特性方向の重みを持つ非線形波動方程式の lifespan 評価 *

東北大学大学院理学研究科数学専攻 修士 2 年
北村駿介 (Shunsuke KITAMURA)

本発表は東北大学大学院理学研究科/数理科学連携研究センターの高村博之先生と、釧路工業高等専門学校・創造工学科一般教育部門の若狭恭平先生との共同研究の結果である。

1 導入

偏微分方程式論は個々の具体的な現象に応じて導出された方程式を詳細に解析するスタイルと、如何なる背景や導出過程にも左右されない強固な理論、いわゆる一般論を構築するスタイルがあり、それらは表裏一体で相互に作用しながら数学自身の発展のみならず、物理や工学の発展にも貢献してきた。今回の講演では一般論の構築を見据えたモデル方程式の解析の結果について述べる。まず初めに非線形項が未知関数 u とその偏微分によって構成されている場合を考察する。一次元の非線形波動方程式の初期値問題

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = H(u, u_x, u_t, u_{xx}, u_{xt}) & \text{in} \quad \mathbf{R} \times (0, \infty), \\ u(x,0) = \varepsilon f(x), \ u_t(x,0) = \varepsilon g(x), & x \in \mathbf{R}, \end{cases} \tag{1}$$

に対して、添え字は偏微分を表わすとし、既知関数 H, f, g は十分滑らかとする。今回は初期値の関数 f, g に台がコンパクトであるという仮定をし、初期値の大きさを決定する ε は十分小さな正定数とする。初期値問題 (1) の解の最大存在時間、いわゆる lifespan、を $\widetilde{T}(\varepsilon)$ という記号で下記のように定義する。

$$\widetilde{T}(\varepsilon) := \sup\{t > 0; \text{適当に固定した } (f, g) \text{ に対して } (1) \text{ の古典解 } u(x,t) \text{ が存在する }\}$$

lifespan について、$\widetilde{T}(\varepsilon) = \infty$ を満たすならば時間大域解を持つと言い、$\widetilde{T}(\varepsilon) < \infty$ を満たす、つまり有限時間で解 u が発散するならば時間局所解を持つと言う。

解析を行うには非線形項 H が一般的すぎるので、一般性を失わないように簡略化を行う。まず、ベクトル値関数 $U(x,t) = \big(u(x,t), u_x(x,t), u_t(x,t)\big)$ と定義し、微分作用素を $Dv := (v_x, v_t)$ と定義して $DU = \big(Du, Du_x, Du_t\big)$ すると、初期値問題 (1) は ∇ を勾配、$\cdot$ を内積として

$$U_{tt} - U_{xx} = \big(H(U, DU), \nabla H(U, DU) \cdot (U_x, DU_x), \nabla H(U, DU) \cdot (U_t, DU_t)\big)$$

と準線形波動方程式の連立方程式の形で記述することが出来る。よって非線形項 H を

$$H(u, u_x, u_t, u_{xx}, u_{xt}) = H_0(u, Du) + H_1(u, Du)u_{tx} + H_2(u, Du)u_{xx}$$

* この研究は日本学術振興会科学研究費補助金 基盤研究 (B) （課題番号：18H01132、研究代表者：高村博之）の助成を受けて行われたものである。

と定義して一般性を失わない。従って、微分階数が高い部分は評価が容易だから、H_0 の解析、つまり半線形項の解析が一般論では主体となる。以下では $H = H(u, Du)$ と仮定する。

また、解析を行う上で初期値に対して $(f, g) \equiv 0$ ならば $u \equiv 0$ が成り立たなければ解の一意性が崩れてしまうので、$H(0) = 0$ が成り立ってほしい。この条件は H をマクローリン展開したときに定数部分が 0 という条件と同値であり、高次の剰余項を R_{n+1} として展開すると次のようになる。

$$H(u, u_x, u_t) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!}(u\partial_{\lambda_0} + u_x\partial_{\lambda_1} + u_t\partial_{\lambda_2})^k H(\hat{\lambda})\Big|_{\hat{\lambda}=\hat{0}} + R_{n+1}$$

上記において $k = 1$ の項は線形より、この項を入れると波動方程式では無くなってしまう。従って、初期値問題 (1) は ε が十分小さいことから解 u も小さいので、線形項の主な部分は $k \geq 2$ の低次の項であると考えることができる。このような考察のもと、Li, Yu and Zhou[6] によって初期値問題 (1) に対して次のような解の存在が示されている。

