# 可微分関数の Reeb グラフとグラフの具体的な可微分関数の Reeb グラフとしての実現

北澤直樹(Naoki Kitazawa)　(九州大学マス・フォア・インダストリ研究所)*

多様体をみる, 位相や可微分多様体としての構造を調べるということは, 幾何学の, ひいては数学の基本的で重要な問題である. (可微分)多様体を, その上の, 自身より次元の高くない空間への良い(可微分)写像を用いてみ, 調べるという, Morse 関数という良い可微分関数を用いて多様体を調べる理論を原点とした手法は, 自然で重要である. 多様体の代数的位相幾何学, 微分位相幾何学等あらゆる幾何学の研究において多くの大きな面白い貢献をしてきており今もし続けている. その際, 逆像の連結成分からなる定義域の多様体の商空間 Reeb 空間が重要な道具のひとつである. 本稿, 本発表では, 関連した自然で重要な問題として, 与えられたグラフを性質の良い可微分関数の Reeb 空間として実現できるかという問題について, 基本的な部分や歴史, 著者の研究を紹介する.

## 1. Reeb 空間(グラフ).

Reeb 空間は, 位相空間の間の写像の逆像の連結成分からなる空間である. $c : X \to Y$ を位相空間の間の(連続)写像とする. $X$ の任意の点 $x_1$,$x_2$ について, 同じ $Y$ の点 $y$ の逆像 $c^{-1}(y)$ の同じ連結成分にあるときかつその時に限り $x_1 \sim_c x_2$ をみたすよう, $X$ 上の関係 $\sim_c$を定義する. これは同値関係である.

Definition **1.** 商空間 $W_c := X/\sim_c$ を $c$ の Reeb 空間と呼ぶ.

$q_c : X \to W_c$ で商写像を表し $\bar{c}$ で $c = \bar{c} \circ q_c$ をみたす写像とする(連続写像として一意に定まる).

本稿, 本発表で, 多様体は基本的な空間, 対象である. 多様体, 可微分多様体や可微分関数(写像)について, 数学系の学科で学部で学ぶ程度の内容は既知とする. 題名を含め既に"可微分"という用語を数回用いているが, 基本的に滑らかつまり $C^\infty$ 級のものを考える. 今後, 滑らかな多様体の間の滑らかな写像で, 定義域の多様体の方が値域の多様体より次元の高いようなものとその Reeb 空間を考える. 多様体上の可微分関数や写像の Reeb 空間に関し, [18] が関連した初期の論文の一つである.

以降 $f : M \to N$ で滑らかな多様体 $M$ から滑らかな多様体 $N$ への滑らかな写像を表す. $f$ の特異点とは, $M$ の点 $p \in M$ でそこでの微分 $df_p$ について階数が $M$, $N$ 双方の次元より低いものとする. ある特異点 $p$ での値として表せる $f(p)$ を $f$ の特異値と呼ぶ. 特異値でない $N$ の点を $f$ の正則値と呼ぶ.

滑らかな多様体の微分同相型を, 以下で定義する: 滑らかな多様体からなるクラスを考え, 二つの滑らかな多様体について, 一方から他方への滑らかで特異点をもたないような同相写像つまり微分同相写像が存在するときかつその時に限り同値とし, 同値類をその多様体の微分同相型と呼ぶ(もちろんここで考えた関係は同値関係である). 多様体 $M_1$ と $M_2$ の微分同相型が等しいとき $M_1$ は $M_2$ に($M_1$ と $M_2$ は) 微分同相であるという.

