多重ゼータ値と多重ゼータスター値を補間する級数の巡回和公式

東北大学大学院 理学研究科 数学専攻
木村藍貴 (Aiki KIMURA)

概要

多重ゼータ値および多重ゼータスター値は, どちらも順序付きの正整数の組に対して収束多重級数で定義される実数である. 多重ゼータ値または多重ゼータスター値全体が有理数体上で生成する代数の構造解明は重要な課題であり, 多重ゼータ値や多重ゼータスター値の間に成り立つ関係式族の究明が急がれている. 双方で成り立つ類似の関係式族のひとつとして, 変数たちを巡回させた和（巡回和）に関する公式が知られており, 今回, 多重ゼータ値と多重ゼータスター値を補間する多重級数を導入し, その級数についても巡回和公式を得たので報告する.

1　導入

順序付きの正整数の組 $(k_1, \ldots, k_r)$ をインデックス, 特に $k_r > 1$ であるものを収束インデックスと呼ぶことにする. 収束インデックス $(k_1, \ldots, k_r)$ に対して, 多重ゼータ値および多重ゼータスター値を以下の収束多重級数でそれぞれ定義する:

- $\zeta(k_1, \ldots, k_r) := \displaystyle\sum_{1 \le m_1 < \cdots < m_r} \frac{1}{m_1^{k_1} \cdots m_r^{k_r}} \quad (\in \mathbb{R}).$
- $\zeta^\star(k_1, \ldots, k_r) := \displaystyle\sum_{1 \le m_1 \le \cdots \le m_r} \frac{1}{m_1^{k_1} \cdots m_r^{k_r}} \quad (\in \mathbb{R}).$

どちらの級数も $k_r > 1$ で絶対収束し, $k_r = 1$ では発散するので, 収束インデックスに限定している. 併せてインデックスの重さを $k_1 + \cdots + k_r$, 深さを r とする. 特に深さ 1 の多重ゼータ（スター）値は, Riemann ゼータ関数の正整数点における特殊値（Riemann ゼータ値）である. この観点では Riemann ゼータ値の多重化が多重ゼータ（スター）値であるともみなせる. 多重ゼータ値に関する研究は, 18 世紀の C. Goldbach や L. Euler らによって始まり, Euler の論文 [4] において, $\zeta(2,1) = \zeta(3)$ をはじめとした, 二重ゼータ値（深さ 2 の多重ゼータ値）についての関係式が証明されている. のちに M. Hoffman や D. Zagier によって, 一般の深さの多重ゼータ値および多重ゼータスター値が研究され, 有理数体 $\mathbb{Q}$ 上で多重ゼータ（スター）値の間に成り立つ多くの線形関係式の存在が確認された. さらに, 多重ゼータ（スター）値全体が $\mathbb{Q}$ 上で生成する代数について, 結び目不変量や基本群の Galois 表現などとの密接な関わりが指摘されている. そのため, 多重ゼータ（スター）値がなす代数の構造解明は重要な課題であり, 多重ゼータ（スター）値の間に成り立つ関係式族の究明が急がれている. なお, 多重ゼータ値と多重ゼータスター値はすべて無理数であろうという予想の

もとで研究されており, その無理数性は特殊なインデックスを除いて未解決である.

本稿では, まず多重ゼータ（スター）値に関する次元予想を述べ, 次に多重ゼータ値と多重ゼータスター値の双方で成り立つ類似の関係式族として, 和公式 ([6], [18]) と巡回和公式 ([8], [13]) を紹介する. 最後に, 多重ゼータ値と多重ゼータスター値を補間する級数（ハイブリッド多重ゼータ値と呼ぶことにする）を導入し, ハイブリッド多重ゼータ値について得られた巡回和公式を報告する.

