Existence and nonexistence of global solutions for nonlinear heat equations on a bounded domain

早稲田大学大学院 先進理工学研究科 物理学及応用物理学専攻
喜多 航佑 (Kosuke KITA)

概要

全空間における非線形熱方程式 (藤田方程式) では，方程式の非線形項の冪と藤田指数と呼ばれる空間次元によって定まる数の大小によって初期値問題の正値解の挙動が大きく異なることが知られている．ここでは，有界領域における初期値境界値問題の正値時間大域解の存在・非存在が，前述の藤田方程式の様に非線形項の冪ではなく，境界条件によって特徴付けられることについて考察する．

1 導入

本稿では主に次の放物型方程式について考察する．

$$\begin{cases} \partial_t u - \Delta u = |u|^{p-2}u, & t>0,\ x\in\Omega, \\ (\text{境界条件}), & t>0,\ x\in\partial\Omega, \\ u(0,x)=u_0(x), & x\in\Omega. \end{cases} \tag{1.1}$$

ここで，Ω は滑らかな境界 $\partial\Omega$ を持つ $\mathbb{R}^N$ の有界領域，或いは全空間 $\Omega=\mathbb{R}^N$ とする．但し，$\Omega=\mathbb{R}^N$ (藤田方程式) の場合は境界条件は考えないものとする．本稿を通して非線形項は優線形，即ち $p>2$ とし，初期値は常に $u_0\geq 0$ かつ $u_0\not\equiv 0$ とする．ここでは先ず，方程式 (1.1) について良く知られた事実を簡単に纏める．尚，本節では解のクラスについては適当に滑らかなものを考える．下記の内容及びその詳細については，[4, 5, 7, 13, 14, 15] 等を参照．

全空間における (1.1) はナビエ・ストークス方程式の研究の為に藤田宏先生によって考案された問題であるが，一様な混合気体の燃焼理論により導出されるモデル方程式でもあり，様々な文脈で現れることが知られている．この方程式の正値解の構造は，非線形項の指数 p によって変わることが [5] によって示された．

定理 1.1 (藤田 [5])**.** $p_F=2+\frac{2}{N}$ とする．方程式 (1.1) の正値解について，次が成り立つ．

(i) $2<p<p_F$ ならば，全ての解は有限時間で爆発する．

(ii) $p_F<p$ ならば，ある初期値に対して解は時間大域的に存在する．

この p_F を藤田指数と呼ぶ．藤田指数は，方程式 (1.1) において拡散項が無い (空間一様な) 常微分方程式の解の爆発のレートと反応項が無い線形熱方程式の解の L^∞ ノルムの減衰のレートが釣り合う指数として形式的に理解できる．尚，ちょうど臨界 $(p=p_F)$ の場合は定理 1.1 の (i) と同様に正

値解は爆発することが分かっている．符号変化解を許すと正と負の部分の相互作用により，解の爆発を抑制する可能性が生じ正値解の場合とは同様とならない場合が起こり得る．空間 1 次元 ($N = 1$) の場合については [11, 12] を参照.

領域 Ω が有界の場合は，代表的な境界条件として以下のものが考えられる．

$$u = 0, \qquad t > 0,\ x \in \partial\Omega, \quad (\text{斉次ディリクレ境界条件}), \tag{1.2}$$

$$\partial_\nu u = 0, \qquad t > 0,\ x \in \partial\Omega, \quad (\text{斉次ノイマン境界条件}). \tag{1.3}$$

ここで，ν は $\partial\Omega$ の外向き単位法線ベクトルであり，∂_ν は法線微分を表す．斉次ディリクレ境界条件と斉次ノイマン境界条件は，それぞれ吸収壁境界条件・反射壁境界条件とも呼ばれている．斉次ディリクレ境界条件下での (1.1) は適当に小さな初期値に対して時間大域解が存在することが知られている．一方で斉次ノイマン境界条件下においては (1.1) の任意の正値解は有限時間で爆発する (cf. [13])．全空間の藤田方程式と異なり，有界領域における非線形熱方程式の解の挙動に対しては，非線形項の指数よりも寧ろ，境界条件が重要な役割を担っていると考えられる．

上記のことから，有界領域における非線形熱方程式に対して全空間の藤田方程式に対する藤田臨界指数の結果に対応する臨界現象を明らかにするには，ある意味で斉次ディリクレ境界条件と斉次ノイマン境界条件の “間” となるような境界条件を考えるのが自然であると考えた．ここで最も単純な斉次ディリクレ境界条件と斉次ノイマン境界条件を繋ぐ境界条件として次のロバン境界条件が知られている．

$$\partial_\nu u + \lambda u = 0, \qquad t > 0,\ x \in \partial\Omega, \quad (\text{ロバン境界条件}). \tag{1.4}$$