今後 $k > 0$ 次元 Euclid 空間を $\mathbb{R}^k$ で表す. これは自然な $k$ 次元の滑らかな多様体であり, 自然な計量も入った Riemann 多様体でもある. $x \in \mathbb{R}^k$ と原点 0 の間の距離を $||x|| \geq 0$ で表す. $S^k := \{x \in \mathbb{R}^{k+1} \mid ||x|| = 1.\}$ で $k$ 次元単位球面を表す(ただし $k$ は 0 以上の整数). これは $k$ 次元の滑らかな閉部分多様体で境界をもたずコンパクトである. また $k \geq 1$ ならば連結である. $D^k := \{x \in \mathbb{R}^k \mid ||x|| \leq 1.\}$ で $k$ 次元

* e-mail: n-kitazawa@imi.kyushu-u.ac.jp
web: https://naokikitazawa.github.io/NaokiKitazawa.html

単位球体を表す(ただし $k$ は 1 以上の整数). これは $k$ 次元の滑らかな閉部分多様体で境界をもちコンパクトである.

$f$ がさほど病的でなく適切な意味で一般的な滑らかな写像のとき, $W_f$ は値域の空間と同次元の多面体(で, 一般に滑らかな多様体から自然に一意に多面体の構造が定まることがよく知られている中, 値域の多様体に定まるそれを引き戻す形で自然に誘導されるもの)となることが知られている. Reeb 空間 $W_f$ が多面体であるという状況について, $f$ が関数の場合 Reeb 空間 $W_f$ はグラフになる.

**Theorem 1** ([21])**.** コンパクト多様体上の滑らかな関数 $f$ で特異値が高々有限個であるようなものについて, $W_f$ は 1 次元コンパクト多面体つまりグラフと同相である. 閉多様体上の滑らかな関数 $f$ で特異値が高々有限個であるようなものについて, $W_f$ は, 頂点集合を $q_f$ で考えた逆像が特異点を含むようなもの全体からなる集合であるとしたときグラフとなる.

Definition **2.** 閉多様体上の滑らかな関数 $f$ で, $W_f$ が, 頂点集合を $q_f$ で考えた逆像が特異点を含むようなもの全体からなる集合であるとしてグラフとなるとき, Reeb グラフと呼ぶ.

例えば, Morse(-Bott) 関数のような特異点のまわりでの型が複雑でないような関数 $f$ では, Reeb グラフ $W_f$ が得られる.

以下、Morse(-Bott) 関数を定義する. 古典的な有名文献として, Morse 関数の理論に関して [16], [17], Morse-Bott 関数に関して [1] がある. Morse 関数の理論は, 一般に(略して) Morse 理論と呼ばれるが, [14] は Morse 理論の有名な教科書的な文献である.

Definition **3.**

1. $m$ 次元多様体上の滑らかな関数 $f$ の特異点が境界になく, 特異点 $p$ で整数 $0 \leq i(p) \leq m$ と適切な座標があって $(x_1, \cdots, x_m) \mapsto \Sigma_{j=1}^{m-i(p)} {x_j}^2 - \Sigma_{j=1}^{i(p)} {x_{m-i(p)+j}}^2 + f(p)$ と表せるとき, $f$ は Morse 関数であるという.
2. 滑らかな関数 $f$ が, 特異点の周りで, うまく座標をとって局所的に特異点のない滑らかな写像と Morse 関数の合成で表せているとき, $f$ は Morse(-Bott)関数であるという.

Morse 関数で, 値の大小を考慮して座標をとれば, $i(p)$ は一意である. Morse 関数の特異点は離散的に現れる. Morse-Bott 関数の特異点全体の集合は, 定義域の多様体の滑らかで境界を持たないような閉部分多様体である. 以下 Figure 1 と Figure 2 で Morse 関数 Morse-Bott 関数とその Reeb グラフの例を紹介する. 例えば, 単位球面の高さを考えて得られる関数が Morse 関数であることを調べることは, 多様体論や Morse 理論に関する練習問題であることも補足する.