2 多重ゼータ値と多重ゼータスター値

多重ゼータ値と多重ゼータスター値の間のよく知られた性質として, 互いを他方の線形和で表せることが挙げられる. 記述方法は, 多重ゼータスター値の級数におけるランニングインデックス間の不等号「$\leq$」について, 「$<$」と「$=$」に場合分けをすることで多重ゼータ値の線形和を得る. 逆についても同様である:

$$\begin{aligned}\zeta^\star(k_1,k_2) &= \sum_{1\leq m_1\leq m_2}\frac{1}{{m_1}^{k_1}{m_2}^{k_2}}\\ &= \sum_{1\leq m_1< m_2}\frac{1}{{m_1}^{k_1}{m_2}^{k_2}} + \sum_{1\leq m_1= m_2}\frac{1}{{m_1}^{k_1}{m_2}^{k_2}}\\ &= \zeta(k_1,k_2)+\zeta(k_1+k_2).\end{aligned}$$

また, 多重ゼータ（スター）値どうしについても多くの $\mathbb{Q}$-線形関係式が存在し, Zagier によって次の予想が提唱された:

予想 2.1 (多重ゼータ（スター）値に関する次元予想, Zagier[17])**.** $\mathcal{Z}_k$ を重さ k の多重ゼータ値が張る $\mathbb{Q}$-ベクトル空間として, 数列 $\{d_k\}_{k\geq 0}$ を漸化式 $d_k = d_{k-2} + d_{k-3}$, $d_0 = 1$, $d_1 = 0$, $d_2 = 1$ で定める. このとき, 任意の整数 $k \geq 2$ に対して,

$$\dim_{\mathbb{Q}}\mathcal{Z}_k \overset{?}{=} d_k.$$

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	$\cdots$
d_k	1	0	1	1	1	2	2	3	4	5	7	9	$\cdots$
2^{k-2}	–	–	1	2	4	8	16	32	64	128	256	512	$\cdots$

上の表には予想次元 d_k と重さ k のインデックスの個数 2^{k-2} が記載されており, 次元 d_k と見かけの多重ゼータ値の個数を比較することで, 多重ゼータ値の間には多くの $\mathbb{Q}$-線形関係式が存在することがわかる. また, 多重ゼータ値は多重ゼータスター値の線形和として表せることから, 重さ k の多重ゼータスター値が張る $\mathbb{Q}$-ベクトル空間と $\mathcal{Z}_k$ は一致する. そのため, この予想は多重ゼータスター値に関する次元予想でもある. 実は, 数列 d_k は $\dim_{\mathbb{Q}}\mathcal{Z}_k$ の上界であることが寺杣および Deligne–Goncharov によって独立に証明されている.

定理 2.2 (Goncharov[5], 寺杣 [15], Deligne-Goncharov[3])**.**

$$\dim_{\mathbb{Q}}\mathcal{Z}_k \leq d_k.$$

しかしながら, 重さが奇数であるような多重ゼータ（スター）値については, $\zeta(3)$ を除いて, 無理数であるかどうかすらわかっていない. そのため, 寄稿時点では $\mathcal{Z}_2, \mathcal{Z}_3, \mathcal{Z}_4$ の次元しか確定できてお

らず, 多重ゼータ（スター）値の研究において, 次元予想の解明は重要課題となっている. また, 多重ゼータ（スター）値どうしの積は多重ゼータ（スター）値の線形和に書き直せることが知られており, $\mathbb{Q}$-ベクトル空間 $\mathcal{Z} = \mathbb{Q} + \sum_{k\geq 2} \mathcal{Z}_k$ は通常積のもとで $\mathbb{Q}$-代数となる. 一般に $\mathcal{Z}_k \cdot \mathcal{Z}_l \subset \mathcal{Z}_{k+l}$ が成り立つ. 多重ゼータ（スター）値の代数 $\mathcal{Z}_k$ の構造について本稿では述べないが, 興味がある方は [1] や [2] などを参照されたい.

ここからは, 多重ゼータ値と多重ゼータスター値の双方で成り立つ類似の関係式を紹介していく.

