3 次元ハイゼンベルグ群の時間的極小曲面のワイエルシュトラス型表現公式

北海道大学大学院 理学院 数学専攻
清原悠貴 (Hirotaka KIYOHARA)

概要

3 次元ハイゼンベルグ群の左不変ローレンツ計量は 3 種類に等長的に分類されることが知られている．本講演ではそのうちの 1 種について, 3 次元ハイゼンベルグ群の非垂直な時間的極小曲面がド・ジッター球面へのローレンツ調和写像によって特徴づけられることを説明する．またループ群の分解定理を用いることで時間的極小曲面のワイエルシュトラス型表現公式が得られることを紹介する．本講演の内容は北海道大学の小林真平氏との共同研究 [15] に基づく．

1　導入

Thurston の幾何化予想 ([20]) の解決以降, 8 つのモデル空間をはじめとする 3 次元等質空間の平均曲率一定曲面の研究が盛んに行われてきた ([6], [8], [9], [13])．特にモデル空間において, ある 2 次微分が平均曲率一定曲面に対して正則になることを明らかにした Abresch-Rosenberg の研究 ([1]) やスピノルを用いた行列方程式系によって 3 次元等質空間の曲面の積分表示を示した Berdinskiĭ-Taĭmanov の研究 (c.f.[7]) が 3 次元等質空間の研究が発展した大きな要因である．本講演で扱う 3 次元ハイゼンベルグ群は Thurston 幾何のモデル空間の 1 つであり, 特にハイゼンベルグ群の平均曲率零曲面の研究は今なお重要な課題である．

また 3 次元ユークリッド空間 $\mathbb{E}^3$ の平均曲率一定曲面の Kenmotsu 公式 ([14]) やそのミンコフスキー版である Akutagawa-Nishikawa の空間的平均曲率一定曲面の Kenmotsu 型公式 ([2]) など, 平均曲率一定曲面の表現公式は数多く知られている．中でも Sym の公式と呼ばれる表現公式は元々は $\mathbb{E}^3$ のガウス曲率が負一定の曲面を表現するために A. Sym([18]) によって発見された公式であるが, A. I. Bobenko([3], [4]) や T. Taniguchi([19]) によって正定値の空間形やミンコフスキー空間の平均曲率一定曲面にまで拡張された．

Abresch-Rosenberg や Berdinskiĭ-Taĭmanov をはじめとするこれまでの主要な研究では, 空間の計量としてリーマン計量を用いることが一般的であった．3 次元ハイゼンベルグ群の極小曲面のワイエルシュトラス型表現公式を与えた Dorfmeister らによる研究 ([10]) では, 対称空間への調和写像とスピノルの観点から 3 次元ハイゼンベルグ群の極小曲面とミンコフスキー空間の平均曲率一定曲面の間に関係があることを明らかにし, Sym の公式を用いて極小曲面の表現公式を与えた．本講演ではハイゼンベルグ群にローレンツ計量を定め, ド・ジッター球面への調和写像による時間的極小曲面の特徴付けを説明する．また, ミンコフスキー空間の時間的平均曲率一定曲面との関係を示すことで得ら

れる時間的極小曲面の表現公式を紹介する.

ユークリッド空間やミンコフスキー空間の平均曲率一定曲面はガウス写像を通して対称空間への調和写像との関係が深く, それ自体が研究の一分野を築いていると言ってもよい. 曲面から対称空間への調和写像に関する重大な研究として Dorfmeister-Pedit-Wu([12]) のワイエルシュトラス型の調和写像の構成方法が知られており, 論文著者の頭文字をとって DPW 法と呼ばれている. DPW 法ではループ群と呼ばれる無限次元リー群の分解を行い, 調和写像の動標構を作り出すことで調和写像を構成する. 本講演ではこの手法を用いてド・ジッター球面への調和写像の動標構を与えることで得られる 3 次元ハイゼンベルグ群の時間的極小曲面のワイエルシュトラス型表現公式について時間の許す限り紹介したい.

2　ハイゼンベルグ群の時間的曲面

本講演で紹介する手法では曲面の座標系としてパラ複素数を使用する. パラ複素数を用いることにより, 正定値計量の場合における Abresch-Rosenberg 微分 ([1]) と呼ばれる平均曲率一定曲面に対して正則な 2 次微分に類似した 2 次微分が得られ, 時間的極小曲面の構造がより明確になる. 本節ではパラ複素数の定義と性質およびハイゼンベルグ群の時間的曲面がみたす方程式を紹介する.