さて, Reeb 空間が値域の空間と同次元の多面体になるということについて, [12] で次元 3 以上の閉多様体から平面への, 特異点の観点からして一般的な滑らかな写像, いわゆる安定写像で示されている. 安定写像という滑らかな写像のクラスは, 各特異点で値が異なるような閉多様体上の Morse 関数全体を含むようなクラスである(閉多様体上の滑らかな関数の場合そういう関数であることと安定であることは同値である). 安定写像等の説明を含む可微分写像の特異点理論に関する教科書的文献として [2] がある. Reeb 空間が値域の空間と同次元の多面体になるということに話を戻すが, [24] ではかなり一般的な状況で示された. このような状況で, Reeb 空間は多様体を簡単にとらえる. 定義等の説明が長くなってしまったが, Reeb グラフや Reeb 空間は, 多様体をみる, 位相や可微分多様体としての構造を調べるという幾何学の, ひいては数学の基本的で重要な問題において, 基本的で強力な道具と

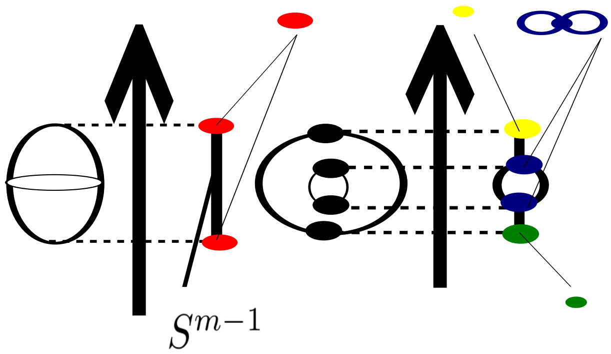


Figure 1: 次元 2 以上の単位球面の自然な高さを考えて得られる Morse 関数と Reeb グラフ(左). 3 次元の Euclid 空間 $\mathbb{R}^3$ に自然な形で埋め込まれたトーラス$(S^1 \times S^1)$に対し自然な高さを考えて得られる Morse 関数と Reeb グラフ(右). グラフの点を指し示す線の先にある点や円周等の図形や単位球面 "$S^{m-1}$"の表記は, その点の $q_f$ で考えた逆像を示す.

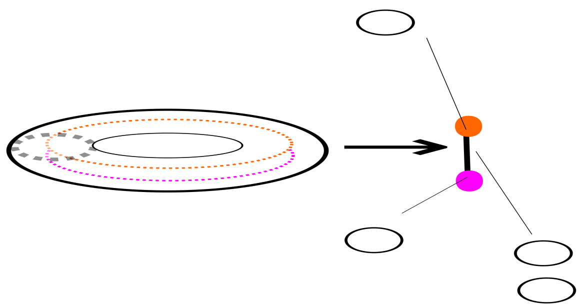

Figure 2: 3 次元の Euclid 空間 $\mathbb{R}^3$ に自然な形で埋め込まれたトーラスに対し自然な高さを考えて得られる Morse-Bott 関数と Reeb グラフ. グラフを指し示す線の先にある円周は, Figure 1 同様逆像を示す.

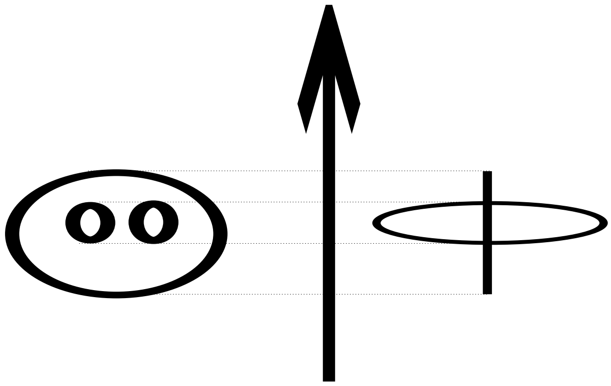

Figure 3: 与えられたグラフ(右)と閉曲面上の滑らかな関数(左).

なる. 時にはホモロジー群コホモロジー環等多様体の代数的な情報をある程度握る. [19, 22] 他著者の論文プレプリント, [3, 4, 5, 7, 8] 等に関連した話がある.