定理 1.1　初期値問題 (1) が自然数 α を用いて $\hat{\lambda} = 0$ の近傍において $H(\hat{\lambda}) = O(|\hat{\lambda}|^{1+\alpha})$ を満たすとき、ある正定数 $\varepsilon_0 = \varepsilon_0(f, g, \alpha)$ が存在して、任意の $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$ を満たす ε に対して下記が成立する。

$$\widetilde{T}(\varepsilon) \geq \begin{cases} C\varepsilon^{-\alpha/2} & \text{in general case,} \\ C\varepsilon^{-\alpha(1+\alpha)/(2+\alpha)} & \text{if} \displaystyle\int_{\mathbf{R}} g(y)dy = 0, \\ C\varepsilon^{-\alpha} & \text{if} \quad \partial_u^\beta H(\hat{0}) = 0, \ (1+\alpha \leq \beta \leq 2\alpha) \end{cases}$$

ここで、$C > 0$ は ε に因らない定数である。

この定理 1.1 の H に対する原点近傍の条件はまさに考察から得られた非線形項の低次の項について条件付けをしている。また、定理 1.1 の場合分けは最初の 2 つは強 Huygens の原理により、$\displaystyle\int_{\mathbf{R}} g(y)dy = 0$ の場合は初期値の影響が空間次元が高次元の場合と同じようになることに起因し、最後の場合分けは非線形項に u の冪が低次で入るときは単純なエネルギー法によって解を構成できず、別の不等式を使う際に逐次近似の評価が悪くなることに起因する。

これら lifespan の下からの評価に対して最適な評価であることを示すには、特別な初期値と非線形項を用いて同じ ε のオーダーを持った量によって lifespan が上から評価されることを示せば良い。特に最適性は、滑らかさを犠牲にして詳細な解析が可能になる $H = |u|^p$ や $H = |u_t|^p$ $(p > 1)$ と定義したモデル方程式によって示される。定理 1.1 の最初の 2 つの場合は Zhou[8] により非線形項を $H = |u|^{1+\alpha}$ と、最後の場合に対しては Zhou[9] により非線形項を $H = |u|^\beta |u_t|^{1+\alpha-\beta}$ と置くことによって最適性が示されている。注意として、これらのモデル方程式による最適性で空間一次元の一般の場合の解析が網羅されたわけでは無い。モデル方程式の結果を一般の場合に適用するには、非線形項の冪が偶数の場合はそのままで良いが、奇数の場合は解 u に正値性などが必要になる。そもそも一般の場合の場合分けが上記 3 つで十分であるかどうかはまだ分かっていないので、あるモデル方程式の結果が定理 1.1 の分類に含まれないならば、一般論のより細かい場合分けが必要であることの可能性を示したことになる。

従って、モデル方程式の解析は一般の場合の解の存在性を議論する上で最適性を保証するものでありながら、モデル方程式の lifespan 評価を行うことによって一般の場合も解析できる場合もある上、

モデル方程式の lifespan 評価から非線形項が一般の場合の最適な lifespan 評価を予想することができる。つまり、モデル方程式の解析と一般論の構築は表裏一体の関係にあると言える。

以下ではモデル方程式に対して解析を行う。物理学などからの要請により、非線形項に対して時空の変数 (x,t) を含む場合を考察するため、重み関数 $F=F(x,t)$ を非線形項に持たせる。加えて、定理 1.1 とその最適性から、非線形項に u が低次で含まれているときに lifespan は小さくなるので、一般の場合を考察するモデル方程式として $H=|u|^p$ に対して解析を行う。

2 準備

一次元空間上の実数値未知関数 $u=u(x,t)$ に対して、非線形項に時空の変数の重みを持つ非線形波動方程式の初期値問題

$$\begin{cases} u_{tt}-u_{xx}=F(x,t)|u|^p & \text{in} \quad \mathbf{R}\times(0,\infty), \\ u(x,0)=\varepsilon f(x),\ u_t(x,0)=\varepsilon g(x), & x\in\mathbf{R}, \end{cases} \tag{2}$$