2.1　パラ複素構造

次の演算を満たす 1 と i' で張られる実代数を $\mathbb{C}'$ で表す：

$$(i')^2 = 1, \quad 1 \cdot i' = i' \cdot 1 = i'.$$

実代数 $\mathbb{C}' = \mathbb{R}1 \oplus \mathbb{R}i'$ およびその元をパラ複素数という. 任意のパラ複素数 $z \in \mathbb{C}'$ は複素数と同様に一意に $x, y \in \mathbb{R}$ が存在して $z = x + yi'$ と表され, 実部, 虚部, パラ複素共役をそれぞれ $\operatorname{Re} z = x$, $\operatorname{Im} z = y$, $\bar{z} = x - yi'$ と書く. 一方, 複素数とは異なりパラ複素数は次のような性質を持つ.

定理 2.1. (1) パラ複素数 $z = x + yi' \in \mathbb{C}'$ に対し, $z = w^2$ を満たすパラ複素数 $w \in \mathbb{C}'$ が存在する必要十分条件は $x \pm y \geq 0$ である.

(2) パラ複素数 $z = x + yi' \in \mathbb{C}'$ に対し, $z = e^w$ を満たすパラ複素数 $w \in \mathbb{C}'$ が存在する必要十分条件は $x \pm y > 0$ である.

(3) パラ複素数 $z = x + yi' \in \mathbb{C}'$ に対し, 逆元 $z^{-1} \in \mathbb{C}'$ が存在するための必要十分条件は $x^2 - y^2 \neq 0$ である.

(4) パラ複素数 $z, w \in \mathbb{C}'$ に対し, $(zw)^{1/2} \in \mathbb{C}'$ が存在するならば, $\epsilon \in \{\pm 1, \pm i'\}$ で $(\epsilon z)^{1/2}, (\epsilon w)^{1/2}$ が存在するものが取れる.

2.2 ハイゼンベルグ群

アファイン空間 $\mathbb{R}^3$ に次の群構造を備えた $\mathrm{Nil}_3 = (\mathbb{R}^3(x_1, x_2, x_3), \cdot)$ を 3 次元ハイゼンベルグ群という：

$$(x_1, x_2, x_3) \cdot (y_1, y_2, y_3) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3 + \frac{1}{2}(x_1 y_2 - y_1 x_2)).$$

このときハイゼンベルグ群 Nil_3 のリー環 $\mathfrak{nil}_3$ は $\mathbb{R}^3$ に標準基底 $e_1 = (1,0,0)$, $e_2 = (0,1,0)$, $e_3 = (0,0,1)$ の関係を次で定めたものとして与えられる：

$$[e_1, e_2] = e_3, \quad [e_2, e_3] = [e_3, e_1] = 0.$$

3 次元ハイゼンベルグ群の左不変ローレンツ計量の分類について次が知られている.

定理 2.2 ([17])**.** 3 次元ハイゼンベルグ群の任意の左不変ローレンツ計量は次のいずれかに等長的である：

(1) $g_1 = -dx_1^2 + dx_2^2 + \omega^2$,
(2) $g_2 = dx_1^2 + dx_2^2 - \omega^2$,
(3) $g_3 = dx_1^2 - dx_2^2 - 2\omega dx_2$.

ただし $\omega = dx_3 + \frac{1}{2}(x_2 dx_1 - x_1 dx_2)$ である. さらに各計量に関する等長群の次元は (1), (2) は 4, (3) は 6 である.

左不変ローレンツ計量 g_2 については Brander-Kobayashi ([5]) によって空間的極大曲面のワイエルシュトラス型表現公式が研究されている. 本講演では Nil_3 に与える計量として g_1 を採用し, その Levi-Civita 接続を ∇ とする.

2.3 ハイゼンベルグ群の時間的曲面

向き付け可能で連結な 2 次元多様体 M から 3 次元ハイゼンベルグ群への写像 $f : M \to \mathrm{Nil}_3$ を時間的曲面, すなわち誘導計量がローレンツであるはめ込みとする. このとき誘導されたローレンツ計量は M 上にローレンツ等角構造を定める. 故に M 上のパラ複素座標 $z = x + yi'$ で誘導計量 I が $I = e^u dz d\bar{z} = e^u(dx^2 - dy^2)$ の形で表されるものがとれ, M はローレンツ面, f はローレンツ等角はめ込みと見なすことができる. このとき z をローレンツ等角座標という. またパラ複素座標系 z に対して 2 次形式 Bdz^2 がパラ正則であるとは $\partial_{\bar{z}} B = 0$ が成り立つときをいう. このような関数 B はパラ正則であるという. ローレンツ面の幾何について詳細は [21] を参照されたい.