## 2. グラフの具体的な可微分関数の Reeb グラフとしての実現.

今後グラフが基本的で重要な位相的対象となる. グラフについて基本的な用語の説明等は省略する. 今回, 以下の問題を考える.

Problem **1.** 与えられたグラフを Reeb 空間とした性質の良い滑らかな関数を構成できるか ? ただし定義域の多様体を前もって詳細に指定するようなことはしない(次元を制限する等定義域多様体のクラス程度は制限する).

特に, 発表者が本質的に創始し既に多く結果を得ている, 以下の問題について紹介する.

Problem **2.** Problem 1 において, 正則値の逆像まで前もって指定して, 性質の良い滑らかな可微分関数を構成できるか? ただしこちらも定義域の多様体を前もって詳細に指定するようなことはしない.

これらの問題は, 基本的で自然で重要であるが, 一般には「具体的に(可微分)写像を構成することの難しさ」というものがあり難しい. この研究に至るまでの研究の歴史を紹介する.

- 特定の条件を満たすようなグラフと同型なグラフを Reeb グラフとするような, 閉曲面上の滑らかな関数の構成([23]). なお Sharko は Problem 1 のような問題の創始者である.
- 任意の有限でループを持たないグラフに対し, それと同型なグラフを Reeb グラフとするような, 閉曲面上の滑らかな関数を構成([13]).
- 適切な条件を満たすようなグラフについて, それと同型なグラフが Reeb グラフとなるように, Morse 関数で正則値の逆像が単位球面の非交和と微分同相になるようなものを構成([15]).

Figure 3 は, 右のグラフに対し, 左の方で表されているような滑らかな関数を得ていることを表す. これはいわゆる種数 2 の向き付け可能な閉曲面上の関数を示す. 今後このような次元 2 の閉多様体(閉曲面)が多く出てくるが, いわゆる穴の数を表す種数等基本的概念について, ある程度は既知とする. 一応書かせて頂くが, $S^2$ は種数が 0 でトーラスは種数が 1 である. この流れの中で, まず以下を得た.

**Main Theorem 1** ([6])**.** $G := (V, E)$ を有限で連結で辺 1 個以上を有するようなグラフとする($V$ を頂点集合 $E$ を辺集合とする). $g : G \to \mathbb{R}$ を連続関数で各辺 $e \in E$ 上で単射であるようなものとする. $l$ を, $E$ 上の非負の整数を値とするような関数とする. このとき, ある 3 次元向き付け可能連結閉多様体 $M$ とその上の滑らかな関数 $f : M \to \mathbb{R}$ があり以下を満たす.

1. Reeb グラフ $W_f$ が定まり $W_f$ と $G$ は同型(以降適切な同一視を定めて考える).
2. $a$ を辺 $e$ の内部の点とすると, ${q_f}^{-1}(a)$ は種数 $l(e)$ の向き付け可能な閉曲面.
3. $p$ が特異点のとき $q_f(p) \in V$, つまり $q_f(p)$ は $W_f = G$ の頂点で, $g(q_f(p)) = f(p)$.
4. $q_f(p) \in V$ が $g$ の極値を与えないような頂点であり $p$ が特異点のとき, $f$ は $p$ の周りで Morse 関数となる.
5. $q_f(p) \in V$ が $g$ の極値を与えるような頂点であり次数は 1 で, $e \ni v$ であるような辺 $e \in E$ について $l(e) = 0$ とする. $p$ が特異点のとき, $f$ は $p$ の周りで Morse 関数となる.
6. $p$ が直前の 2 パターンに当てはまらないような特異点のとき, $f$ は $p$ の周りで Morse 関数とはならない. しかしこのような特異点の周りでの $f$ について, 有限個のもの以外の周りでは, Mose-Bott 関数として表せる.

証明の概略を述べる. グラフの頂点のまわりでの局所的な関数を構成し, 残りの部分は射影を構成して最後に貼り合わせるという形で滑らかな関数を構成する. グラフの頂点の周りでの構成のみ簡単に紹介する.