定理 2.3 (多重ゼータ値の和公式, Granville[6], Zagier[18])**.** 正整数 k, r $(k > r)$ に対して, 次が成り立つ:

$$\sum_{\substack{k_1,\dots,k_{r-1}\geq 1, k_r\geq 2\\ k_1+\cdots+k_r=k}} \zeta(k_1,\dots,k_r) = \zeta(k).$$

定理 2.4 (多重ゼータスター値の和公式 cf. Hoffman[7])**.** 正整数 k, r $(k > r)$ に対して, 次が成り立つ:

$$\sum_{\substack{k_1,\dots,k_{r-1}\geq 1, k_r\geq 2\\ k_1+\cdots+k_r=k}} \zeta^\star(k_1,\dots,k_r) = \binom{k-1}{r-1}\zeta(k).$$

定理 1.3 および定理 1.4 の左辺は, 重さ k かつ 深さ r のインデックスをもつすべての多重ゼータ（スター）値の和であり, それが Riemann ゼータ値 $\zeta(k)$（あるいはその整数倍）に等しいという関係式である. どちらの和公式も Hoffman の論文 [7] において言及され, 多重ゼータ値の和公式については A. Granville と Zagier によって独立に証明された. 多重ゼータ値と多重ゼータスター値は互いを線形和で表せることを認めれば, ふたつの和公式は関係式族として同値であることが知られている. 次に和公式を細分する関係式である巡回和公式を紹介する.

定理 2.5 (巡回和公式, Hoffman–大野 [8])**.** 2 以上である整数を少なくともひとつもつようなインデックス $(k_1,\dots,k_r)$ に対して, 次が成り立つ:

$$\sum_{j=1}^{r}\sum_{l=1}^{k_j-1} \zeta(k_j-l, k_{j+1},\dots,k_r,k_1,\dots,k_{j-1},l+1) = \sum_{j=1}^{r}\zeta(k_{j+1},\dots,k_r,k_1,\dots,k_{j-1},k_j+1). \quad (2.1)$$

定理 2.6 (多重ゼータスター値の巡回和公式, 大野–若林 [13])**.** 2 以上である整数を少なくともひとつもつようなインデックス $(k_1,\dots,k_r)$ に対して, 次が成り立つ:

$$\sum_{j=1}^{r}\sum_{l=1}^{k_j-1} \zeta^\star(k_j-l, k_{j+1},\dots,k_r,k_1,\dots,k_{j-1},l+1) = k\zeta(k+1).$$

ここで, $k = k_1 + \cdots + k_r$ である. また, 左辺内側の和について, $k_j = 1$ のときは 0 とする.

現れるインデックスはすべて収束インデックスであり, インデックスの各整数を巡回させたような多重ゼータ値たちの和を考えている. ここで, 式 (2.1) の右辺に現れる多重ゼータ値の深さは左辺と比べて 1 小さいことに注意すると, 重さと深さを固定した多重ゼータ値の和に対して繰り返し巡回和公式を適用することで, その和が Riemann ゼータ値に等しいという和公式（定理 2.3）を導出できる. この意味で巡回和公式は和公式を細分する関係式族である. また, ふたつの巡回和公式は関係式

族として同値であることが, 井原–梶川–大野–奥田 [9], ならびに田中–若林 [14] によって異なる手法で証明されている.

例 2.7. インデックス $(1,2,3)$ に対する多重ゼータ値および多重ゼータスター値の巡回和公式はそれぞれ以下のようになる:

$$\zeta(2,1,2,2)+\ \zeta(1,1,2,3)+\ \zeta(1,3,1,2)\ =\zeta(2,3,2)+\zeta(3,1,3)+\zeta(1,2,4). \tag{2.2}$$
$$\zeta^{\star}(2,1,2,2)+\zeta^{\star}(1,1,2,3)+\zeta^{\star}(1,3,1,2)=6\zeta(7). \tag{2.3}$$

3 主結果

本節では, ランニングインデックス間の不等号に「$<$」と「$\leq$」を混在させた, 多重ゼータ値と多重ゼータスター値を補間する級数について得られた結果を紹介する.