ローレンツ面 M から 3 次元ハイゼンベルグ群 Nil_3 へのローレンツ等角はめ込み $f : M \to \mathrm{Nil}_3$ に対し, $\Phi = f^{-1} f_z$ によって $\mathfrak{nil}_3$ 値写像 Φ を定義する. ここで f^{-1} は f の各点に対する逆元を意味し, f_z の単位元への左移動を表す. このとき次が成立する：

$$\Phi_{\bar{z}} - \overline{\Phi}_z + [\overline{\Phi}, \Phi] = 0. \tag{2.1}$$

さらに N を f の単位法ベクトル場とし, H を N に関する f の平均曲率とすると

$$\Phi_{\bar{z}} + \overline{\Phi}_z + \left\{\Phi, \overline{\Phi}\right\} = e^u H f^{-1} N \tag{2.2}$$

が成立する．ここで $\{\cdot,\cdot\}$ は $\{X,Y\}=\nabla_X Y+\nabla_Y X$ によって定義される対称双線形写像である．また $\Phi=\sum_{k=1}^3 \phi_k e_k$ と展開したとき, 定理 2.1(3) と f の等角性より

$$\phi_1=\epsilon\left((\overline{\psi_2})^2+(\psi_1)^2\right),\ \phi_2=\epsilon i'\left((\overline{\psi_2})^2-(\psi_1)^2\right),\ \phi_3=2\psi_1\overline{\psi_2}$$

を満たす $\epsilon\in\{\pm i'\}$ とパラ複素関数 ψ_1, ψ_2 が存在することがわかる．このパラ複素関数 ψ_1, ψ_2 を f の生成スピノルという．

命題 2.3 (c.f.[7])**.** ローレンツ等角写像 f が満たす式 (2.1)(2.2) は次の非線形ディラック方程式に書き換えられる：

$$\begin{pmatrix} \partial_z\psi_2+\mathcal{U}\psi_1 \\ -\partial_{\bar{z}}\psi_1+\mathcal{V}\psi_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{2.3}$$

ここで $\mathcal{U}$, $\mathcal{V}$ は,

$$\mathcal{U}=\mathcal{V}=-\frac{H}{2}e^{u/2}+\frac{i'}{4}h \tag{2.4}$$

$$e^{u/2}=2(\psi_2\overline{\psi_2}+\psi_1\overline{\psi_1}),\quad h=2(\psi_2\overline{\psi_2}-\psi_1\overline{\psi_1}) \tag{2.5}$$

で与えられる．関数 $\mathcal{U}$, $\mathcal{V}$ を f のディラックポテンシャルという．

注意 2.4. 関数 H, $e^{u/2}$, h および非線形ディラック方程式 (2.3)(2.4) から式 (2.1)(2.2) を得るには解 (ψ_1,ψ_2) が (2.5) を満たしている必要がある．また単位法ベクトル場をスピノルで表すことで, 関数 h がある点で消えていることと, 対応する時間的曲面 f に左不変ベクトル場 E_3 がその点で接していることは同値であることがわかる．このことから h が至るところで消えない時間的曲面 f は非垂直であるという．

注意 2.5. ミンコフスキー空間 $\mathbb{L}^3$ の時間的曲面の非線形ディラックポテンシャルを同様に導くと, Nil_3 の時間的曲面の $H=0$ の場合によく似ていることがわかる．これはミンコフスキー空間のある時間的平均曲率 1/2 曲面とハイゼンベルグ群の時間的 $H=0$ 曲面にある種の対応があるためである．

ローレンツ等角写像の単位法ベクトル場を単位元に左移動させた正規ガウス写像は 2 つの立体射影を通じてド・ジッター球面 $\mathbb{S}^2_1=\left\{(x_1,x_2,x_3)\in\mathbb{L}^3 | x_1^2-x_2^2+x_3^2=1\right\}$ への写像と見なすことができる．

