グラフラプラシアンの固有値に対する普遍不等式

東北大学大学院 理学研究科 数学専攻
小林　慎一郎 (Shinichiro KOBAYASHI)

概要

ラプラシアンのスペクトラムは空間の幾何学的性質を反映する重要な不変量である．どのような数列がスペクトラムとして現れ得るか, という問題は興味深い問いである．Payne–Pólya–Weinberger (1956) は, Euclid 空間内の有界領域における Dirichlet ラプラシアンのスペクトラムに対する普遍不等式を見出した．その後, 様々な方向性で一般化・精密化されている．本講演では, 考察の対象を離散的な空間, すなわちグラフに置き換えた場合のラプラシアンのスペクトラムに対する普遍不等式とその周辺を紹介したい．

1　導入

1.1　Euclid 空間内の有界領域に対する Dirichlet 固有値問題

ラプラシアンの固有値は空間の情報を多く反映する重要な不変量であり, 多くの数学者を魅了してきた．Euclid 空間内の有界領域 Ω に対して定数 λ が **Dirichlet 固有値**であるとは, ある非自明な関数 u が存在して

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda u & \text{in } \Omega, \\ u = 0 & \text{on } \partial\Omega \end{cases}$$

が成り立つことである．ここで Δ は Euclid 空間上の関数に作用するラプラシアンである．重複も込めた Dirichlet 固有値全体を**スペクトラム**という．よく知られているように, スペクトラムは正の実数直線内の離散集合であり, 無限大に発散する．スペクトラム $\{\lambda_i = \lambda_i(\Omega)\}_{i=1}^{\infty}$ を

$$0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \cdots \to \infty$$

と並べたとき, Weyl の法則：

$$\lambda_k \approx 4\pi \left(\frac{|\Omega|}{\Gamma(1+n/2)} \right)^{2/n} k^{2/n} \text{ as } k \to \infty$$

が成り立つ．Stewartson–Waechter [6] はスペクトル逆問題の一つとして次の問題を唱えた：

問題 1.1. 数列 $\{a_i\}_{i=1}^{\infty}$ が与えられたとき, ある Euclid 空間内の領域 Ω が存在して任意の $i = 1, 2, \ldots$ に対して $a_i = \lambda_i(\Omega)$ となるだろうか.

この問題に対するアプローチの一つとして次の方法が挙げられる：

(1) 任意の Dirichlet スペクトラムに対して領域に依存<u>しない</u>性質 (P) を与える.

(2) 性質 (P) を満たさない数列はいかなる領域の Dirichlet スペクトラムにもならない.

Payne–Pólya–Weinberger [5], Thompson [7] は以下の不等式を示した：n 次元 Euclid 空間内の有界領域の Dirichlet スペクトラム $\{\lambda_i\}_{i=1}^{\infty}$ に対して

$$\lambda_{k+1} - \lambda_k \leq \frac{4}{kn} \sum_{i=1}^{k} \lambda_i,\ k = 1, 2, \ldots \tag{1.1}$$

が成り立つ．この不等式は領域に依存しない．よって, 不等式 (1.1) を満たさない数列はいかなる領域の Dirichlet スペクトラムにもならない．例えば, 数列 $\{ak^m\}_{k=1}^{\infty}$, $a > 0, m \geq 4$ は不等式 (1.1) を満たさない．不等式 (1.1) は多くの数学者により改良され, 特に Yang [8] は以下の不等式を示した：n 次元 Euclid 空間内の有界領域の Dirichlet スペクトラム $\{\lambda_i\}_{i=1}^{\infty}$ に対して

$$\sum_{i=1}^{k} (\lambda_{k+1} - \lambda_i)^2 \leq \frac{4}{n} \sum_{i=1}^{k} (\lambda_{k+1} - \lambda_i)\lambda_i,\ k = 1, 2, \ldots \tag{1.2}$$

を示した．Yang の不等式 (1.2) は多くの系を生み出す．例えば, λ_{k+1} と λ_1 の比 λ_{k+1}/λ_1 の比を本質的に k のみに依存する関数による上からの評価を得る：

$$\frac{\lambda_{k+1}}{\lambda_1} \leq Ck^{2/n},\ k = 1, 2, \ldots. \tag{1.3}$$

1.2 閉リーマン多様体に対する固有値問題

連結で境界を持たないコンパクト Riemann 多様体に対して境界条件の無いラプラシアンの固有値を考えることができる．すなわち, 連結な閉 Riemann 多様体 (M, g) に対して定数 λ が固有値であるとは, M 上のある非自明な関数 u が存在して

$$-\Delta_g u = \lambda u \text{ in } M$$

が成り立つことである．ここで Δ_g は M 上の Riemann 計量 g から定まるラプラシアンである．スペクトラム $\{\lambda_i = \lambda_i(M, g)\}_{i=0}^{\infty}$ を

$$0 = \lambda_0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \cdots \to \infty$$