まず, 極値を与えないような頂点の周りでは, Morse 関数の特異点と多様体のハンドルが対応しているという古くからの有名な事実を利用する. ハンドルとは, 単位球体の直積で表される(いわゆる角のある)多様体と微分同相な多様体で, 滑らかでコンパクトな次元 $m \geq 1$ の多様体は, 自然に $m$ 次元のハンドルたちを微分同相写像を用いて境界同士で貼り合わせていくことで得られることが知られている. まず局所的に, Reeb 空間がその頂点 $v$ とそれを含む辺全体の和集合として表される元のグラフの部分空間と同相で, 頂点の逆像のみ特異点を含んでいて(他の点の逆像は含んでおらず), 像が閉区間で, 特異値が丁度 1 個でさらに像の内部にあるような Morse 関数を得る.

極値を与える頂点のまわりについても説明する. まず頂点 $v$ の次数が 2 以上の時から説明する. まず頂点を含むような辺全体の集合を空でない 2 つの集合に分割する(空でない 2 つの集合ならば何でも良い). それぞれ値が特異値以下になるような部分, 特異値以上になるような部分となるようにまず局所的に, Reeb 空間が 1 個の頂点とそれを含む辺全体の和集合として表される元のグラフの部分空間と同相で, 頂点の逆像のみ特異点を含んでいて他の点の逆像は特異点を含んでいないような関数を得る. $v$ が極値を与えない時のように, Morse 関数として構成できる. 丁度 1 個ある特異値のところで最大または最小となるように, 像を閉区間とみなしその上の二次関数を使って平面に埋め込み, 最後に垂直方向への射影を合成する. 頂点 $v$ の次数が 1 の時についても簡単に触れる. 頂点を含む辺での $l$ の値が 0 のときは単位球体 $D^3$ の高さを考えて得られる Morse 関数, $D^3$ 上の $x \mapsto \pm||x||^2 + g(v)$ の形で定義される関数を考えれば良い. $l$ の値が正の整数であるときは少し説明が必要である.

詳細は原論文や発表させて頂く予定のポスターに譲る.

さて, Main Theorem 1 に関連し, [21] で以下が得られている.

**Theorem 2** ([21])**.** $m>1$ を整数とする. $G:=(V,E)$ を有限で連結で辺 1 個以上を有するようなグラフとする($V$ を頂点集合 $E$ を辺集合とする). $g:G\to\mathbb{R}$ を連続関数で各辺 $e\in E$ 上で単射であるようなものとする. $l$ を, $E$ 上の, 以下を満たすような写像とする.

- $l$ の値域は $m-1$ 次元の滑らかな連結閉多様体の微分同相型全体からなる集合である.
- 各頂点 $v\in V$ について, $L_v$ をそこでの $g$ の値が $g(v)$ 以下であるような $v$ を含む辺全体の集合, $U_v$ をそこでの $g$ の値が $g(v)$ 以上であるような $v$ を含む辺全体の集合とする. $L_v$ の各辺 $e$ について $l(e)$ に属するような滑らかな多様体をとりそれらの非交和 $F_{L,v}$ をとり, $U_v$ で同様に多様体 $F_{U,v}$ をとる. このときこれらの非交和 $F_{L,v}\sqcup F_{U,v}$ を境界とするような $m$ 次元の滑らかで連結なコンパクト多様体がある.

このとき, ある $m$ 次元連結閉多様体 $M$ とその上の滑らかな関数 $f:M\to\mathbb{R}$ があり以下を満たす.

1. Reeb グラフ $W_f$ が定まり $W_f$ と $G$ は同型(以降適切な同一視を定めて考える).
2. $a$ を辺 $e$ の内部の点とすると, ${q_f}^{-1}(a)$ は $l(e)$ に属する多様体と微分同相.
3. $p$ が特異点のとき $q_f(p)\in V$, つまり $q_f(p)$ は $W_f=G$ の頂点で, $g(q_f(p))=f(p)$.