3 時間的極小曲面

時間的曲面 $f:M\to\mathrm{Nil}_3$ の平均曲率が 0 であるとき, f を時間的極小曲面という．時間的極小曲面に対しては曲面が非垂直であることとディラックポテンシャルが可逆であることは同値である．また, ディラックポテンシャル $\mathcal{U}$ が可逆であるとき, あるパラ複素関数 w と $\tilde{\epsilon}\in\{\pm1,\pm i'\}$ が存在して $\mathcal{U}=\tilde{\epsilon}e^{w/2}$ と表せる．このとき非線形ディラック方程式は Lax 形式に書き換えることができる．本節では本講演における主結果である非垂直な時間的極小曲面のローレンツ調和写像による特徴づけと表現公式を与える．

3.1　主結果 1

パラ複素平面の単連結領域 $\mathbb{D}$ 上定義されたディラックポテンシャルが可逆なローレンツ等角写像 $f:\mathbb{D}\to\mathrm{Nil}_3$ に対し, パラメータ $\mu\in\mathbb{S}^1_1:=\left\{e^{i't}=\cosh t+i'\sinh t\in\mathbb{C}'\ \middle|\ t\in\mathbb{R}\right\}$ を用いて行列値 1 次微分形式の族 α^μ を

$$\alpha^\mu:=U^\mu dz+V^\mu d\bar{z},$$

$$U^\mu=\begin{pmatrix}\frac{1}{4}w_z+\frac{1}{2}H_z\tilde{\epsilon}e^{-w/2}e^{u/2} & -\mu^{-1}\tilde{\epsilon}e^{w/2}\\ \mu^{-1}B\tilde{\epsilon}e^{-w/2} & -\frac{1}{4}w_z\end{pmatrix},\tag{3.1}$$

$$V^\mu=\begin{pmatrix}-\frac{1}{4}w_{\bar{z}} & -\mu\bar{B}\tilde{\epsilon}e^{-w/2}\\ \mu\tilde{\epsilon}e^{w/2} & \frac{1}{4}w_{\bar{z}}+\frac{1}{2}H_{\bar{z}}\tilde{\epsilon}e^{-w/2}e^{u/2}\end{pmatrix}.\tag{3.2}$$

で定める．ここで関数 B は *Abresch-Rosenberg* 微分と呼ばれる 2 次形式の係数関数である．曲面の平均曲率が一定であるとき, この 2 次形式はパラ正則になる．次の定理は 3 次元ハイゼンベルグ群の非垂直な時間的極小曲面を特徴づける本講演の主結果の 1 つである．

定理 3.1. 単連結領域 $\mathbb{D}\subset\mathbb{C}'$ 上で定義されたディラックポテンシャルが可逆なローレンツ等角写像 $f:\mathbb{D}\to\mathrm{Nil}_3$ に対し, 以下は同値である：

(1) f は時間的極小曲面である.

(2) ディラックポテンシャル $\mathcal{U}=\tilde{\epsilon}e^{w/2}=-\frac{H}{2}e^{u/2}+\frac{i'}{4}h$ は純パラ虚数に値を持つ.

(3) $d+\alpha^\mu$ は全ての μ について自明束 $\mathbb{D}\times\mathrm{SU}'_{1,1}$ 上の平坦接続を与える.

(4) 正規ガウス写像 $f^{-1}N$ はド・ジッター球面 $\mathbb{S}^2_1\subset\mathbb{L}^3_{(+,-,+)}$ へのローレンツ調和写像である.

ここで $\mathrm{SU}'_{1,1}$ は次で与えられるリー群で, 特殊パラユニタリ群という：

$$\mathrm{SU}'_{1,1}=\left\{\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \bar{\beta} & \bar{\alpha}\end{pmatrix}\mid\alpha,\beta\in\mathbb{C}',\alpha\bar{\alpha}-\beta\bar{\beta}=1\right\}.$$

3.2　主結果 2

定理 3.1 より非垂直な時間的極小曲面 f に対し, 微分方程式 $(F^\mu)^{-1}dF^\mu=\alpha^\mu$ は $\mathrm{SU}'_{1,1}$ 値の初期値に対して $\mathrm{SU}'_{1,1}$ 値の解 F^μ をもつ．以下簡単のため $h>0$, $\epsilon=i'$ とするが, 他の状況においても同様の結果が得られる．