と並べる．Dirichlet 境界条件の場合とは異なり, ゼロも固有値である．問題 1.1 の変種として次の問題を考える：

問題 1.2. 数列 $\{a_i\}_{i=0}^{\infty}$ が与えられたとき, ある連結な閉 Riemann 多様体 (M, g) が存在して任意の $i = 0, 1, \ldots$ に対して $a_i = \lambda_i(M, g)$ となるだろうか.

問題 1.2 は次元が 3 以上かつ有限列の場合は肯定的に解決されている [2]．すなわち, 任意の 3 次元以上の多様体 M と任意の非減少な有限実数列 $\{a_i\}_{i=0}^{N}$ で $a_0 = 0$ を満たすものに対して M 上の Riemann 計量 g が存在して任意の $i = 0, 1, \ldots, N$ に対して $a_i = \lambda_i(M, g)$ が成り立つ．よって, Payne–Pólya–Weinberger, Yang の不等式のような結果は閉 Riemann 多様体全体に対しては期待で

きないことがわかる．しかし, Cheng–Yang [1] は次元が 2 以上の**等質**な閉 Riemann 多様体のスペクトラム $\{\lambda_i\}_{i=0}^{\infty}$ に対して Yang 型の普遍不等式を見出した：

$$\sum_{i=0}^{k}(\lambda_{k+1}-\lambda_i)^2 \leq \sum_{i=0}^{k}(\lambda_{k+1}-\lambda_i)(4\lambda_i+\lambda_1),\ k=1,2,\ldots. \tag{1.4}$$

Riemann 多様体 M が等質であるとは, その等長変換群が M に推移的に作用することである．平坦トーラスや球面は等質である.

1.3 グラフにおける固有値問題

本講演ではグラフといったらループや多重辺を含まないものとする．グラフ G に対して V_G をその頂点集合, E_G を辺集合とする．二頂点 $x, y \in V$ に対して $\{x, y\} \in E_G$ のとき $x \sim y$ とも表す．記号 d_x で頂点 x の次数を表す．グラフが**局所有限**であるとは, 各頂点の次数が有限であることをいう．局所有限グラフ G に対して**正規化ラプラシアン** Δ_G を V_G 上の関数 u に対して

$$\Delta_G u(x) = \frac{1}{d_x}\sum_{y\in V\,:\, y\sim x}(u(y)-u(x)),\ x\in V$$

によって定める．グラフ上のラプラシアンのスペクトラムに対して 1.1 節, 1.2 節と同様のことが成り立つかどうかを考える．領域 $\Omega \subset V_G$ が与えられたとき, その**境界** $\partial\Omega$ を

$$\partial\Omega = \{x \in V_G \setminus \Omega \mid y \sim x \text{ for some } y \in \Omega\}$$

によって定める．領域 Ω に対して定数 λ が **Dirichlet 固有値**であるとは, $\Omega \cup \partial\Omega$ 上のある非自明な関数 u が存在して

$$\begin{cases} -\Delta_G u = \lambda u & \text{in } \Omega, \\ u = 0 & \text{on } \partial\Omega \end{cases}$$

が成り立つことである．領域 Ω が n 頂点であるとき, Dirichlet 固有値は重複を込めて n 個存在する. スペクトラム $\{\lambda_i = \lambda_i(\Omega)\}_{i=1}^{n}$ を

$$0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \cdots \leq \lambda_n$$

と並べる．Hua–Lin–Su [3] は 1.1 節の類似として n 次元整数格子グラフ $\mathbb{Z}^n$ 内の有限領域の Dirichlet スペクトラム $\{\lambda_i\}_{i\geq 1}$ に対して Yang 型の不等式を得た：

$$\sum_{i=1}^{k}(\lambda_{k+1}-\lambda_i)^2(1-\lambda_i) \leq \frac{4}{n}\sum_{i=1}^{k}(\lambda_{k+1}-\lambda_i)\lambda_i,\ k=1,2,\ldots.$$

1.4 主結果

それでは 1.2 節の類似はどうなるであろうか．閉多様体の類似として有限グラフを考えることは自然であると思われる．有限グラフ G に対して定数 λ が**固有値**であるとは, V_G 上のある非自明な関数 u が存在して

$$-\Delta_G u = \lambda u \text{ in } V_G$$

が成り立つことである．グラフ G が n 頂点であるとき, 固有値は重複を込めて n 個存在する．スペクトラム $\{\lambda_i = \lambda_i(G)\}_{i=0}^{n-1}$ を

$$0 = \lambda_0 \leq \lambda_1 \leq \cdots \leq \lambda_{n-1}$$

と並べる．一方, 多様体の等質性に対応するグラフの条件は一意には決まらない．例えば

- 頂点推移性：任意の二頂点 x, y に対してある自己同型 γ が存在して $y = \gamma(x)$ が成り立つ.
- 辺推移性：任意の二辺 e_1, e_2 に対してある自己同型 γ が存在して $e_2 = \gamma(e_1)$ が成り立つ.

