Jacobi 多様体と擬 Riemann 計量の整合性

早稲田大学大学院 基幹理工学研究科 数学応用数理専攻
木村 直記 (Naoki KIMURA)

概要

Poisson 多様体はシンプレクティック多様体の一般化であり，Jacobi 多様体は Poisson 多様体の一般化である．Boucetta は，Kähler 構造の一般化として，Poisson 構造と擬 Riemann 計量の整合性の概念を導入した．本講演では，この概念を更に一般化し，Jacobi 構造と擬 Riemann 計量の整合性を定義する．また，この定義における計量との整合性が，Jacobi 多様体の Poisson 化に対して良い振る舞いを示すことを紹介する．本研究は中村友哉氏 (工学院大学) との共同研究である．

1 Poisson 多様体と Lie 亜代数

本稿では，M を C^∞-多様体とする．

定義 1 (シンプレクティック多様体)**.** $2n$ 次元多様体 M 上の非退化閉 2-形式 ω，すなわち，$\omega^n \neq 0$ かつ $d\omega = 0$ を満たす 2-形式 ω を M 上のシンプレクティック構造といい，(M, ω) をシンプレクティック多様体という．

M 上のベクトル場の空間 $\mathfrak{X}(M) = \Gamma(TM)$ には Lie bracket $[\cdot,\cdot]$ が定まっているが，これを M 上の多重ベクトル場の空間，すなわち $\Gamma(\Lambda^* TM)$ にいくつかの条件を満たすように拡張したものを Schouten bracket と呼び，Lie bracket と同じく $[\cdot,\cdot]$ と書く．Schouten bracket は $[\cdot,\cdot] : \Gamma(\Lambda^k TM) \times \Gamma(\Lambda^l TM) \to \Gamma(\Lambda^{k+l-1} TM)$ である．Schouten bracket $[\cdot,\cdot]$ を用いて Poisson 多様体は次のように定義される．

定義 2 (Poisson 多様体)**.** M 上の 2-ベクトル場 $\pi \in \Gamma(\Lambda^2 TM)$ が

$$[\pi, \pi] = 0$$

を満たすとき，π を M 上の Poisson 構造といい，(M, π) を Poisson 多様体という．

M 上の 2-形式 $\omega \in \Gamma(\Lambda^2 T^*M)$ と 2-ベクトル場 $\pi \in \Gamma(\Lambda^2 TM)$ に対して，

$\omega^\flat : TM \to T^*M,\ X \mapsto \omega^\flat(X) := \omega(X, \cdot),$

$\pi^\# : T^*M \to TM,\ \alpha \mapsto \pi^\#(\alpha) := \pi(\alpha, \cdot)$

と定めると，

ω が非退化 $\iff$ $\omega^\flat : TM \to T^*M$ が同型射,

π が非退化 $\iff$ $\pi^\# : T^*M \to TM$ が同型射

である．同型射 $-\omega^\flat : TM \to T^*M$ と同型射 $\pi^\# : T^*M \to TM$ が互いに逆写像になるように ω と

π をとることによって，M 上の非退化 2-形式 ω と非退化 2-ベクトル場 π は 1 対 1 対応している．また，非退化 2-形式 ω とそれに対応する非退化 2-ベクトル場 π に対して

$$d\omega = 0 \iff [\pi, \pi] = 0$$

が成り立つので，非退化 Poisson 構造とシンプレクティック構造は等価な概念である．従って，Poisson 多様体はシンプレクティック多様体の一般化である．

定義 3 (Lie 亜代数)**.** M 上のベクトル束 A の切断の空間 $\Gamma(A)$ に Lie bracket $[\cdot,\cdot]_A$ が定まっており，M 上のバンドル写像 $\rho_A : A \to TM$ があって，任意の $X, Y \in \Gamma(A)$ と $f \in C^\infty(M)$ に対して

$$[X, fY]_A = f[X, Y]_A + (\rho_A(X)f)Y$$

を満たすとき，$(A, [\cdot,\cdot]_A, \rho_A)$ を M 上の Lie 亜代数という．また，ρ_A をアンカーと呼ぶ．

例 1. (1) Lie 代数は 1 点上の Lie 亜代数である．(M が 1 点)

(2) M の接束 $(TM, [\cdot,\cdot], \mathrm{id}_{TM})$ は M 上の Lie 亜代数である．ここで，$[\cdot,\cdot]$ は M 上のベクトル場の空間 $\mathfrak{X}(M) = \Gamma(TM)$ の通常の Lie bracket．$(TM, [\cdot,\cdot], \mathrm{id}_{TM})$ を標準的な Lie 亜代数と呼ぶ．