定義 3.2. 微分方程式 $(F^\mu)^{-1}dF^\mu=\alpha^\mu$ の $\mathrm{SU}'_{1,1}$ 値の解 F^μ を時間的極小曲面 f の一般拡張動標構という．特に条件

$$F^\mu|_{\mu=1}=F=\frac{1}{\sqrt{\psi_2\overline{\psi_2}-\psi_1\overline{\psi_1}}}\begin{pmatrix}\overline{\psi_2} & \overline{\psi_1}\\ \psi_1 & \psi_2\end{pmatrix}$$

の下で F^μ を時間的極小曲面 f の拡張動標構という．

例 3.3. 次の Nil_3 の曲面 f は $x_3=0$ 平面に値を持つ時間的極小曲面である：

$$f=\left(\frac{2i'(z-\bar{z})}{1+z\bar{z}},\ \frac{2(z+\bar{z})}{1+z\bar{z}},\ 0\right).$$

曲面 f に対する拡張動標構 F^μ は次で与えられる：

$$F^\mu = \frac{1}{(1+z\bar{z})^{1/2}}\begin{pmatrix} 1 & -i'\mu^{-1}z \\ i'\mu\bar{z} & 1 \end{pmatrix}.$$

ミンコフスキー空間 $\mathbb{L}^3$ と特殊パラユニタリ群 $\mathrm{SU}'_{1,1}$ のリー環

$$\mathfrak{su}'_{1,1} = \left\{ \begin{pmatrix} ai' & \bar{b} \\ b & -ai' \end{pmatrix} \mid a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{C}' \right\}$$

を次の対応をもって同一視する：

$$\mathfrak{su}'_{1,1} \ni \frac{1}{2}\begin{pmatrix} ri' & -p-qi' \\ -p+qi' & -ri' \end{pmatrix} \longleftrightarrow (p,q,r) \in \mathbb{L}^3_{(+,-,+)}.$$

ただし $\mathfrak{su}'_{1,1}$ には不定値内積 $\langle X, Y\rangle := 2\mathrm{tr}(XY)$ を定める．さらに線形同型写像

$$\Xi : \mathfrak{su}'_{1,1} \ni \frac{1}{2}\begin{pmatrix} x_3 i' & -x_2 - x_1 i' \\ -x_2 + x_1 i' & -x_3 i' \end{pmatrix} \mapsto x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3 \in \mathfrak{nil}_3$$

をとる．ド・ジッター球面へのローレンツ調和写像はミンコフスキー空間の時間的平均曲率一定曲面との関連が深く, ローレンツ調和写像から時間的平均曲率一定曲面を与える Sym の公式が知られている ([11])．このことを応用して 3 次元ハイゼンベルグ群の時間的極小曲面の表現公式を与える次の定理を得た.

定理 3.4. 単連結領域 $\mathbb{D} \subset \mathbb{C}'$ 上定義されたある時間的極小曲面 f に対し, その拡張動標構を F^μ とする．リー環 $\mathfrak{su}'_{1,1}$ に値をもつ写像 $f_{\mathbb{L}^3}$ と $N_{\mathbb{L}^3}$ を

$$f_{\mathbb{L}^3} = -i'\mu(\partial_\mu F^\mu)(F^\mu)^{-1} - \frac{i'}{2}\mathrm{Ad}(F^\mu)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad N_{\mathbb{L}^3} = \frac{i'}{2}\mathrm{Ad}(F^\mu)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

で定め, さらに写像 $f^\mu : \mathbb{D} \to \mathrm{Nil}_3$ を

$$f^\mu := \exp \circ \Xi \circ \hat{f}, \quad \hat{f} = (f_{\mathbb{L}^3})^o - \frac{i'}{2}\mu(\partial_\mu f_{\mathbb{L}^3})^d$$

により定める．ここで *"o"*, *"d"* はそれぞれ非対角成分と対角成分を表す．このとき 1 に十分近い μ に対して以下が成立する：

(1) 写像 $f_{\mathbb{L}^3}$ はミンコフスキー空間 $\mathbb{L}^3$ の時間的平均曲率 1/2 曲面であり, $N_{\mathbb{L}^3}$ を単位法ベクトル場にもつ.

(2) 写像 f^μ は 3 次元ハイゼンベルグ群 Nil_3 の時間的極小曲面であり, 正規ガウス写像を立体射影を通してド・ジッター球面への写像と見たものが $N_{\mathbb{L}^3}$ である．さらに $f^\mu|_{\mu=1}$ はオリジナルの時間的極小曲面 f と等長群の作用を除いて一致する.

