最近接有向パーコレーションに対するレース展開

上島芳倫 (KAMIJIMA Yoshinori)*

概要

有向パーコレーションは感染症の細菌の生存・死滅を記述するモデルである．数学的には，格子グラフ $\mathbb{L}^d$ と非負整数全体 $\mathbb{Z}_+$ の直積 $\mathbb{L}^d \times \mathbb{Z}_+$ の辺集合に対して，開・閉なる状態をランダムに与えることで定義される．開の辺で繋がった頂点数の期待値には冪乗則 $(p_{\mathrm{c}} - p)^{-\gamma}$ が予想されており，特に $d > 4$ ならば $\gamma = 1$ だと信じられている．講演者らはこれを単純立方格子では $d+1 = 184$ で，体心立方格子では $d+1 = 10$ で証明したので，それを紹介する．なお，本講演は陳隆奇教授（國立政治大學，台湾）と半田悟氏 (atama plus Inc.) との共同研究 [4] に基づく．

1　導入

1957 年に Broadbend と Hammersley [3] は有向パーコレーションと呼ばれる確率論的な模型を導入した．これは多孔質材料への水の浸透現象や，感染症の細菌が生存・死滅するまでの過程を記述するモデルの一種である．例えば，単純立方格子[1)] $\mathbb{Z}^d$ 上に感染する対象が配置されているとしよう．非負整数の時間 $\mathbb{Z}_+ := \mathbb{N} \sqcup \{0\}$ を考え，時刻 0 で原点 o の対象のみ感染していたとする．さらに，時刻が 1 進むたびに前の時刻で感染していた者からランダムな確率 $p \in [0,1]$ で感染が起こるとする．このとき，確率 p を変化させると，それに伴って時刻 ∞ で細菌が生存・死滅する確率が変化する．自明な場合として，$p = 0$ では時刻 1 の時点で細菌が死滅（生存確率が 0）し，$p = 1$ では時刻 ∞ まで生存（生存確率が 1）する．実は，或る非自明な確率 $0 < p_{\mathrm{c}} < 1$ が存在して，任意の $p > p_{\mathrm{c}}$ で生存確率が 0 より真に大きくなることが知られている．また，感染者のクラスター・サイズも非自明な振る舞いを示すことが知られている．有向パーコレーションのクラスターとは，時刻 ∞ までに感染した者の数の合計である．もし細菌の生存確率が正であれば，無限の時刻まで感染が続いていることになるので，クラスター・サイズは無限大に発散する．一方で，$p = 0$ では感染者が原点のみなので，常に 1 である．以上のように，パラメータ（今の場合は確率 p）を変化させたときに，モデルに対して定義された関数が特異な振る舞いをすることを相転移と呼ぶ．

相転移は統計物理学に於ける重要な研究対象の一つである．相転移の身近な例の一つとして，水の三態が挙げられる．水という物質は分子 (H_2O) の集まりであることはよく知られているものの，原子論の観点から液体と気体を区別することは非自明な問題である（力学的に分子一つ一つが互いに相互作用を及ぼし合って運動している，という観点では液体も気体も同じである）．この意味で，相転移を数学的に研究することには価値がある．

* Postdoctoral Fellow, National Center for Theoretical Sciences, Taiwan

1) 固体物理学で専ら使われる呼び方．数学では「整数格子」などと呼び，あまりこのような用語は使わないだろう．本稿では，後述の体心立方格子——これも固体物理学の用語——に合わせて，$\mathbb{Z}^d$ もこのように呼ぶ．

有向パーコレーションでは，前述のように生存確率やクラスター・サイズを見ることで，相転移が起こることがわかる．特に，各相の境 p_{c} を臨界点と呼び，その周りでは生存確率やクラスター・サイズといった関数に対して冪乗則が成り立つと予想されている．このような現象を臨界現象という．具体的には，或る正の指数 β と γ が存在して，$p \uparrow p_{\mathrm{c}}$ で漸近的に生存確率が $(p_{\mathrm{c}}-p)^{\beta}$ およびクラスター・サイズが $(p_{\mathrm{c}}-p)^{-\gamma}$ のように振る舞うと予想されている．これらの指数を臨界指数という．一般に臨界指数は複雑な実数値を取るものの，空間次元が十分大きい $d > d_{\mathrm{c}} = 4$ ときには $\beta = \gamma = 1$ に退化すると予想されている．詳しくは後述するが，これらの値は相互作用の無いモデルの臨界指数に対応することが知られており，平均場臨界指数と呼ぶ．平均場臨界指数への退化が起こるぎりぎりの次元 d_{c} を（上部）臨界次元と呼ぶ．