を考える。ここで $p>1$ かつ、初期値について $f\in C_0^2(\mathbf{R})$ かつ $g\in C_0^1(\mathbf{R})$ かつ $0<\varepsilon\ll 1$ とする。加えて重み F に対しては十分滑らかであると仮定する。これらの仮定の下では、Duhamel の原理により、次の積分方程式と同値になる。

$$u(x,t)=\varepsilon u^0(x,t)+L(|u|^p)(x,t) \tag{3}$$

ここで、積分方程式の線形な部分は

$$u^0(x,t):=\frac{1}{2}\{f(x+t)+f(x-t)\}+\frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t}g(y)dy,$$

Duhamel の項は

$$L(v)(x,t):=\frac{1}{2}\int_0^t ds\int_{x-t+s}^{x+t-s}F(y,s)v(y,s)dy \quad \text{for} \quad v\in C(\mathbf{R}\times[0,\infty))$$

によって定義される。積分方程式 (3) より両辺を微分することで連続な解 u は古典解となる。したがって、時刻 $T>0$ までの古典解 $u\in C^2(\mathbf{R}\times[0,T])$ を考え、lifespan を $T(\varepsilon)$ という記号で下記のように定義する。

$$T(\varepsilon):=\sup\{T>0; \text{適当に固定した } (f,g) \text{ に対して古典解 } u(x,t) \text{ が } 0\le t\le T \text{ で存在する}\}$$

ここで、$f\equiv g\equiv 0$ のとき、解の一意性より (2) の古典解は $u\equiv 0$ となり $T(\varepsilon)=\infty$ を満たす。従って、時間局所解を持つ (2) に対して $\lim_{\varepsilon\to 0}T(\varepsilon)=\infty$ が成り立つことが予想できる。既に 1980 年に Kato[4] によって $F\equiv 1$ の場合は (2) は任意の $p>1$ に対して時間局所解を持つ、つまり有限時間において解が爆発することが示されており、$\varepsilon\to 0$ のときの $T(\varepsilon)$ の増大度を調べることによって重みの影響を考察することが出来る。本研究の目的は特性方向の重みを持つ非線形波動方程式の lifespan 評価を行うことによって重みが解に与える影響を考察することにある。先に主結果を述べ、先行研究と比較する。

3 主結果

$\langle x\rangle := \sqrt{1+x^2}$ と記号を定義する。(2) について、$a,b\in\mathbf{R}$ によってパラメータ付けされた特性方向の重み $F(x,t)=\langle t+\langle x\rangle\rangle^{-1-a}\langle t-\langle x\rangle\rangle^{-1-b}$ を持つ一次元半線形波動方程式

$$\begin{cases} u_{tt}-u_{xx}=\dfrac{|u|^p}{\langle t+\langle x\rangle\rangle^{1+a}\langle t-\langle x\rangle\rangle^{1+b}} & \text{in } \mathbf{R}\times(0,\infty), \\ u(x,0)=\varepsilon f(x), \quad u_t(x,0)=\varepsilon g(x), & x\in\mathbf{R}, \end{cases} \tag{4}$$

の古典解の lifespan について、我々は下記の結果を得た。

定理 3.1 $a>0$ かつ $a+b>0$ ならば、ある正定数 $\varepsilon_1=\varepsilon_1(a,b,f,g,p)$ が存在して、任意の $0<\varepsilon\le\varepsilon_1$ を満たす ε に対して $T(\varepsilon)=\infty$ が成立する。(図 1 及び図 2)

定理 3.2 $\displaystyle\int_{\mathbf{R}} g(y)dy\neq 0$ ならば、ある正定数 $\varepsilon_2=\varepsilon_2(a,b,f,g,p)$ が存在して、任意の $0<\varepsilon\le\varepsilon_2$ を満たす ε に対して下記が成立する。(図 1)

$$T(\varepsilon)\sim\begin{cases} \exp(C\varepsilon^{-(p-1)}) & \text{if} \quad a+b=0 \text{ and } a>0, \text{ or } a=0 \text{ and } b>0, \\ \exp(C\varepsilon^{-(p-1)/2}) & \text{if} \quad a=b=0, \\ C\varepsilon^{-(p-1)/(-a)} & \text{if} \quad a<0 \text{ and } b>0, \\ \phi_1^{-1}(C\varepsilon^{-(p-1)}) & \text{if} \quad a<0 \text{ and } b=0, \\ C\varepsilon^{-(p-1)/(-a-b)} & \text{if} \quad a+b<0 \text{ and } b<0, \end{cases}$$