注意 3.5. 定理 3.4 の $f_{\mathbb{L}^3}$ の定義式がミンコフスキー空間の時間的平均曲率 1/2 曲面の Sym の公式のパラ複素数を用いた表示である.

4　拡張動標構のワイエルシュトラス型表現

定理 3.1 および定理 3.4 より一般拡張動標構を与えることでハイゼンベルグ群の時間的極小曲面を与えることができる．本節では拡張動標構をパラ正則関数で記述する, 拡張動標構のワイエルシュトラス型表現公式を紹介する．

4.1　ループ群の分解

時間的極小曲面の拡張動標構は $\mathbb{C}' \setminus \{z(1 \pm i')|z \in \mathbb{C}'\}$ 上でパラメータ μ について解析的であるため, ループ群と呼ばれる無限次元リー群の一種である以下の群を考える．

$$\begin{aligned}
\Lambda'\mathrm{SL}_2\mathbb{C}'_\sigma &= \left\{ g : \mathbb{S}^1_1 \to \mathrm{SL}_2\mathbb{C}' \;\middle|\; \begin{array}{c} g = \cdots + g_{-1}\mu^{-1} + g_0 + g_1\mu^1 + \cdots \\ g(-\mu) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} g(\mu) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \end{array} \right\}, \\
\Lambda'^{+}\mathrm{SL}_2\mathbb{C}'_\sigma &= \left\{ g \in \Lambda'\mathrm{SL}_2\mathbb{C}'_\sigma \mid g = g_0 + g_1\mu^1 + \cdots \right\}, \\
\Lambda'^{-}\mathrm{SL}_2\mathbb{C}'_\sigma &= \left\{ g \in \Lambda'\mathrm{SL}_2\mathbb{C}'_\sigma \mid g = g_0 + g_{-1}\mu^{-1} + \cdots \right\}, \\
\Lambda'^{+}_{*}\mathrm{SL}_2\mathbb{C}'_\sigma &= \left\{ g \in \Lambda'^{+}\mathrm{SL}_2\mathbb{C}'_\sigma \mid g(0) = \mathrm{id} \right\}, \\
\Lambda'^{-}_{*}\mathrm{SL}_2\mathbb{C}'_\sigma &= \left\{ g \in \Lambda'^{-}\mathrm{SL}_2\mathbb{C}'_\sigma \mid g(\infty) = \mathrm{id} \right\}, \\
\Lambda'\mathrm{SU}'_{1,1\sigma} &= \left\{ g \in \Lambda'\mathrm{SL}_2\mathbb{C}'_\sigma \middle| \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \left(\overline{g(1/\bar{\mu})}^T \right)^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = g(\mu) \right\}.
\end{aligned}$$

時間的極小曲面の拡張動標構はループ群 $\Lambda'\mathrm{SU}'_{1,1\sigma}$ の元である．次の定理はループ群の基本的な分解公式である Birkhoff 分解・Iwasawa 分解 ([16]) を応用して得られる．

定理 4.1. (1) Birkhoff 分解 : 積をとる写像

$$\Lambda'^{-}_{*}\mathrm{SL}_2\mathbb{C}'_\sigma \times \Lambda'^{+}\mathrm{SL}_2\mathbb{C}'_\sigma \to \Lambda'\mathrm{SL}_2\mathbb{C}'_\sigma, \quad \Lambda'^{+}_{*}\mathrm{SL}_2\mathbb{C}'_\sigma \times \Lambda'^{-}\mathrm{SL}_2\mathbb{C}'_\sigma \to \Lambda'\mathrm{SL}_2\mathbb{C}'_\sigma$$

はそれぞれ $\Lambda'\mathrm{SL}_2\mathbb{C}'_\sigma$ のある稠密開集合への微分同相写像である．

(2) Iwasawa 分解 : 積をとる写像

$$\Lambda'\mathrm{SU}'_{1,1\sigma} \times \Lambda'^{+}\mathrm{SL}_2\mathbb{C}'_\sigma \to \Lambda'\mathrm{SL}_2\mathbb{C}'_\sigma$$

