって開部分亜群の計算は部分半群の計算に帰着される．このことを用いると，例えば Cuntz 環 (Example 4.3) の部分環は，Example 2.2 の polycyclic monoid によって計算できることが分かる．

Example 4.4. $\beta\colon P_n \curvearrowright \Sigma^{\mathbb{N}}$ を Example 2.9 の strongly tight な作用とする．$G := P_n \curvearrowright \Sigma^{\mathbb{N}}$ と置き，$C^*_\lambda(G)$ の構造について説明する．$i \in \Sigma$ に対し $Z(S_i, C(i)) \subset G$ はコンパクト開集合なので，その上の特性関数 $s_i := \chi_{Z(S_i, C(i))}$ は $C_c(G)$ の元である．従って $s_1, s_2, \ldots, s_n$ は $C^*_\lambda(G)$ の元であるが，これらは以下の関係式を満たす：

$$s_i^* s_j = \delta_{i,j} 1, \quad \sum_{i=1}^{n} s_i s_i^* = 1.$$

また，少々非自明であるが $C^*_\lambda(G)$ は $\{s_i\}_{i=1}^n$ で生成されている．従って Cuntz 環 $\mathcal{O}_n$ から $C^*_\lambda(G)$ に t_i を s_i に移すような準同型が誘導されるが，実はこれが同型写像となる．

以上の事実を用いて，$\mathcal{O}_n$ の部分環を求める．$\mathcal{O}_n^{\mathbb{T}}$ を $\mathrm{span}\{t_\mu t_\nu^*\}_{|\mu|=|\nu|}$ の閉包とする．$\mathcal{O}_n^{\mathbb{T}}$ は $\mathcal{O}_n$ の部分 C*環となることが分かる ($\mathcal{O}_n$ はゲージ作用と呼ばれる円周群 $\mathbb{T}$ の作用を持つが，その不動点環が $\mathcal{O}_n^{\mathbb{T}}$ である)．また，2 以上の自然数 $m \in \mathbb{N}$ に対し，$\mathcal{O}_n^m$ を $\mathrm{span}\{t_\mu t_\nu^*\}_{|\mu|=|\nu| \mod m}$ の閉包とすると $\mathcal{O}_n^m$ も $\mathcal{O}_n^{\mathbb{T}}$ を含む $\mathcal{O}_n$ の部分 C*環となる．実は，$\mathcal{O}_n^{\mathbb{T}}$ を含む $\mathcal{O}_n$ の Cartan 中間環は，$\mathcal{O}_n^m$ しかないことが分かる．これは，$\{S_\mu S_\nu^*\}_{|\mu|=|\nu|}$ を含む P_n の β-join closed な部分半群を計算することで分かる．

他にも，有向グラフから得られる C*環 (グラフ環) や自己相似作用から得られる C*環 (Nekrashevych 環) も逆半群から構成することができるため，これらの部分 C*環も計算できることが期待される．

Acknowledgement. 本研究は JSPS 科研費 20J10088 の助成を受けたものです．

References

[1] C. Anantharaman-Delaroche and J. Renault. *Amenable Groupoids*. Monographie de l'Enseignement mathématique. L'Enseignement Mathématique, 2000.

[2] J. Brown, L. O. Clark, C. Farthing, and A. Sims. Simplicity of algebras associated to étale groupoids. *Semigroup Forum*, **88**(2):433–452, 2014.
[3] J. H. Brown, R. Exel, A. H. Fuller, D. R. Pitts, and S. A. Reznikoff. Intermediate C*-algebras of Cartan embeddings. *Proc. Amer. Math. Soc. Ser.*, B **8**:27–41, 2021.
[4] N. P. Brown and N. Ozawa. *C*-algebras and Finite-dimensional Approximations*. Graduate studies in mathematics. American Mathematical Soc., 2008.
[5] J. Cameron and Roger R. Smith. A Galois correspondence for reduced crossed products of simple C^*-algebras by discrete groups. *Canadian Journal of Mathematics*, 71(5):1103–1125, 2019.
[6] R. Exel. Inverse semigroups and combinatorial C*-algebras. *Bulletin of the Brazilian Mathematical Society, New Series*, 39, 04 2007.
[7] R. Exel and E. Pardo. The tight groupoid of an inverse semigroup. *Semigroup Forum*, 92(1):274–303, 2016.
[8] F. Komura. A correspondence between inverse subsemigroups, open wide subgroupoids and cartan intermediate C*-subalgebras. arXiv:2007.11456, 2020.
[9] F. Komura. Invariant sets and normal subgroupoids of universal étale groupoids induced by congruences of inverse semigroups. *Journal of the Australian Mathematical Society*, published online:1–20, 2021.
[10] F. Komura. Quotients of étale groupoids and the abelianizations of groupoid C*-algebras. *Journal of the Australian Mathematical Society*, 111(1):56–75, 2021.
[11] M. V. Lawson. *Inverse Semigroups: The Theory of Partial Symmetries*. World Scientific, 1998.
[12] A. Paterson. *Groupoids, Inverse Semigroups, and their Operator Algebras*. Progress in Mathematics. Birkhäuser Boston, 2012.
[13] G. K. Pedersen. *Analysis Now*. Graduate Texts in Mathematics. Springer-Verlag, 1989.
[14] J. Renault. *A Groupoid Approach to C*-Algebras*. Lecture Notes in Mathematics. Springer-Verlag, 1980.
[15] J. Renault. Cartan subalgebras in C*-algebras. *Irish Math. Soc. Bull.*, **61**:29–63, 2008.
[16] A. Sims. Hausdorff étale groupoids and their C*-algebras. *Operator Algebras and Dynamics: Groupoids, Crossed Products, and Rokhlin Dimension*, 2020.
[17] M. Takesaki. *Theory of Operator Algebras I*. Encyclopaedia of Mathematical Sciences. Springer Berlin Heidelberg, 2001.

Department of Mathematics, Faculty of Science and Technology, Keio University, 3-14-1 Hiyoshi, Kohoku-ku, Yokohama, 223-8522, Japan
Email address: fuyuta.k@keio.jp