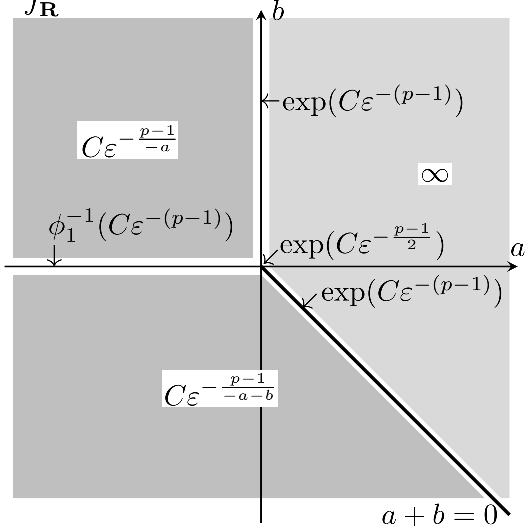
ここで、C は ε に因らない正定数であり、ϕ_1^{-1} は $\phi_1(s)=s^{-a}\log(2+s)$ で定義される関数の逆関数である。また、$T(\varepsilon)\sim A(\varepsilon,C)$ なる記号は、C_1 と C_2 という ε に無関係な正定数が存在して、不等式 $A(\varepsilon,C_1)\le T(\varepsilon)\le A(\varepsilon,C_2)$ を満たすことを表す。

定理 3.3 $\displaystyle\int_{\mathbf{R}} g(y)dy=0$ ならば、ある正定数 $\varepsilon_3=\varepsilon_3(a,b,f,g,p)$ が存在して、任意の $0<\varepsilon\le\varepsilon_3$ を満たす ε に対して下記が成立する。(図 2)

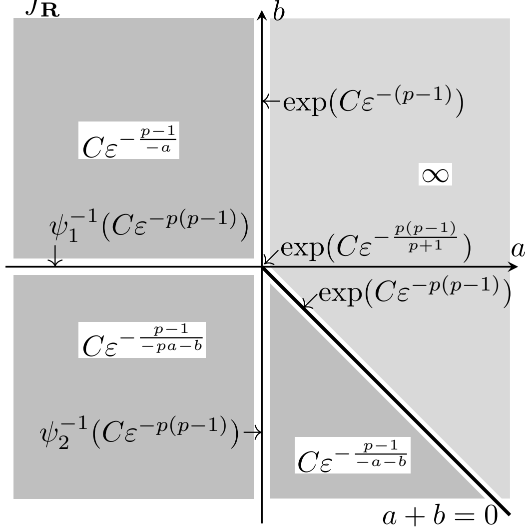
$$T(\varepsilon)\sim\begin{cases} \exp(C\varepsilon^{-(p-1)}) & \text{if} \quad a=0 \text{ and } b>0, \\ \exp(C\varepsilon^{-p(p-1)}) & \text{if} \quad a+b=0 \text{ and } a>0, \\ \exp(C\varepsilon^{-p(p-1)/(p+1)}) & \text{if} \quad a=b=0, \\ C\varepsilon^{-(p-1)/(-a)} & \text{if} \quad a<0 \text{ and } b>0, \\ \psi_1^{-1}(C\varepsilon^{-p(p-1)}) & \text{if} \quad a<0 \text{ and } b=0, \\ C\varepsilon^{-p(p-1)/(-pa-b)} & \text{if} \quad a<0 \text{ and } b<0, \\ \psi_2^{-1}(C\varepsilon^{-p(p-1)}) & \text{if} \quad a=0 \text{ and } b<0, \\ C\varepsilon^{-p(p-1)/(-a-b)} & \text{if} \quad a+b<0 \text{ and } a>0, \end{cases}$$

ここで、C は ε に因らない正定数であり、ψ_1^{-1} と ψ_2^{-1} はそれぞれ $\psi_1(s)=s^{-pa}\log(2+s)$ と $\psi_2(s)=s^{-b}\log^{p-1}(2+s)$ で定義される関数の逆関数である。$\sim$ の意味は定理 2 と同じ。

$\int_{\mathbf{R}} g(y)dy \neq 0$ (図 1)