Lie 亜代数 $(A, [\cdot,\cdot]_A, \rho_A)$ に対して，標準的な Lie 亜代数である TM の場合と同じように differential $d_A : \Gamma(\Lambda^k A^*) \to \Gamma(\Lambda^{k+1} A^*)$ (TM の場合は外微分 d)，Lie 微分 $\mathcal{L}_X^A : \Gamma(\Lambda^k A^*) \to \Gamma(\Lambda^k A^*)$，Schouten bracket $[\cdot,\cdot]_A : \Gamma(\Lambda^k A) \times \Gamma(\Lambda^l A) \to \Gamma(\Lambda^{k+l-1} A)$ が定義される．

定義 4 (Poisson 構造)**.** M 上の Lie 亜代数 $(A, [\cdot,\cdot]_A, \rho_A)$ 上の 2-切断 $\pi \in \Gamma(\Lambda^2 A)$ が

$$[\pi, \pi]_A = 0$$

を満たすとき，π を A 上の Poisson 構造という．

多様体 M 上の Poisson 構造は標準的な Lie 亜代数 TM 上の Poisson 構造であるから，Lie 亜代数 A 上の Poisson 構造は多様体上の Poisson 構造の一般化である．

多様体 M 上に Poisson 構造 π があるとき，

$$[\alpha, \beta]_\pi := \mathcal{L}_{\pi^\sharp \alpha}\beta - \mathcal{L}_{\pi^\sharp \beta}\alpha - d(\pi(\alpha, \beta)) \quad (\alpha, \beta \in \Gamma(T^*M))$$

と定めると，余接束 T^*M に Lie 亜代数の構造 $T^*M_\pi := (T^*M, [\cdot,\cdot]_\pi, \pi^\#)$ が入る．
このことは標準的な Lie 亜代数 TM から一般の Lie 亜代数 A に一般化できる．
M 上の Lie 亜代数 $(A, [\cdot,\cdot]_A, \rho_A)$ 上に Poisson 構造 π があるとき，

$$[\alpha, \beta]_{A,\pi} := \mathcal{L}^A_{\pi^\sharp \alpha}\beta - \mathcal{L}^A_{\pi^\sharp \beta}\alpha - d_A(\pi(\alpha, \beta)) \quad (\alpha, \beta \in \Gamma(A^*))$$

と定めると，A の双対ベクトル束 A^* に Lie 亜代数の構造 $A^*_\pi := (A^*, [\cdot,\cdot]_{A,\pi}, \rho_A \circ \pi^\#)$ が入る．

Poisson 多様体の研究において Lie 亜代数 T^*M_π は重要である．実際に，Lie 亜代数 T^*M_π は Poisson 多様体の情報の多く（Poisson コホモロジーや特性葉層など）を持っている．

2 Jacobi 多様体と Jacobi 亜代数

定義 5 (Jacobi 多様体)**.** M 上の 2-ベクトル場 $\Lambda \in \Gamma(\Lambda^2 TM)$ とベクトル場 E の組 (Λ, E) が

$$[\Lambda, \Lambda] = 2E \wedge \Lambda, \quad [E, \Lambda] = 0$$

を満たすとき，(Λ, E) を M 上の Jacobi 構造といい，(M, Λ, E) を Jacobi 多様体という．

Jacobi 多様体 (M, Λ, E) で $E = 0$ のとき，(M, Λ) は Poisson 多様体．従って，Jacobi 多様体は Poisson 多様体の一般化である．

定義 6 (接触多様体)**.** $(2n+1)$ 次元多様体 M 上の 1-形式 η が $\eta \wedge (d\eta)^n \neq 0$ を満たすとき，η を M 上の接触構造といい，(M, η) を接触多様体という．

M 上に接触構造 η があるとき，η から Jacobi 構造 (Λ, E) が定まるが，この Jacobi 構造 (Λ, E) は "非退化" になる．非退化 Poisson 構造とシンプレクティック構造は等価な概念であるのと同じように，非退化 Jacobi 構造と接触構造は等価な概念である．

定義 7 (Jacobi 亜代数)**.** M 上の Lie 亜代数 A と A の 1-コサイクル ϕ_0 の組 (A, ϕ_0) を M 上の Jacobi 亜代数という．ここで，$\phi_0 \in \Gamma(A^*)$ が $d_A \phi_0 = 0$ を満たすとき，A の 1-コサイクルという．

Jacobi 亜代数 (A, ϕ_0) は $\phi_0 = 0$ のとき Lie 亜代数 A であるから，Jacobi 亜代数は Lie 亜代数の一般化である．