ここで $\lambda > 0$ は正定数である．このロバン境界条件は境界における熱放射が線形であることを表している．形式的には $\lambda \to 0$ で斉次ノイマン境界条件，$\lambda \to +\infty$ で斉次ディリクレ境界条件と見做すことが出来る．ところが如何なる小さな $\lambda > 0$ に対しても，十分小さな初期値の下で (1.4) 下での (1.1) の解は時間大域的に存在する事が示される．即ち，この意味でロバン境界条件はディリクレ境界条件に近いという事が分かる．以上より，有界領域における (1.1) の時間大域な正値解の存在・非存在に関する臨界現象はロバン境界条件では見出すことが出来ない．(或いは斉次ノイマン境界条件がちょうど臨界の場合と捉えざるを得ない．)

本稿ではロバン境界条件とは異なる観点から有界領域における非線形熱方程式の臨界現象について考察する．結果を述べる前に，非線形境界条件の枠組みで問題を定式化する．先ず，極大単調作用素と劣微分作用素について簡単に説明する．詳しくは [1, 2] などを参照．内積 $(\cdot,\cdot)_H$ を持つヒルベルト空間 H 上の多価作用素 $A : H \to 2^H$ を考える．作用素 A の定義域を $D(A) := \{x \in H\,;\, Ax \neq \emptyset\}$ とする．このとき，そのグラフ $G(A) := \{(x, y) \in G(A)\,;\, x \in D(A), y \in Ax\}$ が

$$(x_1 - x_2, \xi_1 - \xi_2)_H \geq 0, \qquad \forall(x_1, \xi_1), \forall(x_2, \xi_2) \in G(A)$$

を満たすとき，作用素 A が単調 (monotone) であるという．さらに，単調作用素 A が如何なる単調拡張も持たないとき (単調作用素としての拡張が自分自身のみの場合)，A は極大単調 (maximal monotone) 作用素という．次に，$\Phi(H)$ で H 上の適正凸下半連続汎函数 $\phi : H \to (-\infty, +\infty]$ 全体の集合とする．ここで ϕ が適正とは ϕ の有効領域 $D(\phi) := \{u \in H\,;\, \phi(u) < +\infty\}$ が空でないこと

をいう．このとき，$\phi \in \Phi(H)$ と各 $u \in D(\phi)$ に対して，ϕ の u での劣微分 $\partial\phi(u)$ を

$$\partial\phi(u) = \{f \in H\,;\, \phi(v) - \phi(u) \geq (f, v-u)_H, \quad \forall v \in D(\phi)\}$$

と定める．また，$\partial\phi : H \to 2^H$ を定義域を $D(\partial\phi) := \{u \in D(\phi)\,;\, \partial\phi(u) \neq \emptyset\}$ とする多価作用素とし，これを劣微分作用素と呼ぶ．一般に劣微分作用素は極大単調作用素となることが知られている．

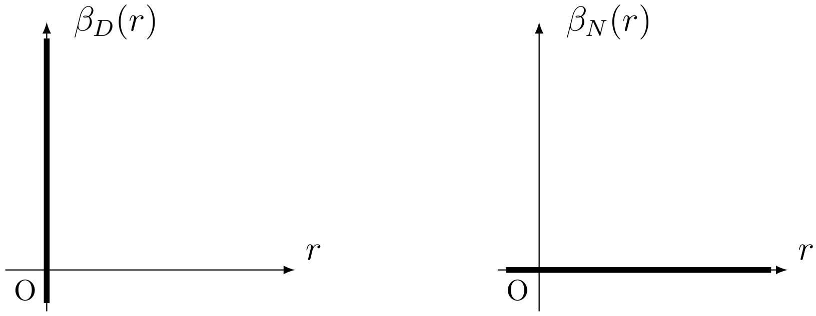
有界領域における (1.1) を改めて次のように書き直す．

$$\begin{cases} \partial_t u - \Delta u = |u|^{p-2}u, & t > 0,\ x \in \Omega, \\ -\partial_\nu u \in \beta(u), & t > 0,\ x \in \partial\Omega, \\ u(0,x) = u_0(x), & x \in \Omega. \end{cases} \tag{P}$$

ここで，β は $\beta(0) \ni 0$ を満たす $\mathbb{R}$ 上の極大単調作用素であり，ある適正凸下半連続函数 $j : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ の劣微分を用いて $\beta = \partial j$ と書ける．一般には β は多価作用素であることに注意．当然，$\beta(r) = 0$ 或いは $\beta(r) = \lambda r$ とすれば (P) の境界条件はそれぞれ斉次ノイマン境界条件 (1.3)，ロバン境界条件 (1.4) となる．(以下，$\beta_N(r) = 0$ とする．) また，

$$\beta_D(r) := \begin{cases} \mathbb{R}, & r = 0, \\ \emptyset, & r \neq 0, \end{cases}$$