水の例でいうと，その温度と圧力に関する相図を見たときに，気相と液相を区別する線が途中で切れている点がある．この点が臨界点である．臨界点の近傍では，気相と液相の体積密度の差に対して，前述のような冪乗則が実験的に観測されている．特に興味深いのは，水に限らず様々な物質でも，臨界点の値が変わる一方で臨界指数は同じ値になることである．すなわち，臨界指数はモデルの詳細（格子の種類など）によらず，対称性や次元にのみ依存すると予想されている．このような臨界指数の普遍性を解明することは統計物理学に於ける重要な課題の一つである．

本稿では，最近接有向パーコレーションに対する高次元臨界現象を取り扱う．本研究の目的は臨界次元の予想 $d_{\mathrm{c}} = 4$ を数学的に証明することである．高次元臨界現象の解析にはレース展開と呼ばれる手法が使われてきた [8, 9] ので，本研究でもそれを利用する．また，本研究では単純立方格子以外に体心立方格子を導入する．詳しくは後述するが，体心立方格子上のランダム・ウォークを考えると，その再帰確率が小さく評価しやすいので，レース展開の展開係数の収束性を示す際に役に立つ．結果として（臨界次元の予想値よりも大きいものの）単純立方格子 $\mathbb{Z}^d \times \mathbb{Z}_+$ 上では $d+1 \geq 183+1$ で，体心立方格子 $\mathbb{L}^d \times \mathbb{Z}_+$ 上では $d+1 \geq 9+1$ で平均場臨界現象への退化を示せた．先行研究 [8] では，$\mathbb{Z}^d \times \mathbb{Z}_+$ 上の最近接有向パーコレーションに対して平均場臨界指数への退化を示しているものの「十分高次元 $d \gg 4$」と書いてあるのみで，レース展開の解析が成り立つ具体的な次元を特定していなかった．以下では，その主張の数学的な定式化と証明について紹介する．

2　モデルの定義

2.1　格子の定義とランダム・ウォーク

まず，体心立方格子 (body-centered cubic lattice) $\mathbb{L}^d$ を次のように定義する．最近接点の集合を $\mathscr{N}^d_{\mathrm{BCC}} = \{x = (x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{Z}^d \mid \prod_{i=1}^d |x_i| = 1\}$ とする．体心立方格子 $\mathbb{L}^d$ とは，原点を含み $o = (0, \dots, 0) \in \mathbb{L}^d$，かつ最近接点の集合 $\mathscr{N}^d$ を平行移動することによって生成されるグラフ[2]である．同様に，単純立方格子 (simple cubic lattice) $\mathbb{Z}^d$ とは，原点を含み，かつ最近接点の集合 $\mathscr{N}^d_{\mathrm{SC}} = \{x = (x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{Z}^d \mid \sum_{i=1}^d |x_i| = 1\}$ を平行移動することによって生成されるグラフと見なす．以下では，両方のグラフを纏めて扱うために，$\mathbb{G}^d = \mathbb{Z}^d$ or $\mathbb{L}^d$ および $\mathscr{N}^d = \mathscr{N}^d_{\mathrm{SC}}$ or $\mathscr{N}^d_{\mathrm{BCC}}$

[2] グラフ理論の観点からはグラフ $G = (V, E)$ とその頂点集合 V とを厳密に区別するべきであるものの，本稿では便宜上それらを区別せずに “$x \in \mathbb{G}^d$” などと書く．$\mathscr{N}^d$ の平行移動で定義したため，辺集合は $\{\{x, y\} \subset \mathbb{Z}^d \mid y - x \in \mathscr{N}^d\}$ で与えられることにも注意されたい．

と書く．

つぎに，各 $x \in \mathbb{G}^d$ に対して，$\mathbb{G}^d$ 上の d 次元ランダム・ウォークの遷移確率を[3)]

$$D(x) := \frac{1}{\mathscr{N}^d} \mathbb{1}_{\{x \in \mathscr{N}^d\}}$$

で定義する．これを用いて，ランダム・ウォークのループ $(i = 1)$ およびバブル $(i = 2)$ をそれぞれ

$$\varepsilon_i^{(\nu)} := \sum_{n=\nu}^{\infty} D^{*2n}(o) \times \begin{cases} 1 & [i = 1], \\ (n - \nu + 1) & [i = 2] \end{cases} \tag{1}$$

で定義する[4)]．この内，ループは「原点出発のランダム・ウォークが 2ν 歩費やして戻る確率」を意味する．特に，$\mathbb{G}^d = \mathbb{L}^d$ のときには，最近接点の定義によって，d 次元ランダム・ウォークの遷移確率が 1 次元ランダム・ウォークの遷移確率の積で表される[5)]：$D(x) = \prod_{j=1}^{d} \delta_{|x_j|,1}/2$．体心立方格子のこの性質はランダム・ウォーク量 (1) の上界を評価する際に，Stirling の公式を使えるため便利である．本稿では，紙面の都合上その計算の詳細を省き，表 1 に数値計算の結果を示すに留める．