例 2. $(X, f), (Y, h) \in \mathfrak{X}(M) \times C^\infty(M)$ に対して

$$[(X, f), (Y, h)] := ([X, Y], Xh - Yf)$$

と定めると，$\Gamma(TM \times \mathbb{R}) \cong \mathfrak{X}(M) \times C^\infty(M)$ と同一視することにより，$TM \times \mathbb{R}$ に Lie 亜代数の構造 $(TM \times \mathbb{R}, [\cdot, \cdot], \mathrm{pr}_1)$ が入る．さらに，$(0, 1) \in \Omega^1(M) \times C^\infty(M) \cong \Gamma(T^*M \times \mathbb{R})$ はこの Lie 亜代数 $(TM \times \mathbb{R}, [\cdot, \cdot], \mathrm{pr}_1)$ の 1-コサイクルとなるから，$(TM \times \mathbb{R}, (0, 1))$ は M 上の Jacobi 亜代数になる．$(TM \times \mathbb{R}, (0, 1))$ を標準的な Jacobi 亜代数と呼ぶ.

Jacobi 亜代数 (A, ϕ_0) では，Lie 亜代数 A に 1-コサイクル ϕ_0 を付け加えたことによって，Lie 亜代数 A のアンカー ρ_A，differential d_A，Schouten bracket $[\cdot, \cdot]_A$ が ϕ_0 によってひねられる．ϕ_0 によってひねられた演算を $\rho_A^{\phi_0}$，$d_A^{\phi_0}$，$[\cdot, \cdot]_A^{\phi_0}$ と書く．

定義 8 (Jacobi 構造)**.** M 上の Jacobi 亜代数 (A, ϕ_0) 上の 2-切断 $\pi \in \Gamma(\Lambda^2 A)$ が

$$[\pi, \pi]_A^{\phi_0} = 0$$

を満たすとき，π を (A, ϕ_0) 上の Jacobi 構造という．

Jacobi 亜代数 (A, ϕ_0) 上の Jacobi 構造 π は，$\phi_0 = 0$ のとき Lie 亜代数 A 上の Poisson 構造に他ならない．従って，Jacobi 亜代数上の Jacobi 構造は Lie 亜代数上の Poisson 構造の一般化である．

多様体 M 上の Jacobi 構造 (Λ, E) は，$\Gamma(\Lambda^2 TM) \times \mathfrak{X}(M) \cong \Gamma(\Lambda^2(TM \times \mathbb{R}))$ と同一視することで標準的な Jacobi 亜代数 $(TM \times \mathbb{R}, (0,1))$ 上の Jacobi 構造とみなせる．従って，Jacobi 亜代数上の Jacobi 構造は多様体上の Jacobi 構造の一般化でもある．

Lie 亜代数 A 上に Poisson 構造 π があると A の双対ベクトル束 A^* に Lie 亜代数の構造 A^*_π が定まるのと同様に，Jacobi 亜代数 (A, ϕ_0) 上に Jacobi 構造 π があると A の双対ベクトル束 A^* に Jacobi 亜代数の構造 (A^*_π, X_0) が入る．ここで，$X_0 := -\pi^{\#}\phi_0 \in \Gamma(A)$ である．
特に，標準的な Jacobi 亜代数 $(TM \times \mathbb{R}, (0,1))$ 上の Jacobi 構造の場合，すなわち，多様体 M 上の Jacobi 構造 (Λ, E) に対しては，$TM \times \mathbb{R}$ の双対ベクトル束 $T^*M \times \mathbb{R}$ に Jacobi 亜代数の構造 $(T^*M \times \mathbb{R}, (-E, 0))$ が入る．

Poisson 多様体の研究において Lie 亜代数 T^*M_π が重要であるように，Jacobi 多様体の研究において Jacobi 亜代数 $(T^*M \times \mathbb{R}, (-E, 0))$ は重要である．

Jacobi 多様体の Poisson 化と呼ばれる操作は Jacobi 多様体を研究する上で非常に重要である．Poisson 化によって，Jacobi 多様体の研究をより理解の進んでいる Poisson 多様体の研究に帰着できるからである．また，非退化 Jacobi 多様体，すなわち接触多様体の Poisson 化は接触多様体のシンプレクティック化に他ならない．すなわち，非退化 Jacobi 多様体の Poisson 化は非退化 Poisson 多様体である．また，Poisson 化という操作は Jacobi 亜代数上の Jacobi 構造に対して一般化されている．

