Thompson 群や関連する群の divergence function について

東京都立大学大学院 理学研究科 数理科学専攻
児玉悠弥 (Yuya KODAMA)

概要

幾何学的群論における主要な研究対象に, Thompson 群 F, T, V と呼ばれる無限群がある．これらの群は珍しい性質をもつので, 様々な "亜種" も研究されている．近年 Thompson 群に対して, "無限遠での連結性" を表す量が計算された．この結果が他の亜種にも成り立つのかが急速に調べられており, 講演者のものも含めた結果を紹介したい.

1 導入

1965 年に, Richard Thompson によって F, T, V という 3 つの群が定義された．これらの群は, ある種の有限性を持ちながらも多くの不思議な性質を持つ群で, 現在でも様々な手法を用いて研究されている.

その手法の一つに, Thompson 群と似た群を新たに構成し, 元の群との関係性や, その群自身の性質を調べるというものがある．3 つの群はそれぞれ様々な定義の仕方があり, それらの定義から様々な亜種が構成されている．例えば, Higman-Thompson 群 [6], Brown-Thompson 群 [3], braided Thompson 群 [2,4], 高次元の Thompson 群 [1], Lodha-Moore 群 [8] 等が挙げられる．それぞれが興味深い性質をもつ群だが, 今講演においては主に braided Thompson 群 BV に着目する．この群は, Thompson 群 V と Braid 群を組み合わせて構成されるような群である.

幾何学的群論における群の研究の主要な方法の一つに, 有限生成群にグラフの構造を定め, そのグラフの幾何的性質を調べるというものがある．このグラフは一般には生成集合の取り方に依存するため, その幾何的性質は "群とその生成系に関する性質" ということになる．我々が主に興味を持っているのは "群の性質" であるので, 生成系の取り方の違いを同一視する必要があり, それが擬等長同型と呼ばれるものである．群に対して擬等長不変な量を計算するという研究は, 現在でもよく行われている.

有限生成群に対して定まる擬等長不変量のひとつに, divergence function と呼ばれるものがある. divergence function とは概ね "無限遠における空間のつながりの強さ" を表す量であり, 十分につながりが強いことを「linear divergence をもつ」という．Thompson 群が linear divergence をもつことは [5] において既に証明されている．また, ブレイド群 B_n についても, $n \geq 3$ であるならば linear divergence をもつことがわかる[*1]．これらのことから, その 2 つの群を組み合わせた BV も同様の性質を持つことが期待される．実際次が成り立つ.

[*1] 例えば, v2 の [7, Proposition 3.3] に記載予定.

Theorem 1.1 ([7]) *BV は, linear divergence をもつ.*

証明は, 細かい場合分けを含む組み合わせ群論的な議論を用いて行う.

2 Cayley graph と擬等長同型

有限生成群と生成集合に対して, 次のようにグラフを定義する.

Definition 2.1 (Cayley graph) G を有限生成群, S をその有限な生成集合で単位元を含んでいないものとし[*2], G の部分集合 S^{-1} を $\{s^{-1} \mid s \in S\}$ で定める. 無向グラフ $\mathrm{Cay}(G,S)$ を次で定める:

- 頂点集合は G.
- 辺集合は $\{\{g, gs\} \mid g \in G, s \in S \cup S^{-1}\}$.

このとき, $\mathrm{Cay}(G,S)$ を G の S に関する Cayley graph と呼ぶ. 簡単のため, $\{g, gs\}$ という辺と $\{gs, gss^{-1}\} = \{gs, g\}$ という辺は同一視しておく.

Cayley graph には, 常にその生成集合によって定まる語距離 d_S をいれておく. これはつまり, 各辺の長さを 1 として, 2 点を結ぶ辺の列で最小のものの辺の数である. 以下では, この距離を頂点集合に制限したものを考える.

Cayley graph は群を幾何学化したものに見えるが, 実際にはその生成集合に依存して定まるものである. 生成集合のとり方に依らないものでなければ, 群そのものを幾何学化したとは言えない. そこで, 次のように "ゆるい同型" を定める.

Definition 2.2 (擬等長同型) 距離空間 X, Y の間の写像 $f : X \to Y$ が次を満たすとする:

1. ある数 $\lambda \geq 1, k \geq 0$ が存在して, 任意の $x_1, x_2 \in X$ に対して
$$\frac{1}{\lambda} d_X(x_1, x_2) - k \leq d_Y(f(x_1), f(x_2)) \leq \lambda d_X(x_1, x_2) + k$$
が成り立つ.
2. ある $C > 0$ が存在して, $f(X)$ の $C-$ 閉近傍が Y と一致する.

このとき X と Y は擬等長同型であるといい, f を擬等長同型写像という[*3].

有限生成群とその Cayley graph に対して, 次が成り立つ.