$\int_{\mathbf{R}} g(y)dy = 0$ (図 2)



4 先行研究

先行研究による既知の結果と主結果を比較する。初期値問題 (2) について $F \equiv 1$ の場合、つまり重みが無い場合において、Zhou[8] により lifespan の最適な評価が得られている。主結果の記号を用いて下記のように書ける。

$$\begin{cases} T(\varepsilon) \sim C\varepsilon^{-(p-1)/2} & \text{if } \displaystyle\int_{\mathbf{R}} g(y)dy \neq 0, \\ T(\varepsilon) \sim C\varepsilon^{-p(p-1)/(p+1)} & \text{if } \displaystyle\int_{\mathbf{R}} g(y)dy = 0. \end{cases}$$

これは主結果の $a = b = -1$ の場合と一致している。

また、$F = (1+t)^{-(p-1)}$ の場合はいくつか先行研究がある。なぜなら

$$v_{tt} - v_{xx} + \frac{2}{1+t} v_t = |v|^p \tag{5}$$

という形のいわゆるスケール不変な消散項を持つ半線形波動方程式に対して、$u(x,t) = (1+t)v(x,t)$ という Liouville 変換によって $F = (1+t)^{-(p-1)}$ の重みを持つ非線形波動方程式が得られるからである。この重みの初期値問題に対して、Wakasugi[7] によって $1 < p \leq 3$ のとき $T(\varepsilon) < \infty$ であることを示した。また、D'Abbicco[1] によって $p > 3$ のときに $T(\varepsilon) = \infty$ であることを示した。注意すべき点はこれらはエネルギー解、つまり古典解ほどは滑らかではない解に対しての評価であることである。そして、Kato, Takamura and Wakasa[3] による $1 < p \leq 3$ の場合の古典解の lifespan 評価および時間大域解が得られたが、それらは主結果において $a = p - 2$ かつ $b = -1$ と固定したときの lifespan 評価と一致している。この事実は、(4) の重みについては初期値の台のコンパクト性から導かれる有限伝播性より $\langle t + \langle x \rangle \rangle$ が $1 + t$ と同値であることによって、主結果が時間変数のみの重みを持つ場合の一般化を含んでいることから自明に分かる。また、臨界指数が一次元の藤田指数と一致することから (5) は熱的と考えることもできるが、初期値の積分量によって lifespan が変わるという波動的な要素があり、むしろ時間変数の減衰によって Strauss 指数がずれたと考えるべきである。

これら $\langle t+\langle x\rangle\rangle$ と $1+t$ の同値性とは対照的に $\langle t-\langle x\rangle\rangle$ と $\langle x\rangle$ は原点付近で同値ではない。関連性を考察するために同じパラメータ $b\in\mathbf{R}$ を設定し、$F=\langle x\rangle^{-1-b}$ という空間変数のみの重みを持つ場合には Kitamura, Morisawa and Takamura[5] による次の結果が得られている。

$$T(\varepsilon)\sim\begin{cases} C\varepsilon^{-(p-1)} & \text{for } b>0,\\ \phi^{-1}(C\varepsilon^{-(p-1)}) & \text{for } b=0,\\ C\varepsilon^{-(p-1)/(1-b)} & \text{for } b<0 \end{cases}\qquad \text{if} \int_{\mathbf{R}} g(x)dx\neq 0,\quad \Big(\phi(s):=s\log(2+s)\Big) \tag{6}$$