3 Poisson 構造と計量の整合性

Lie 亜代数 A 上のアファイン接続は TM の共変微分と同じように定義できる．

定義 9. M 上の Lie 亜代数 $(A, [\cdot,\cdot]_A, \rho_A)$ について，$\mathbb{R}$-双線型写像 $\nabla : \Gamma(A) \times \Gamma(A) \to \Gamma(A)$ が任意の $f \in C^\infty(M)$ と $X, Y \in \Gamma(A)$ に対して

$$\nabla_{fX} Y = f \nabla_X Y,$$
$$\nabla_X fY = f \nabla_X Y + (\rho_A(X) f) Y$$

を満たすとき，∇ を A 上のアファイン接続という．

TM の共変微分の場合と同じように，Lie 亜代数 A 上の擬 Riemann 計量 g に対して，捩率 0 かつ計量 g と両立しているような A 上のアファイン接続が唯一つ存在し，そのアファイン接続を g の Levi-Civita 接続と呼ぶ．

Boucetta は，多様体 M 上の Poisson 構造 π と計量の整合性を Lie 亜代数 T^*M_π 上の計量の Levi-Civita 接続を用いて次のように定義した．

定義 10 (Boucetta)**.** Poisson 多様体 (M, π) と T^*M 上の擬 Riemann 計量 g^* に対して，(π, g^*) が整合的であるとは

$$D\pi = 0$$

が成立するときをいう．ここで，D は Lie 亜代数 T^*M_π 上の g^* の Levi-Civita 接続．

(π, g^*) が整合的でかつ Poisson 構造 π が非退化であるとき，π に対応するシンプレクティック形

式 ω は Kähler 形式になることが示されている．従って，整合的な計量を持つ Poisson 構造は Kähler 構造の一般化とみなせる．

Boucetta は多様体上の Poisson 構造と計量の整合性を上記のように定義したが，この定義は Lie 亜代数 T^*M_π 上の計量の Levi-Civita 接続を用いたものであるから，一般の Lie 亜代数 A 上の Poisson 構造に対して計量との整合性を同様に定義できる．

定義 11. Lie 亜代数 A 上の Poisson 構造 π と A^* 上の擬 Riemann 計量 g^* に対して，(π, g^*) が整合的であるとは

$$D^\pi \pi = 0$$

が成立するときをいう．ここで，D^π は Lie 亜代数 A^*_π 上の g^* の Levi-Civita 接続.

4　Jacobi 構造と計量の整合性 (主結果)

今回，Jacobi 亜代数上の Levi-Civita 接続を用いて，Jacobi 亜代数上の Jacobi 構造と計量の整合性を次のよう定義した．

定義 12 (K-Nakamura)**.** Jacobi 亜代数 (A, ϕ_0) 上の Jacobi 構造 π と A^* 上の擬 Riemann 計量 g^* に対して，(π, g^*) が整合的であるとは

$$\begin{aligned}(D^{\pi,\phi_0}_\alpha \pi)(\beta,\gamma) = -\frac{1}{2}((X_0 \otimes \pi)(\beta,\gamma,\alpha) + (X_0 \otimes \pi)(\gamma,\alpha,\beta) + g^*(\alpha,\beta)\pi(({g^*})^{\flat-1}(X_0),\gamma) \\ - g^*(\alpha,\gamma)\pi(({g^*})^{\flat-1}(X_0),\beta))\end{aligned}$$

が成立するときをいう．ここで，D^{π,ϕ_0} は Jacobi 亜代数 (A^*_π, X_0) 上の g^* の Levi-Civita 接続.

この定義は $\phi_0 = 0$ のとき，定義 11 の Lie 亜代数 A 上の Poisson 構造と計量の整合性の定義と一致している．従って，定義 12 における Jacobi 構造と計量の整合性は Poisson 構造と計量の整合性の一般化になっている．

また，Jacobi 構造と計量の整合性をこのように定義すると次が成り立つ．

定理 13 (K-Nakamura)**.** 定義 11 と定義 12 における計量との整合性は，Poisson 化によって保たれる．

非退化 Jacobi 多様体，すなわち接触多様体に対してこの定理を適用して次を得た．

定理 14 (K-Nakamura)**.** M 上の接触計量構造に対して，その接触構造から定まる非退化 Jacobi 構造と計量が整合的であることと，その接触計量構造が佐々木構造になることが同値である．

定義 10 における整合的な計量を持つ Poisson 構造は Kähler 構造の一般化とみなせるが，定理 14 より，定義 12 における整合的な計量を持つ Jacobi 構造は佐々木構造の一般化とみなすことができる．

参考文献

[1] M. Boucetta, *Compatibilit des structures pseudo-riemanniennes et des structures de Poisson*, C. R. Acad. Sci. Paris Sr. I Math. 333 (2001), no. 8, 763-768.