Remark **1.** Theorem 2 について, 詳細は省略するが, $m-1$ 次元の滑らかな連結閉多様体の微分同相型, それらの非交和を境界とするような滑らかで連結なコンパクト多様体について, 向きを込め考えた場合, $M$ として向きが入ったものを得ることができる.

この結果は, 次元や逆像に出てくる多様体についてかなり一般的な状況を扱っている. 一方, 特異点がいかなる型のものか等については触れられていない. 滑らかであるが実解析的でない関数を用いてとにかく関数を構成するという形で結果が得られる. 次に, 今回扱っている研究とは独立に既に知られていた結果を紹介する. レンズ空間は 3 次元向き付け可能連結閉多様体の中でも, ある意味で球面や球面の直積の次に単純で, 基本的で重要なものである.

**Theorem 3** ([20])**.** 3 次元向き付け可能連結閉多様体 $M$ が, Morse 関数で Main Theorem 1 において $l$ の値が 0 か 1 である場合のものを有するとき, $M$ は 3 次元単位球面 $S^3$, $S^2\times S^1$ やレンズ空間またはそれの連結和として表される多様体と微分同相となる. 逆にそのような多様体 $M$ にはそのような Morse 関数がある.

最近得られたもうひとつの結果も. Main Theorem として紹介しておく.

**Main Theorem 2** ([10])**.** $G:=(V,E)$ を有限で連結で辺 1 個以上を有するようなグラフとする($V$ を頂点集合 $E$ を辺集合とする). $g:G\to\mathbb{R}$ を連続関数で各辺 $e\in E$ 上で単射であるようなものとする. $l$ を, $E$ 上の, 以下を満たすような写像とする.

- $l$ の値域は 3 次元の滑らかで向き付け可能な連結閉多様体の微分同相型全体からなる集合である.
- $v\in V$ を $g(v)$ が極値となるような頂点とする. このとき $v$ の次数は 1 で, $e\ni v$ である辺 $e\in E$ について $l(e)$ は $S^3$ の微分同相型.

このとき, 4 次元の連結な向き付け可能閉多様体 $M$ とその上の Morse 関数 $f : M \to \mathbb{R}$ があり以下を満たす.

1. Reeb グラフ $W_f$ が定まり $W_f$ と $G$ は同型(以降適切な同一視を定めて考える).
2. $a$ を辺 $e$ の内部の点とすると, ${q_f}^{-1}(a)$ は $l(e)$ に属するような多様体と微分同相.
3. $p$ が特異点のとき $q_f(p) \in V$, つまり $q_f(p)$ は $W_f = G$ の頂点で, $g(q_f(p)) = f(p)$.

証明には, 先述の Morse 関数の特異点とハンドルに関する理論, そして 3 次元多様体に固有の有名な理論を用いる(プレプリントはもう少し一般的な状況で議論している).

## 3. 補足.

今後の問題を挙げておく.

Problem **3.** Main Theorem 1, Main Theorem 2 を, 特異点ができる限り具体的に分かるような関数のクラスを考えるようにしてどこまで良くしていけるか ?

最近, [9], [11] で, 正則値の逆像が向き付け可能とは限らない閉曲面であるような場合のある意味である程度満足のいく結果を紹介させて頂いている. これらのプレプリントは随時修正中である.

Problem **4.** Theorem 3 のような, 特定の多様体の族を特徴づけるような結果は得られるか.