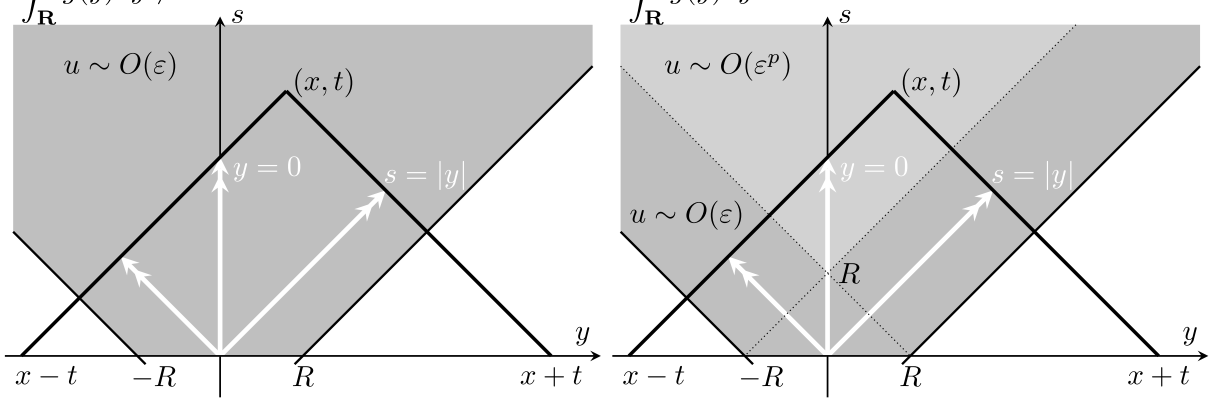
and

$$T(\varepsilon)\sim\begin{cases} C\varepsilon^{-p(p-1)} & \text{for } b>0,\\ \psi_p^{-1}(C\varepsilon^{-p(p-1)}) & \text{for } b=0,\\ C\varepsilon^{-p(p-1)/(1-pb)} & \text{for } b<0 \end{cases}\qquad \text{if} \int_{\mathbf{R}} g(x)dx=0,\quad \Big(\psi_p(s):=s\log^{p-1}(2+s)\Big) \tag{7}$$

上記と $a=-1$ に固定した主結果の lifespan 評価を比べると、$\displaystyle\int_{\mathbf{R}} g(x)dx\neq 0$ の場合は重みが減衰を表わす場合も増大を表わす場合も lifespan 評価は一致している。しかしながら、$\displaystyle\int_{\mathbf{R}} g(x)dx=0$ の場合は、重みが減衰、つまり $b>-1$ のときは $\langle x\rangle$ 減衰の方が lifespan は長くなり、重みが増大、つまり $b<-1$ のときは $\langle t-\langle x\rangle\rangle$ 増大の方が lifespan は長くなることが分かる。これら $\langle t-\langle x\rangle\rangle$ 重みと $\langle x\rangle$ 重みの lifespan 評価の大きさの違いは次のように説明することが出来る。

初期値問題の解の存在も解の爆発も、線形積分作用素 L による各点評価の iteration method によって証明される。解の有限伝播性より、$\mathrm{supp}\{f,g\}\subset\{|x|\leq R\}$ を満たすように $R(>1)$ を取ると解 u は supp $u\ \subset\{|x|\leq t+R\}$ を満たす。従って L の積分領域は頂点 (x,t) の三角形領域のうち、次の図のように色塗りされた部分になる。

$\displaystyle\int_{\mathbf{R}} g(y)dy\neq 0$ の場合　　　　$\displaystyle\int_{\mathbf{R}} g(y)dy=0$ の場合



ここで、頂点 (x,t) が $t-|x|\geq R$ を満たすとき、積分方程式の線形な部分 u^0 は

$$u^0(x,t)=\frac{1}{2}\{f(x+t)+f(x-t)\}+\frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} g(y)dy=\frac{1}{2}\int_{\mathbf{R}} g(y)dy$$

が成立するので、積分方程式 (3) より、

$$\int_{\mathbf{R}} g(y)dy\neq 0\Rightarrow u(x,t)=O(\varepsilon)\qquad \text{as } \varepsilon\to 0\quad \text{for } (x,t)\in\{(y,s)\,:\,s-|y|\geq R\}$$
$$\int_{\mathbf{R}} g(y)dy=0\Rightarrow u(x,t)=O(\varepsilon^p)\qquad \text{as } \varepsilon\to 0\quad \text{for } (x,t)\in\{(y,s)\,:\,s-|y|\geq R\}$$

となる。また、重みが減衰するときは、$\langle x\rangle$ は $y=0$ の近傍で、$\langle t-\langle x\rangle\rangle$ は $s=|y|$ の近傍で減衰が無くなるので lifespan を決定する各点評価が悪くなり、重みが増大するときは、$\langle x\rangle$ は $s=|y|$ の近傍で、$\langle t-\langle x\rangle\rangle$ は $y=0$ の近傍で lifespan を決定する各点評価が悪くなる。従って、$\displaystyle\int_{\mathbf{R}} g(y)dy\neq 0$ ならば $\langle x\rangle$ 重みも $\langle t-\langle x\rangle\rangle$ 重みも各点評価が悪くなる領域の解のオーダーが同じ $O(\varepsilon)$ なので lifespan 評価が同じになるが、$\displaystyle\int_{\mathbf{R}} g(y)dy=0$ ならば $y=0$ の原点付近以外の近傍では解のオーダーが $O(\varepsilon^p)$ と良くなるため、重みが減衰なら $\langle x\rangle$ 減衰の、重みが増大なら $\langle t-\langle x\rangle\rangle$ 増大の lifespan が長くなるということが分かる。