などグラフに対しては複数の等質性の概念がある．完全グラフやサイクルグラフは辺推移的かつ頂点推移的である．本講演の主結果の一つは以下である：

定理 1.3 ([4])**.** $\{\lambda_i\}_{i=0}^{n-1}$ を n 頂点からなる**辺推移的**グラフのスペクトラムとする．このとき, 0 でも 1 でもない任意の固有値 λ と $k = 0, 1, \ldots, n-2$ に対して

$$\sum_{i=0}^{k} (\lambda_{k+1} - \lambda_i)^2 (1 - \lambda_i) \leq \sum_{i=0}^{k} (\lambda_{k+1} - \lambda_i)(2(2-\lambda)\lambda_i + \lambda) \tag{1.5}$$

が成り立つ．特に $k = 0, 1, \ldots, n-2$ に対して

$$\sum_{i=0}^{k} (\lambda_{k+1} - \lambda_i)^2 (1 - \lambda_i) \leq \sum_{i=0}^{k} (\lambda_{k+1} - \lambda_i)(4\lambda_i + \lambda_1) \tag{1.6}$$

が成り立つ.

系 1.4. 定理 1.3 と同じ仮定のもと, 以下が成り立つ：

- 任意の $k = 0, 1, \ldots, n-2$ に対して
$$\lambda_{k+1} \leq \frac{\sum_{i=0}^{k} ((5 - 2\lambda_1)\lambda_i - \lambda_i^2 + \lambda_1)}{\sum_{i=0}^{k} (1 - \lambda_i)}.$$
- 正数 $\delta < 1$ に対して $\lambda_k \leq 1 - \delta$ ならば
$$\frac{\lambda_{k+1}}{\lambda_1} \leq C(\delta) k^{2/\delta}$$
が成り立つ．ただし
$$C(\delta) = \left(1 + \frac{4}{\delta}\right) \left(\frac{5}{64}\delta + \frac{9}{16}\right)^{1/2}.$$

一方, 定理 1.3 の仮定を頂点推移的グラフに置き換えることはできないことも分かる：

命題 1.5. ある頂点推移的グラフからなる列 $\{G_j\}_{j=1}^{\infty}$ が存在して, 次が成り立つ：

$$\frac{\lambda_2(G_j)}{\lambda_1(G_j)} \uparrow +\infty \text{ as } j \to \infty.$$

それぞれの研究において全体の空間や境界条件は異なっているが, 基本的な方針は同じである．すなわち, 任意の関数に対して補助的な勾配評価を行い, 関数として調和関数や固有関数などのよい関数を考えると固有値の普遍不等式を得る．以下の節で主定理の証明に用いる道具と命題 1.5 を満たす例を紹介する.

2　勾配評価

G を局所有限グラフとする．頂点集合 V_G 上の実数値関数全体の空間を $C(V_G)$ と表す．正規化ラプラシアン $\Delta_G\colon C(V_G) \to C(V_G)$ は

$$\Delta_G u(x) = \frac{1}{d_x}\sum_{y\sim x}(u(y)-u(x)),\ u \in C(V_G), x \in V_G$$

で定義されているのであった．正規化ラプラシアンから定まる**勾配作用素** Γ を

$$\Gamma(u,v) = \frac{1}{2}(\Delta_G(uv) - (\Delta_G u)v - u\Delta_G v),\ u,v \in C(V_G)$$

によって定める．勾配作用素は Riemann 多様体 (M,g) 上のラプラシアン Δ_g の場合は

$$\frac{1}{2}(\Delta_g(uv) - (\Delta_g u)v - u\Delta_g v) = g(\nabla u, \nabla v)$$

と一致する．有限領域 $\Omega \subset V_G$ と $u,v \in C(\Omega \cup \partial\Omega)$ に対して v が Dirichlet 境界条件を満たすならば

$$\sum_{x\in\Omega} u(x)\Delta_G v(x) d_x = -\sum_{x\in\Omega}\Gamma(u,v)(x)d_x.$$