は $\Lambda'\mathrm{SL}_2\mathbb{C}'_\sigma$ のある稠密開集合への微分同相写像である．

これらの稠密開集合を $\Lambda'\mathrm{SL}_2\mathbb{C}'_\sigma$ の *Big cell* という．

4.2　主結果 3

定理 4.1 の Birkhoff 分解を時間的極小曲面の拡張動標構に用いることで拡張動標構のワイエルシュトラスデータになるパラ正則 1 形式が得られた．

定理 4.2. 時間的極小曲面 f に対し, その拡張動標構 F^μ が Big cell に属しているとする．このとき Birkhoff 分解 $F^\mu = F^\mu_- F^\mu_+$ $(F^\mu_- \in \Lambda'^{-}\mathrm{SL}_2\mathbb{C}'_\sigma,\ F^\mu_+ \in \Lambda'^{+}\mathrm{SL}_2\mathbb{C}'_\sigma)$ によって定まる F^μ_- の

Maurer-Cartan 形式 $\xi = (F_-^\mu)^{-1} dF_-^\mu$ は次で与えられる：

$$\xi = \mu^{-1} \begin{pmatrix} 0 & a(z) \\ -\frac{B(z)}{a(z)} & 0 \end{pmatrix} dz. \tag{4.1}$$

ただし $B(z)$ は時間的極小曲面 f の Abresch-Rosenberg 微分の係数関数であり, $a(z)$ は

$$a(z) = -\frac{i'}{4} h^2(z,0) h^{-1}(0,0)$$

で定義されるパラ正則関数である．パラ正則 1 形式 ξ を時間的極小曲面 f の正規ポテンシャルという．

逆に次の定理により式 (4.1) で定義された正規ポテンシャルから 3 次元ハイゼンベルグ群の時間的極小曲面の拡張動標構を構成できることを示した．

定理 4.3. 式 (4.1) で定義されたパラ正則 1 形式 ξ に対し, 2 次正方行列 F_-^μ を方程式

$$\partial_z F_- = F_- \xi, \quad F_-(z=0) = \mathrm{id}$$

の解とする．このとき Iwasawa 分解 $F_-^\mu = F^\mu V_+$ $(F^\lambda \in \Lambda' \mathrm{SU}'_{1,1\sigma},\ V_+ \in \Lambda'^+ \mathrm{SL}_2 \mathbb{C}'_\sigma)$ によって定まる F^μ に対し, ある $k \in \mathrm{U}'_1$ が存在して $F^\mu k$ は適切に座標変換すると 3 次元ハイゼンベルグ群の時間的極小曲面の拡張動標構になる．ここで $\mathrm{U}'_1 := \left\{ \begin{pmatrix} e^{i'\theta} & 0 \\ 0 & e^{-i'\theta} \end{pmatrix} \middle| \theta \in \mathbb{R} \right\}$ である．

5 具体例

例 5.1 (双曲放物面)．正規ポテンシャル $\xi = \mu^{-1} \begin{pmatrix} 0 & -\frac{i'}{4} \\ -\frac{i'}{4} & 0 \end{pmatrix} dz$ に対して拡張動標構は

$$F^\mu = \begin{pmatrix} \cosh \frac{-\mu^{-1}z + \mu\bar{z}}{4} & i' \sinh \frac{-\mu^{-1}z + \mu\bar{z}}{4} \\ i' \sinh \frac{-\mu^{-1}z + \mu\bar{z}}{4} & \cosh \frac{-\mu^{-1}z + \mu\bar{z}}{4} \end{pmatrix}$$

で与えられる．対応する $\mathbb{L}^3$ の時間的平均曲率 1/2 曲面 $f_{\mathbb{L}^3}$ と Nil_3 の時間的極小曲面 f^μ は

$$f_{\mathbb{L}^3} = \left(\frac{\mu^{-1}z + \mu\bar{z}}{2}, -\sinh i' \frac{-\mu^{-1}z + \mu\bar{z}}{2}, -\cosh \frac{-\mu^{-1}z + \mu\bar{z}}{2} \right)$$

$$f^\mu = \left(-\sinh i' \frac{-\mu^{-1}z + \mu\bar{z}}{2}, \frac{\mu^{-1}z + \mu\bar{z}}{2}, \frac{\mu^{-1}z + \mu\bar{z}}{4} \sinh i' \frac{-\mu^{-1}z + \mu\bar{z}}{2} \right)$$

である．時間的極小曲面 f^μ は双曲放物面 $x_3 = -x_1 x_2 / 2$ を示している．

例 5.2 (B-scroll 型時間的極小曲面)．パラ正則関数 $S(z)$ を用いて正規ポテンシャル ξ を

$$\xi = \mu^{-1} \begin{pmatrix} 0 & -\frac{i'}{4} \\ -\frac{1-i'}{2} S(z) & 0 \end{pmatrix} dz$$

で定める．このとき, 対応するミンコフスキー空間の時間的平均曲率 1/2 曲面は B-scroll と呼ばれる null 曲線による線織面である．また, 対応するハイゼンベルグ群の時間的極小曲面も線織面になっている．

参考文献

[1] U. Abresch, H. Rosenberg. Generalized Hopf differentials. *Mat. Contemp.* **28**: 1–28, 2005.