上記のような解 u のオーダーと重みの各点評価が悪くなる領域を考察することによって、定数 $C>0$ を用いて重みが $\langle t-C\langle x\rangle\rangle$ によって構成されている場合の lifespan 評価を予想することができる。つまり、$C>1$ の場合は $s=C|y|$ が $u\sim O(\varepsilon^p)$ となる領域に突入するので $\langle t-C\langle x\rangle\rangle$ 減衰は $\langle x\rangle$ 減衰と lifespan 評価が同じになり、$\langle t-C\langle x\rangle\rangle$ 増大は $s=|y|$ の近傍で各点評価が悪くなるので $\langle x\rangle$ 増大と lifespan 評価が同じになると予想できる。また、$0<C<1$ の場合は $s=C|y|$ が積分領域から逸脱するので $\langle t-C\langle x\rangle\rangle$ 減衰は $1+t$ 減衰と lifespan 評価が同じになり、$\langle t-C\langle x\rangle\rangle$ 増大は $s=|y|$ の近傍で各点評価が悪くなるので $\langle x\rangle$ 増大と lifespan 評価が同じになると予想できる。

5　主結果の証明方法

証明は、lifespan の下からの評価（長時間存在）も上からの評価（有限時間爆発）も、この分野では標準的な各点評価の逐次代入による。しかしながら、その中では、先行研究には見られなかった二つの特性方向の相互作用が現れており、特に、$a>0$ かつ $a+b=0$ の場合に、解の下からの最適な評価を得る際の困難さが顕著である。その部分は、Agemi, Kurokawa and Takamura[2] による "slicing method" が有効に働く。講演では、そこを重点的に紹介する予定である。

参考文献

[1] M. D'Abbicco, *The threshold of effective damping for semilinear wave equations*, Math. Methods Appl. Sci., **38** (2015), 1032-1045.

[2] R. Agemi, Y. Kurokawa and H. Takamura, *Critical curve for p-q systems of nonlinear wave equations in three space dimensions*, J. Differential Equations **167** (2000), no. 1, 87–133.

[3] M. Kato, H. Takamura and K. Wakasa, *The lifespan of solutions of semilinear wave equations with the scale-invariant damping in one space dimension*, Differential Integral Equations **32** (2019), no. 11-12, 659-678.

[4] T. Kato, *Blow up of solutions of some nonlinear hyperbolic equations*, Comm. Pure Appl. Math, **33** (1980), 501-505.

[5] S. Kitamura, K. Morisawa and H. Takamura, *The lifespan of classical solutions of semilinear wave equations with spatial weights and compactly supported data in one space dimension*, J. Differential Equations **307** (2022), 486-516.

[6] T.-T. Li, X. Yu, and Y.Zhou, *Life-span of classical solutions to one-dimensional nonlinear

wave equations, Chinese Ann. Math. Ser. B **13** (1992) no. 3, 266-279. A Chinese summary appears in Chinese Ann. Math. Ser. A **13** (1992), no. 4, 516.

[7] Y. Wakasugi, *Blow-up of solutions to the one-dimensional semilinear wave equation with damping depending on time and space variables*, Discrete and Continuous Dynamical Systems, **34** (2014), no. 9, 3831-3846.

[8] Y. Zhou, *Life span of classical solutions to* $u_{tt} - u_{xx} = |u|^{1+\alpha}$, Chinese Ann. Math. Ser. B **13** (1992) no. 2, 230-243. A Chinese summary appears in Chinese Ann. Math. Ser. A **13** (1992), no. 2, 280.

[9] Y.Zhou, *Blow up of solutions to the Cauchy problem for nonlinear wave equations*, Chinese Ann. Math. Ser. B **22** (2001), 275-280.