Theorem 3 の [20] は, 正則値の逆像の連結成分が常に位相的には球面であるものの単位球面と微分同相とは限らないような Morse 関数と, その定義域の多様体に関する論文でもある(というよりそのような関数の話がメインである). この状況ではある程度完全な結果は得られているといえる. 他の状況については, 例えば現時点では, Main Theorem 1, Main Theorem 2 の状況で Morse 関数のみ考えて, さらに, 向き付け可能な正則値の逆像の連結成分を球面かトーラスに制限し, 向き付け不可能な正則値の逆像の連結成分を種数が 1 か 2 であるようなもの, つまり実射影曲面か Klein bottle に制限する等をしないと難しいと思われる. 閉曲面は種数が上がるといろいろ複雑になる. 一般の閉多様体が出てくると遥かに難しい.

最後に, 現時点で案の段階で公表はできないという程度の進捗である, 以下を挙げる.

Problem **5.** グラフを与え, 値域が $\mathbb{R}$ で Reeb グラフがそれと同型であるような, 性質の良い滑らかな写像の構成を考えてきた. では, 次元 $n \geq 1$ の多面体(CW 複体)を与え, 値域を $\mathbb{R}^n$ として, 同様の問題を考え解けるか?

最後に, Reeb グラフや Reeb 空間は, 応用としてデータ解析や可視化等でも重要な道具であることにも触れておく. 尤も著者は, 関連したことについては現在学習, 調査中の身である. 一つ, 今回扱った問題は, 空間内にデータセットがあるとき, 射影するときにもとのデータを尊重するようにいくつか逆像を適合させ, さらに滑らかな多様体や関数や写像を適合させるときに活用できるかもしれないと浅学ながら夢見ている. データセットに多様体(主に曲面)を適合させる, いわゆる多様体学習等の世界に新たな布石となれば大変うれしく思う. Figure 4 は, 多様体学習に関し解説したある有名な HP の画像である.

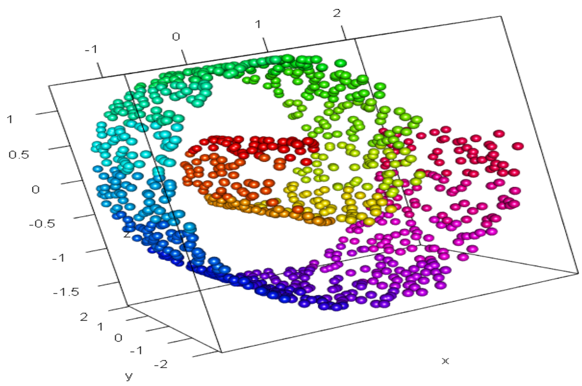


Figure 4: 多様体学習で 2 次元の曲面を適合させようとしているもの, いわゆる Swiss-roll と呼ばれる有名なデータセット(”https://blog.albert2005.co.jp/2014/12/11/高次元データの可視化の手法をswiss-rollを例に見てみよ/” より).

## 4. 謝辞.

本内容は 2021 年度科学研究費補助金基盤研究 (S)「研究代表者：佐伯 修(課題番号：17H06128)」の補助を受けたものである. また幾何学を中心に数学にも明るいデータ解析系の研究者の協力も得て, 高次元データの解析に, 著者の「良い可微分関数やその高次元にあたるものを駆使して多様体をみていく調べていくというスタイルの数学研究」を応用しようという目論みの下実施した, 共同研究のプロジェクト”九州大学マス・フォア・インダストリ研究所 2020 年度若手研究-短期共同研究”「代表者：北澤 直樹(課題番号：20200027)」(https://joint.imi.kyushu-u.ac.jp/research-reports/year-2021/) の援助も得ている. これらのプロジェクトの関係者の日々の支えに感謝申し上げたい.

最後に, 本稿に誤った記述や分かりにくい図や記述があれば, それは全て著者の至らなさによるものである. 誤りのご指摘やコメント等あれば是非ともして下されば幸いである.

## References

[1] R. Bott, *Nondegenerate critical manifolds*, Ann. of Math. 60 (1954), 248–261.

[2] M. Golubitsky and V. Guillemin, *Stable Mappings and Their Singularities*, Graduate Texts in Mathematics (14), Springer-Verlag (1974).