定義 3.1 (cf. 川島 [10])**.** 正整数の組 $\mu=(\mu_1,\ldots,\mu_s)\in(\mathbb{Z}_{\geq1})^s$, $\mathbf{k}_i=(k_{i,1},\ldots,k_{i,\mu_i})\in(\mathbb{Z}_{\geq1})^{\mu_i}$ ($\mathbf{k}_s$ は収束インデックス) に対して,

$$\zeta_\mu(\mathbf{k}_1;\ldots;\mathbf{k}_s):=\sum_{\substack{1\leq m_{1,1}<\cdots<m_{1,\mu_1}\\ m_{1,\mu_1}\leq m_{2,1}<\cdots<m_{2,\mu_2}\\ \vdots\\ m_{s-1,\mu_{s-1}}\leq m_{s,1}<\cdots<m_{s,\mu_s}}}\prod_{i=1}^{s}\frac{1}{{m_{i,1}}^{k_{i,1}}\cdots {m_{i,\mu_i}}^{k_{i,\mu_i}}}\quad(\in\mathbb{R}).$$

本稿では, $\zeta_\mu(\mathbf{k}_1;\ldots;\mathbf{k}_s)$ をハイブリッド多重ゼータ値と呼ぶことにする. 多重ゼータ（スター）値と同様に $\mathbf{k}_s$ が収束インデックス, すなわち $k_{s,\mu_s}>1$ ならば絶対収束しており, このことはハイブリッド多重ゼータ値も多重ゼータ（スター）値の線形和で記述できることから容易に確認される. ハイブリッド多重ゼータ値の定義において, 各 μ_i は「$\leq$」から次の「$\leq$」までの間にあるランニングインデックスの個数を表しており, 「,」と「;」はそれぞれ「$<$」と「$\leq$」に対応している. ハイブリッド多重ゼータ値が多重ゼータ値と多重ゼータスター値を補間することは, 特殊な場合として,

$$\zeta_{(s)}(k_{1,1},\ldots,k_{1,s})=\zeta(k_{1,1},\ldots,k_{1,s}),\quad \zeta_{\underbrace{(1,\ldots,1)}_{s}}(k_{1,1};\ldots;k_{s,1})=\zeta^{\star}(k_{1,1},\ldots,k_{s,1})$$

であることからわかる. なお, ハイブリッド多重ゼータ値以外にも, 多重ゼータ値と多重ゼータスター値を補間する対象として, 山本による t-多重ゼータ値 ([16]) や, 中筋–Phuksuwan–山崎による Schur 多重ゼータ値 ([12]) などが知られている.

記述を簡略化するため, $\zeta_\mu(\mathbf{k}_1;\ldots;\mathbf{k}_s)$ を単に $\zeta(\mathbf{k}_1;\ldots;\mathbf{k}_s)$ と表すことにして, 主定理を以下に述べる:

定理 3.2. (i) $\mu=(\mu_1,\ldots,\mu_s)\in(\mathbb{Z}_{\geq1})^s$, $\mathbf{k}_i\in(\mathbb{Z}_{\geq1})^{\mu_i}$, 2 以上であるような整数を少なくともひと