[2] K. Akutagawa, S. Nishikawa. The Gauss Map and Spacelike Surfaces with Prescribed Mean Curvature in Minkowski 3-space. *Tohoku Math. J.* **42**: 67–82, 1990.

[3] A. I. Bobenko. Constant mean curvature surfaces and integrable equations. *Russian Math. Surveys* **46**(4): 1-45, 1991.

[4] A. I. Bobenko. Surfaces in terms of 2 by 2 matrices. Old and new integrable cases. Harmonic maps and integrable systems, Vieweg, 83–127, 1994.

[5] D. Brander, S. P. Kobayashi. Vertical sets on maximal surfaces in Heisenberg groups. *In preparation*, 2021.

[6] D. Brander, M. Svensson. Timelike constant mean curvature surfaces with singularities. *J. Geom. Anal.* **24**(3): 1641–1672, 2014.

[7] D. A. Berdinskiĭ, I. A. Taĭmanov. Surfaces in three-dimensional Lie groups (Russian). *Sibirsk. Mat. Zh.* **46**(6): 1248–1264, 2005. English translation: *Siberian Math. J.* **46**(6): 1005–1019, 2005.

[8] B. Daniel. Isometric immersions into 3-dimensional homogeneous manifolds. *Comment. Math. Helv.* **82**(1): 87–131, 2007.

[9] B. Daniel. The Gauss map of minimal surfaces in th Heisenberg group. *Int. Math. Res. Not. IMRN,* (3): 674–695, 2011.

[10] J. F. Dorfmeister, J. Inoguchi, S.-P. Kobayashi. A loop group method for minimal surfaces in the three-dimensional Heisenberg group. *Asian J. Math.* **20**(3): 409–448, 2016.

[11] J. Dorfmeister, J. Inoguchi, M. Toda. Weierstra-type representation of timelike surfaces with constant mean curvature. in: *Differential geometry and integrable systems (Tokyo, 2000)*, Contemp. Math., **308**: 77–99, 2002.

[12] J. Dorfmeister, F. Pedit, H. Wu. Weierstrass type representation of harmonic maps into symmetric spaces. *Comm. Anal. Geom.* **6**(4): 633–668, 1998.

[13] I. Fernandez, P. Mira. A characterization of constant mean curvature surfaces in homogeneous 3-manifolds. *Differential Geom. Appl.* **25**(3): 281–289, 2007.

[14] K. Kenmotsu. Weierstrass formula for surfaces of prescribed mean curvature. Math. Ann., **245**: 89–99, 1979.

[15] H. Kiyohara, S.-P. Kobayashi. Timelike minimal surfaces in the three-dimensional Hiesenberg group. *In preparation.*

[16] A. Pressley, G. Segal. *Loop groups.* Oxford Mathematical Monographs. The Clarendon Press Oxford University Press, New York, 1986. Oxford Science Publications.

[17] S. Rahmani, Métriques de Lorentz sur les groupes de Lie unimodulaires, de dimension trois, [Lorentz metrics on three-dimensional unimodular Lie groups]. *J. Geom. Phys.*, **9**(3): 295–302, 1992.

[18] A. Sym. Soliton surfaces and their applications (soliton geometry from spectral problems), Geometric aspects of the Einstein equations and integrable systems (Scheveningen, 1984), Springer, 154–231, 1985.

[19] T. Taniguchi. The Sym-Bobenko formula and constant mean curvature surfaces in Minkowski 3-space. *Tokyo J. Math.*, **20**(2): 463–373, 1997.

[20] W. M. Thurston (S. Levy ed.). *Three-dimensional geometry and topology.* Vol. 1, Princeton Math. Series, Vol. 35, Princeton Univ. Press, 1997.

[21] T. Weinstein. *An introduction to Lorentz surfaces.* De Gruyter Expositions in Mathematics, 22. Walter de Gruyter & Co., Berlin, 1996.