とおけば，$\beta = \beta_D$ のとき (P) は斉次ディリクレ境界条件に対応する．



本稿では，$\beta = \beta_D$ のときの (P) を $(\mathrm{P})_D$ ，$\beta = \beta_N$ のときの (P) を $(\mathrm{P})_N$ と表すことにする．また，有界領域における (P) の解の挙動に関する上記の事実を踏まえて，次の言葉を導入する．

定義 1.2. 方程式 (P) の解の極大存在時間を T_m と表す．

(i) 方程式 (P) が *D-type* $\iff$ $\exists u_0 \in L^\infty_+(\Omega);\quad T_m = +\infty.$

(ii) 方程式 (P) が *N-type* $\iff$ $\forall u_0 \in L^\infty_+(\Omega),\quad T_m < +\infty.$

但し，$L^\infty_+(\Omega) = \{v \in L^\infty(\Omega)\,;\, v \geq 0, v \not\equiv 0\}$ である．

明らかに $(\mathrm{P})_D$ は D-type であり，$(\mathrm{P})_N$ は N-type である．

注意 1.3. 方程式 (P) は $u_0 \in L^\infty_+$ に対して，次のクラスの非負の一意局所解を持つ事が非線形発展方程式の抽象論の応用から示される．証明については [9, 10] を参照．

$$u \in C([0,T]; L^2(\Omega)) \cap L^\infty(0,T; L^\infty(\Omega)), \quad \partial_t u, \Delta u \in L^2(0,T; L^2(\Omega)).$$

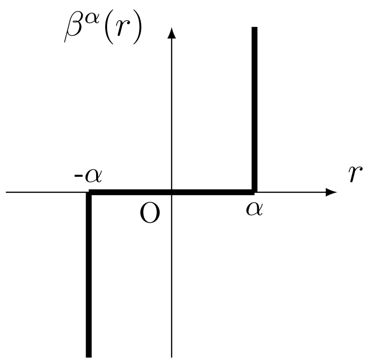
2　主結果

再度，問題と設定を明らかにしておく．本節以下では次の問題を考察する．

$$\begin{cases} \partial_t u - \Delta u = |u|^{p-2}u, & t>0,\ x\in\Omega, \\ -\partial_\nu u \in \beta^\alpha(u), & t>0,\ x\in\partial\Omega, \\ u(0,x)=u_0(x), & x\in\Omega. \end{cases} \tag{(P)$_\alpha$}$$

ここで，$\Omega\subset\mathbb{R}^N$ は滑らかな境界 $\partial\Omega$ を持つ有界領域とし，ν でその外向き単位法線ベクトルを表すものとする．さらに，β^α は $\alpha>0$ をパラメーターとする以下で定義される極大単調グラフとする．

$$\beta^\alpha(r)=\begin{cases} (-\infty,0], & r=-\alpha, \\ 0, & |r|<\alpha \\ [0,+\infty), & r=\alpha, \\ \emptyset, & |r|>\alpha. \end{cases}$$



ここで，$\alpha\to 0$ で $\beta^\alpha\to\beta_D$，$\alpha\to+\infty$ で $\beta^\alpha\to\beta_N$ となることに注意．即ち，$\alpha=0$ で $(\mathrm{P})_\alpha$ は $(\mathrm{P})_D$，$\alpha=+\infty$ で $(\mathrm{P})_\alpha$ は $(\mathrm{P})_N$ と見做せる．主結果は以下の通りである．

定理 2.1. ある $\alpha_c\in(0,+\infty)$ が存在して，次が成り立つ．

(i) $\alpha<\alpha_c$ ならば $(\mathrm{P})_\alpha$ は *D-type.*

(ii) $\alpha>\alpha_c$ ならば $(\mathrm{P})_\alpha$ は *N-type.*

3　証明の概略

主定理の証明には非線形境界条件を伴う放物型方程式に対する比較定理を用いる．(第 15 回数学総合若手研究集会のテクニカルレポート [8] や [10] を参照．) 以下にその比較定理を簡単に述べる．次の初期値境界値問題を考える．

$$\mathrm{NBC}(f,\beta,a;T) \qquad \begin{cases} \partial_t u - \mathit{\Delta} u = f(u), & t>0,\ x\in\Omega, \\ -\partial_\nu u\in\beta(u), & t>0,\ x\in\partial\Omega, \\ u(0,x)=a(x), & x\in\Omega. \end{cases}$$