[3] N. Kitazawa, *On round fold maps* (in Japanese), RIMS Kokyuroku Bessatsu B38 (2013), 45–59.

[4] N. Kitazawa, *On manifolds admitting fold maps with singular value sets of concentric spheres*, Doctoral Dissertation, Tokyo Institute of Technology (2014).

[5] N. Kitazawa, *Fold maps with singular value sets of concentric spheres*, Hokkaido Mathematical Journal Vol.43, No.3 (2014), 327–359.

[6] N. Kitazawa, *On Reeb graphs induced from smooth functions on* 3*-dimensional closed orientable manifolds with finitely many singular values*, accepted for publication in Topol. Methods in Nonlinear Anal. after refereeing process, arxiv:1902.08841.

[7] N. Kitazawa, *Special generic maps and fold maps and information on triple Massey products of higher dimensional differentiable manifolds*, submitted to a refereed journal, arxiv:2006.08960.

[8] N. Kitazawa, *Closed manifolds admitting no special generic maps whose codimensions are negative and their cohomology rings*, submitted to a refereed journal, arxiv:2008.04226v4.

[9] N. Kitazawa, *On Reeb graphs induced from smooth functions on* 3*-dimensional closed manifolds which may not be orientable*, submitted to a refereed journal, arxiv:2108.01300.

[10] N. Kitazawa, *Realization problems of graphs as Reeb graphs of Morse functions with prescribed preimages*, submitted to a refereed journal, arXiv:2108.06913.

[11] N. Kitazawa, *Smooth functions with simple structures on* 3*-dimensional closed manifolds with prescribed Reeb graphs and preimages of regular values*, arxiv:2109.00221.

[12] M. Kobayashi and O. Saeki, *Simplifying stable mappings into the plane from a global viewpoint*, Trans. Amer. Math. Soc. 348 (1996), 2607–2636.

[13] Y. Masumoto and O. Saeki, *A smooth function on a manifold with given Reeb graph*, Kyushu J. Math. 65 (2011), 75–84.; doi: 10.2206/kyushujm.65.75.

[14] 松本 幸夫, Morse 理論の基礎, 岩波書店, 2005.

[15] L. P. Michalak, *Realization of a graph as the Reeb graph of a Morse function on a manifold*. Topol. Methods in Nonlinear Anal. 52 (2) (2018), 749–762, arxiv:1805.06727.; doi: 10.12775/TMNA.2018.029.

[16] J. Milnor, *Morse theory*, Ann. Math. Studies, Princeton Univ. Press,1963.

[17] J. Milnor, *Lectures on the h-cobordism theorem*, Math. Notes, Princeton Univ. Press, Princeton, N.J. 1965.

[18] G. Reeb, *Sur les points singuliers d´une forme de Pfaff complétement intègrable ou d´une fonction numérique*, Comptes Rendus Hebdomadaires des Séances de I´Académie des Sciences 222 (1946), 847–849.

[19] O. Saeki, *Topology of special generic maps of manifolds into Euclidean spaces*, Topology Appl. 49 (1993), 265–293.

[20] O. Saeki, *Morse functions with sphere fibers*, Hiroshima Math. J. Volume 36, Number 1 (2006), 141–170.

[21] O. Saeki, *Reeb spaces of smooth functions on manifolds*, International Mathematics Research Notices, maa301, https://doi.org/10.1093/imrn/maa301, arxiv:2006.01689.

[22] O. Saeki and K. Suzuoka, *Generic smooth maps with sphere fibers*, J. Math. Soc. Japan Volume 57, Number 3 (2005), 881–902.; doi: 10.2969/jmsj1158241939.

[23] V. Sharko, *About Kronrod-Reeb graph of a function on a manifold*, Methods of Functional Analysis and Topology 12 (2006), 389–396.

[24] M. Shiota, *Thom's conjecture on triangulations of maps*, Topology 39 (2000), 383–399. ; doi: 10.1016/S0040-9383(99)00022-1.