Proposition 2.3 *有限生成群 G に対して S, T を 2 つの有限生成集合とする. このとき, $\mathrm{Cay}(G,S)$ と $\mathrm{Cay}(G,T)$ は擬等長同型である.*

[*2] 特に断らない限り, 有限生成集合は常にこの性質を満たすとする.

[*3] X から Y への擬等長同型写像が存在すれば, Y から X への擬等長同型写像も (一意とは限らないが) 存在する. 条件 2 を使って適当に対応を決めればよい.

Proof. (G, d_S) から (G, d_T) への恒等写像が擬等長同型写像となることを示す．ある $L > 0$ が存在して，任意の $g, h \in G$ に対して

$$\frac{d_S(g,h)}{L} \leq d_T(g,h) \leq L d_S(g,h).$$

が成り立つことを示せば良い．

$L_1 := \max_{t \in T \cup T^{-1}} d_S(e,t)$ とする[*4]．$d_T(g,h) = n$, すなわち n 個の $T \cup T^{-1}$ の元 $t_1, \ldots, t_n$ を用いて $gt_1t_2 \cdots t_n = h$ と書けるとする．言い換えると，(G, d_T) における g から h への最短の道は，$g, gt_1, gt_1t_2, \ldots, gt_1t_2 \cdots t_n = h$ という順番に頂点を通っていく道ということである．(G, d_S) 内で，同じ頂点を通って g と h を結ぶことを考える．$d_S(g, gt_1)$ とは，t_1 を $S \cup S^{-1}$ の元の (最小の個数での) 積で表した時の元の個数であるので，これは結局 $d_S(e, t_1)$ と等しく，L_1 で上から評価される．同様に，$d_S(gt_1, gt_1t_2) = d(e, t_2)$ であるのでこれも L_1 で上から評価され，以降も同じように計算できる．三角不等式から，

$$\begin{aligned} d_S(g,h) &\leq d_S(g, gt_1) + d_S(gt_1, gt_1t_2) + \cdots + d_S(gt_1 \cdots t_{n-1}, h) \\ &\leq L_1 n \\ &= L_1 d_T(g,h) \end{aligned}$$

が成り立つ．

$L_2 := \max_{s \in S \cup S^{-1}} d_T(e,s)$ に対して，S, T の役割を入れ替えた上の議論を適用すれば，$d_T(g,h) \leq L_2 d_S(g,h)$ が得られる．

最後に $\max\{L_1, L_2\}$ を L とおけば，証明が完了する． □

この命題によって，有限生成群の Cayley graph は擬等長同型の違いを除いて一意に定まることがわかる．

Remark 2.4 自明な群の Cayley graph(すなわち 1 点からなる graph) と，有限群 (と適当な生成集合) の Cayley graph は擬等長同型である．実際，自明群の 1 点を有限群の単位元に送る写像が擬等長同型写像の定義を満たす．このことから，通常我々は有限生成である無限群を研究対象とすることが多い．

また，一つの生成集合上での Cayley graph に対して “幾何的な性質” を定めたあとに，それが擬等長同型のもので不変であることが示せれば，その性質を群の幾何的な性質と思うことができる．Section 4 では，その一つの例である divergence function というものについて述べる．

3 Thompson 群と braided Thompson 群

3.1 Thompson 群 F, T, V

まず V を定義して，その部分群として残りの 2 つを定義する．

[*4] $d_S(e,t) = d_S(e, t^{-1})$ であるので，T^{-1} はなくてもよい．

V の元 g は, leaf の数が同じである有限の根付き 2 分木 T_+, T_- と leaf の集合の置換 σ からなる 3 つ組 (T_+, σ, T_-) で表される．このような 3 つ組のことを, **tree diagram** と呼ぶ.

2 分木 T の各 leaf o に対して, root から o への一意な path が対応する．各 caret(ˆのこと) の左側を 0, 右側を 1 とラベル付けすれば, path に対応する binary word $w(o)$ が得られる．以降, 各 path とそれに対応する binary word は同一視する.

Cantor 集合 C と無限 2 進列からなる空間を同一視することにより, V の元 (T_+, σ, T_-) に対応した C から C への同相写像が得られる．実際, T_+ の各 leaf o と任意の無限語 a に対して, $w(o)a$ を $w(\sigma(o))a$ に対応させれば良い.

群の合成を定義するための準備をする．T_+ の leaves x, y が dipole を形成するとは, x, y が T_+ 内で同じ親を持ち, さらに $\sigma(x), \sigma(y)$ が (この順番で)T_- 内で同じ親をもつ状態のことをいう．dipole は自然に取り除くことができる．また, 取り除く前後の tree diagram から得られる Cantor 集合 C の間の同相写像は同じであり, このときこれらの tree diagram は V の同じ元を表しているとみなす．dipole を差し込むことも, 上の内容を逆にたどればできる．dipole がない tree diagram のことを **reduced tree diagram** という．V の任意の元は reduced tree diagram を用いて unique に表される.