簡単のため，ここでは各記号の設定は以前のセクションと同じものとする．また，$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ は一価の写像である．初期値を $a \in L^\infty(\Omega)$ とし, $T > 0$ は NBC$(f, \beta, \gamma, a; T)$ の解の極大存在時間とする．ここでは, NBC$(f, \beta, \gamma, a; T)$ の解を $C([0,T]; L^2(\Omega)) \cap W^{1,2}_{loc}((0,T); L^2(\Omega)) \cap L^\infty(0,T; L^\infty(\Omega))$ のクラスに属する強解と定める．(注意 1.3 を参照．)

定理 3.1. u_i をそれぞれ NBC$(f_i, \beta_i, a_i; T_i)$ $(i = 1, 2)$ の強解とする．以下を仮定する．

(A1) $a_1 \le a_2$ *a.e.* in Ω,

(A2) (i) $\sup\{b_2\,;\, b_2 \in \beta_2(r_2)\} \le \sup\{b_1\,;\, b_1 \in \beta_1(r_1)\} \quad \forall r_1 \in D(\beta_1), \forall b_2 \in D(\beta_2)$ *with* $r_1 > r_2$, *or*

(ii) $r_1 \le r_2 \qquad \forall r_1 \in D(\beta_1), \forall r_2 \in D(\beta_2)$.

(A3) $F_1 \le F_2$ *a.e.* in $\mathbb{R}$ かつ F_1 と F_2 の少なくとも一方は局所 *Lipschitz* 連続.

このとき, 次が成立する.

$$u_1(t,x) \le u_2(t,x) \qquad \forall t \in [0,T], \quad a.e.\ x \in \Omega.$$

ここで, $T = \min(T_1, T_2)$ とする.

証明の流れは以下の通りである．

$$\alpha_0 := \inf\{\alpha > 0\,;\, (\mathrm{P})_\alpha \text{ is N-type.}\}$$

Step 1: $\alpha_0 < \infty$.
Step 2: $\alpha > \alpha_0$ ならば $(\mathrm{P})_\alpha$ は N-type.
Step 3: $\alpha_0 > 0$.
Step 4: $\alpha < \alpha_0$ ならば $(\mathrm{P})_\alpha$ は D-type.

各ステップは適当な比較函数を用いて比較定理より示される．最後に $\alpha_c = \alpha_0$ として定理の主張を得る．

参考文献

[1] V. Barbu, "*Nonlinear Differential Equations of Monotone Types in Banach Spaces*", Springer Monographs in Mathematics, 2010.

[2] H. Brézis, "*Opérateurs Maximaux Monotones et Semigroupes de Contractions dans Espace de Hilbert*," North Holland, Amsterdam, The Netherlands, 1973.

[3] H. Brezis; T. Cazenave; Y. Martel; A. Ramiandrisoa, Blow up for $u_t - \Delta u = g(u)$ revisited, *Adv. Differential Equations*, **1** (1996), no. 1, 73-90.

[4] M. Fila (下條昌彦 記), 非線形熱方程式の爆発問題入門：Marek Fila 氏講義録, 東京大学数理科学レクチャーノート, **10**, 2011.

[5] H. Fujita, On the blowing up of solutions of the Cauchy problem for $u_t = \Delta u + u^{1+\alpha}$, *J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect.*, **I 13** (1966), 109–124.

[6] K. Hayakawa, On nonexistence of global solutions of some semilinear parabolic differential equations,*Proc. Japan Acad.*, **49** (1973), 503–505.

[7] 石毛和弘・溝口紀子, 非線形熱方程式の爆発問題について, 数学, **56** (2004), 182-192.

[8] 喜多航佑, 非線形境界条件に支配される放物型方程式に対する比較定理とその応用について, *Hokkaido University technical report series in mathematics*, **176** (2019), 319-324.

[9] K.Kita; M. Ôtani, Bounds for global solutions of nonlinear heat equations with nonlinear boundary conditions, *Libertas Math. (N.S.)*, **41** (2021), 1-22.

[10] K.Kita; M. Ôtani, On a comparison theorem for parabolic equations with nonlinear boundary conditions, *Adv. Nonlinear Anal.*, accepted. (arXiv:2109.01803)

[11] N. Mizoguchi; E. Yanagida, Critical exponents for the blow-up of solutions with sign changes in a semilinear parabolic equation, *Math. Ann.*, **307** (1997), no. 4, 663-675.

[12] N. Mizoguchi; E. Yanagida, Critical exponents for the blowup of solutions with sign changes in a semilinear parabolic equation. II, *J. Differential Equations*, **145** (1998), no. 2, 295-331.

[13] P. Quittner; P. Souplet, *Superlinear Parabolic Problems, Blow-up, Global Existence and Steady States,* 2nd ed., Birkhäuser Basel, 2019.

[14] 柳田英二, 藤田型方程式の大域解の挙動, 数学 **63** (2011), 85-102.

[15] 柳田英二, 反応拡散方程式, 東京大学出版会, 2015.