つもつようなインデックス $(\mathbf{k}_1;\dots;\mathbf{k}_s)$ に対して, 次が成り立つ:

$$\sum_{i=1}^{s}\sum_{j=1}^{\mu_i}\sum_{l=1}^{k_{i,j}-1}\zeta(k_{i,j}-l,\mathbf{k}_{i(j+1)};\dots;\mathbf{k}_s,\mathbf{k}_1;\dots;\mathbf{k}_i{}^{(j-1)},l+1)$$
$$=\zeta(\mathbf{k}_1;\dots;\mathbf{k}_{s-1};\mathbf{k}_s{}^{(s-1)},k_{s,\mu_s}+1)+\sum_{i=1}^{s}\sum_{j=1}^{\mu_i-1}\zeta(\mathbf{k}_{i(j+1)};\dots;\mathbf{k}_s,\mathbf{k}_1;\dots;\mathbf{k}_i{}^{(j-1)},k_{i,j}+1). \tag{3.1}$$

(ii) $\mu=(\mu_1,\dots,\mu_s)\in(\mathbb{Z}_{\geq 1})^s$, $\mathbf{k}_i\in(\mathbb{Z}_{\geq 1})^{\mu_i}$, 2 以上であるような整数を少なくともひとつもつようなインデックス $(\mathbf{k}_1;\dots;\mathbf{k}_s)$ に対して, 次が成り立つ:

$$\sum_{i=1}^{s}\sum_{j=1}^{\mu_i}\sum_{l=1}^{k_{i,j}-1}\zeta(k_{i,j}-l,\mathbf{k}_{i(j+1)};\dots;\mathbf{k}_s;\mathbf{k}_1;\dots;\mathbf{k}_i{}^{(j-1)},l+1)$$
$$=\delta_\mu k\zeta(k+1)+\sum_{i=1}^{s}\sum_{j=1}^{\mu_i-1}\zeta(\mathbf{k}_{i(j+1)};\dots;\mathbf{k}_s;\mathbf{k}_1;\dots;\mathbf{k}_i{}^{(j-1)},k_{i,j}+1). \tag{3.2}$$

ここで, $\mathbf{k}_i{}^{(j)}=(k_{i,1},\dots,k_{i,j})$, $\mathbf{k}_{i(j)}=(k_{i,j},\dots,k_{i,\mu_i})$, $\delta_\mu=\begin{cases}1 & \mu=(1,\dots,1)\\ 0 & \mu\neq(1,\dots,1)\end{cases}$, $k=\sum_{i,j}k_{i,j}$ である. また, 両辺において空和は 0 とする.

式 (3.1) と (3.2) では, それぞれの $\mathbf{k}_s$ と $\mathbf{k}_1$ の間が「,」と「;」で異なっている. すなわち, それぞれの式でランニングインデックス m_{s,μ_s} と $m_{1,1}$ の間の不等号が「$<$」あるいは「$\leq$」であるハイブリッド多重ゼータ値を考えており, 双方で巡回和公式が成り立つという主張である. 注意として, インデックスの「$k_{i,j},$」あるいは「$k_{i,j};$」というかたまりを巡回させており, 右端のインデックスを (i) では「$k_{s,\mu_s},$」, (ii) では「$k_{s,\mu_s};$」とみなしている.

注意 3.3. 定理 3.2(i) と (ii) は関係式族として同値である. また, それぞれが関係式族として定理 2.5 (および定理 2.6) と同値である. 特に $\mu=(r)$ とすれば式 (3.1) は定理 2.5 に一致し, $\mu=(\underbrace{1,\dots,1}_{r})$ とすれば式 (3.2) は定理 2.6 に一致する.

例 3.4. $\mu=(3)$, $\mathbf{k}_1=(1,2,3)$ とすると, 式 (3.1) は例 2.7 の式 (2.2) に一致する. 一方, 式 (3.2) は次の等式が得られる:

$$\zeta(2;1,2,2)+\zeta(1;1,2,3)+\zeta(1,3;1,2)=\zeta(2,3;2)+\zeta(3;1,3).$$

例 3.5. $\mu=(1,1,1)$, $(\mathbf{k}_1;\mathbf{k}_2;\mathbf{k}_3)=(1;2;3)$ とすると, 式 (3.2) において $\delta_\mu=1$ であり, 右辺の二重和は空和となるので例 2.7 の式 (2.3) に一致する. 一方, 式 (3.1) からは次の等式が得られる:

$$\zeta(2,1;2;2)+\zeta(1,1;2;3)+\zeta(1;3,1;2)=\zeta(1;2;4).$$

例 3.6. $\mu=(2,1)$, $(\mathbf{k}_1;\mathbf{k}_2)=(1,2;3)$ とすると, 式 (3.1) から次の等式が得られる:

$$\zeta(2,1,2;2)+\zeta(1,1,2;3)+\zeta(1;3,1,2)=\zeta(1,2;4)+\zeta(2;3,2).$$

一方, 式 (3.2) からは次の等式が得られる:

$$\zeta(2;1,2;2)+\zeta(1;1,2;3)+\zeta(1;3;1,2)=\zeta(2;3;2).$$

注意 3.7. 定理 3.2 の証明は, Hoffman–大野 [8] による定理 1.5 の証明と, 大野–若林 [13] による定理 1.6 の証明を, ハイブリッド多重ゼータ値の議論に拡張することによる. 詳しい証明は [11] を参照されたい.

参考文献

[1]『第 26 回整数論サマースクール「多重ゼータ値」報告集』(佐久川憲児・田坂浩二・三柴善範 編) (2019).

[2] 荒川恒男, 金子昌信, 『多重ゼータ値入門』, COE Lecture Note Vol. 23, 九州大学, (2010).

[3] P. Deligne and A. B. Goncharov, *Groupes fondamentaux motiviques de Tate mixte*, Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) **38** (2005), no. 1, 1–56 (French, with English and French summaries).

[4] L. Euler, *Meditationes circa singulare serierum genus*, Novi Comm. Acad. Sci. Petropol20 (1775), 140–186, reprinted in Opera Omnia ser. I, **15**, B. G. Teubner, Berlin (1927), 217–267.

[5] A. B. Goncharov, *Periods and mixed motives*, preprint.

[6] A. Granville, *A decomposition of Riemann's zeta-function*, in London Math. Soc. Lecture Note Ser. **247**, Cambridge (1997), 95–101.

[7] M. Hoffman, *Multiple harmonic series*, Pacific J. Math., **152** (1992), 275–290.

[8] M. Hoffman and Y. Ohno, *Relations of multiple zeta values and their algebraic expression*, J. of Algebra, **262** (2003), 332–347.

[9] K. Ihara, J. Kajikawa, Y. Ohno and J. Okuda, *Multiple zeta values vs. multiple zeta-star values*, J. of Algebra, **332** (2011), 187–208.

[10] G. Kawashima, *Multiple series expressions for the Newton series which interpolate finite multiple harmonic sums*, arXiv:0905.0243.

[11] A. Kimura, *The cyclic sum formula for multiple harmonic series interpolating multiple zeta and zeta-star values*, preprint.

[12] M. Nakasuji, O. Phuksuwan, and Y. Yamasaki, *On Schur multiple zeta functions*: A combinatoric generalization of multiple zeta functions, Adv. Math. **333** (2018), 570–619.

[13] Y. Ohno and N. Wakabayashi, *Cyclic sum of multiple zeta values*, Acta Arithmetica, **123** (2006), 289–295.

[14] T. Tanaka and N. Wakabayashi, *An algebraic proof of the cyclic sum formula for multiple zeta values*, J. of Algebra, **323** (2010), 766–778.

[15] T. Terasoma, *Mixed Tate motives and multiple zeta values*, Invent. Math. **149** (2002), 339–369.

[16] S. Yamamoto *Interpolation of multiple zeta and zeta-star values*, J. of Algebra, **385** (2013), 102–114.

[17] D. Zagier, *Values of zeta functions and their applications*, in ECM volume, Progress. Math. **120** (1994), 497–512.

[18] ———, *Multiple zeta values*, Unpublished manuscript, Bonn (1995).