群の演算を定義する．任意の 2 元 $g_1, g_2 \in V$ に対して, それに対応する tree diagram を 2 つ任意にとり, (A_+, α, A_-) と (B_+, β, B_-) とする．このとき, いくつかの dipole を差し込むことにより, g_1, g_2 を表し更に $B'_+ = A'_-$ を満たすような tree diagrams(A'_+, α', A'_-), (B'_+, β', B'_-) が得られる．このとき,

$$g_1 g_2 := (A'_+, \alpha'\beta', B'_-)$$

と定義する．なお, ここでの $\alpha'\beta'$ とは通常の写像の合成とは逆の順番での合成, すなわち右作用である．$B'_+ = A'_-$ より leaf の数が等しいので, 写像の合成が計算できる.

最後に F, T を定義する．T は σ を巡回置換のみに制限したものとし, F は σ を恒等写像のみに制限したものと定める．明らかに, それぞれ V の部分群となる.

3.2 braided Thompson 群 BV

Thompson 群 V は, 葉の数が等しい 2 つの有限根付き 2 分木と, その葉の数に対応する対称群の元を用いて表されていた．BV は, この対称群の部分をブレイド群に置き換えることで定義される．V における tree diagram に対応して, BV における 3 つ組を **tree-braid-tree diagram** と呼ぶ.

V と異なるのは, 同じ元を表す別の tree-braid-tree diagram の同一視の仕方と, 合成の定義である.

V においては, 対応する 2 つの leaf が dipole を形成するときに, 取り除く操作を与えた．BV においては, 次の 2 つの条件を満たすとき, caret と対応する 2 本の紐を取り除く操作を定め, 同一視を行う.

1. ブレイド群から自然に定まる対称群への全射準同型を用いて tree-braid-tree diagram を tree diagram とみなしたとき, V の元の意味で dipole を形成していること.
2. その対応する 2 本の紐が平行であること.

逆の操作も同様に定義することができるので, それを用いて tree-braid-tree diagram の間の同一視を定める.

合成の定義については, 写像の合成の部分をブレイド群の積で置き換えればよい.

4 divergence function

f, g を $\mathbb{R}_+$ から $\mathbb{R}_+$ への写像とする. ある $A, B, C, D, E \geq 0$ が存在して, 全ての $x \in \mathbb{R}_+$ に対して

$$f(x) \leq Ag(Bx + C) + Dx + E$$

が成り立つとき, $f \preceq g$ と定める. $f \equiv g$ を $f \preceq g$ かつ $g \preceq f$ で定めると, これは同値関係になる. 定義から, 全ての線形写像は同値である.

$\delta \in (0, 1)$ とする. 有限生成群 G の **δ-divergence function** $f_\delta(x)$ とは, ある有限生成系 S に関する Cayley graph の単位元に対応する点 e から距離が x 離れた任意の 2 点を, e を中心とした半径 δx の ball の中を通らずに結べる道の長さを, 上からおさえられる値の最小値のことである. そのような道が存在しないときには, 道の長さを ∞ と定める.

ある δ が存在して, G とある生成集合 S に対して定まる divergence function が線形写像と同値であるとすると, 別の生成集合 S' に対して定まる divergence function もその性質を持つ[*5]. 従ってこれは, 群そのものの性質とみなすことができる. ある δ が存在して, G のあるケイリーグラフに対する δ-divergence function が線形写像と同値であるとき, G は **linear divergence** をもつという.

Thompson 群 F, T, V や BV は, 全て linear divergence をもつ. これは実際に道を構成して, 具体的な δ を与えることで証明される.

参考文献

[1] M. G Brin, *Higher dimensional thompson groups*, Geometriae Dedicata **108** (2004), no. 1, 163–192.

[2] ———, *The algebra of strand splitting. I. A braided version of Thompson's group V*, Journal of Group Theory **10** (2007), no. 6, 757–788.

[3] K. S Brown, *Finiteness properties of groups*, Journal of Pure and Applied Algebra **44** (1987), no. 1-3, 45–75.

[4] P. Dehornoy, *The group of parenthesized braids*, Advances in Mathematics **205** (2006), no. 2, 354–409.

[5] G. Golan and M. Sapir, *Divergence functions of Thompson groups*, Geometriae Dedicata **201** (2019), no. 1, 227–242.

[6] G. Higman, *Finitely Presented Infinite Simple Groups*, Notes in pure math, Australian National University, 1974.

[7] Y. Kodama, *Divergence function of the braided Thompson group*, to appear in Kyoto Journal of Mathematics, arXiv:2012.03785 (2020).

[8] Y. Lodha and J. T. Moore, *A nonamenable finitely presented group of piecewise projective homeomorphisms*, Groups, Geometry, and Dynamics **10** (2016), no. 1, 177–200.

[*5] この性質は擬等長同型の元でも不変である.