また, 固有値に関する最大・最小原理は勾配作用素を用いて次のように表される：

$$\lambda_{k+1} = \sup_{W\subset C(\Omega)} \inf\left\{ \sum_{x\in\Omega}\Gamma(u,u)(x)d_x \;\middle|\; u \in W, \sum_{x\in\Omega}u(x)^2 d_x = 1 \right\}.$$

ただし右辺の sup は次元が $n-k$ である $C(\Omega)$ の線形部分空間 W 全体にわたってとる．最大・最小原理と Green の公式を用いることで以下の勾配評価を得る：

補題 2.1. 任意の関数 $h \in C(\Omega)$ に対して

$$\sum_{i=1}^{k}(\lambda_{k+1}-\lambda_i)^2\Phi_i(h) \le \sum_{i=1}^{k}(\lambda_{k+1}-\lambda_i)\|2\Gamma(u_i,h) + u_i\Delta_G h\|_{L^2(\Omega)}^2$$

が成り立つ．ただし

$$\Phi_i(h) = \sum_{\{x,y\}\in E_\Omega} u_i(x)u_i(y)(h(x)-h(y))^2.$$

有限グラフの場合, 調和関数は各連結成分上定数に限るため, 補題 2.1 を用いても何も言えたことにならない．そこで非自明な固有値に対する固有関数を用いる．グラフが辺推移的であるとき, 固有関数の正規直交系は辺上で良い対称性を持つ．一方, 整数格子や三角格子などの無限グラフの場合は座標関数が調和関数となり, 座標関数の族は辺上で良い対称性を持つ．これらの意味については次のセクションで述べる．

3　固有関数の対称性

グラフ G が**辺推移的**であるとは, G の自己同型群が辺集合に推移的に作用することであった.

補題 3.1. G を辺推移的な有限グラフとし, λ を G の固有値とする. また, $\{h_1, \ldots, h_m\}$ を固有値 λ の固有空間の正規直交基底とする. このとき, 任意の $\{x, y\} \in E_G$ に対して

$$h_1(x)h_1(y) + \cdots + h_m(x)h_m(y) = \frac{m(1-\lambda)}{2\#E_G} \tag{3.1}$$

が成り立つ. さらに $\lambda \neq 1$ または G が頂点推移的ならば, 任意の $x \in V_G$ に対して

$$h_1(x)^2 + \cdots + h_m(x)^2 = \frac{m}{2\#E_G}$$

が成り立つ.

定理 1.3 において辺推移的という仮定は (3.1) を導くためだけに使われている. 条件 (3.1) は辺推移性と同値ではないことが以下の命題により分かる：

命題 3.2. G, H を二つの辺推移的グラフで等スペクトルであるとする. このとき, デカルト積 $G \square H$ も (3.1) を満たす.

命題 3.2 において同型でない G, H をとってくると, 積グラフ $G \square H$ は辺推移的ではないが, (3.1) を満たす.

一方, グラフが頂点推移的のとき (3.1) は一般には言えない. グラフ G_j を完全グラフ K_j と K_2 の積とする. このとき G_j は頂点推移的であり, 第一固有値と第二固有値の比 $\lambda_2(G_j)/\lambda_1(G_j) = j/2$ は上に非有界である.

参考文献

[1] Q.-M. Cheng and H. Yang, *Bounds on eigenvalues of Dirichlet Laplacian*, Math. Ann. **337** (2007), no. 1, 159–175.

[2] Y. Colin de Verdière, *Construction de laplaciens dont une partie finie du spectre est donnée*, Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) **20** (1987), no. 4, 599–615.

[3] B. Hua, Y. Lin, and Y. Su, *Payne-Pólya-Weinberger, Hile-Protter and Yang's inequalities for Dirichlet Laplace eigenvalues on integer lattices*, arXiv:1710.05799 (2017).

[4] S. Kobayashi, *An upper bound for higher order eigenvalues of symmetric graphs*, J. Math. Soc. Japan **73** (2021), no. 4, 1277–1287. MR4329030

[5] L. E. Payne, G. Pólya, and H. F. Weinberger, *On the ratio of consecutive eigenvalues*, J. Math. and Phys. **35** (1956), 289–298.

[6] K. Stewartson and R. T. Waechter, *On hearing the shape of a drum: further results*, Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society **69** (1971), no. 2, 353–363.

[7] C. J. Thompson, *On the ratio of consecutive eigenvalues in N-dimensions*, Studies in Appl. Math. **48** (1969), 281–283.

[8] H. Yang, *An estimate of the difference between consecutive eigenvalues*, Preprint IC/91/60 of ICTP ,Trieste (1995).