さらに，関数 $f\colon \mathbb{G}^d \to \mathbb{R}$ に対して，Fourier 変換を $\hat{f}(k) = \sum_{x \in \mathbb{G}^d} f(x) \mathrm{e}^{\mathrm{i}k \cdot x}$ とする．ただし，$k \in \mathbb{T}^d = [-\pi, \pi]^d$ はトーラスの点であり，$x \cdot k$ は Euclid 内積である．ランダム・ウォークの遷移確率の Fourier 変換は

$$\hat{D}(k) = \sum_{x \in \mathbb{G}^d} D(x) \mathrm{e}^{\mathrm{i}k \cdot x} = \begin{cases} \dfrac{1}{d} \displaystyle\sum_{j=1}^{d} \cos k_j & [\mathbb{G}^d = \mathbb{Z}^d], \\ \displaystyle\prod_{j=1}^{d} \cos k_j & [\mathbb{G}^d = \mathbb{L}^d] \end{cases} \tag{2}$$

となる．

表 1: 体心立方格子に於けるランダム・ウォーク量の上界．

d	$\varepsilon_1^{(1)}$	$\varepsilon_1^{(2)}$	$\varepsilon_2^{(1)}$	$\varepsilon_2^{(2)}$
3	$3.932\,160 \times 10^{-1}$	$2.682\,160 \times 10^{-1}$	∞	∞
4	$1.186\,367 \times 10^{-1}$	$5.613\,669 \times 10^{-2}$	∞	∞
5	$4.682\,556 \times 10^{-2}$	$1.557\,556 \times 10^{-2}$	$1.125\,787 \times 10^{-1}$	$6.575\,313 \times 10^{-2}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
9	$2.143\,604 \times 10^{-3}$	$1.904\,782 \times 10^{-4}$	$2.410\,377 \times 10^{-3}$	$2.667\,729 \times 10^{-4}$

2.2 有向パーコレーション

まず，時空間について説明する．本稿では，直積集合 $\mathbb{G}^d \times \mathbb{Z}_+$ を時空間と呼び，その元を太字で $\boldsymbol{x} = (x, t) \in \mathbb{G}^d \times \mathbb{Z}_+$ と表す．以下では，特に断らずに時空間の点 $\boldsymbol{x}$ の空間成分を通常のフォント

---

3) $\mathbb{1}_{\{\bullet\}}$ は命題 $\{\bullet\}$ が真ならば 1，偽ならば 0 を返す定義関数．

4) 関数 $f, g\colon \mathbb{G}^d \to \mathbb{R}$ に対して，$(f * g)(x) = \sum_{y \in \mathbb{G}^d} f(y) g(x - y)$ は畳み込みを表す．また，関数の肩に乗せたものは n 重畳み込み $f^{*n}(x) = \sum_{y \in \mathbb{G}^d} f^{*(n-1)}(y) f(x - y)$ を意味する．

5) $\delta_{\bullet,\bullet}$ は Kronecker デルタ．

$x=(x_1,\dots,x_d)\in\mathbb{G}^d$ に対応させ，また $\boldsymbol{x}$ の時間成分を $\tau(\boldsymbol{x})$ と記す．時空間のボンドを順序付けられた組 $((x,t),(y,t+1))\in(\mathbb{G}^d\times\mathbb{Z}_+)^2$ で定義する．つぎに，有向パーコレーションの定義を述べる．有向パーコレーションとは，各ボンド $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ と $p\in[0,\|D\|_\infty^{-1}]$ に対して[6]，$(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ が開である確率を $q_p(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x})\coloneqq pD(y-x)\delta_{\tau(\boldsymbol{y})-\tau(\boldsymbol{x}),1}$ で，閉である確率を $1-q_p(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x})$ で与えるモデルである．ただし，各々のボンドに対して，開と閉の状態は独立に与える．以上のようにして与えた，ボンドに関する Bernoulli 確率変数の結合分布を $\mathbb{P}_p$，さらにこの確率測度に関する期待値を $\mathbb{E}_p$ と書く．

有向パーコレーションの二点関数と感受率（クラスター・サイズ）を次のように定義する[7]．$n\in\mathbb{N}$ に対して，長さ t の経路とは，時空間 $\mathbb{G}^d\times\mathbb{Z}_+$ 上の順序付けられた集合 $(\boldsymbol{\omega}_0,\boldsymbol{\omega}_1,\dots,\boldsymbol{\omega}_t)$ であって，全ての $s=1,\dots,t$ で $\tau(\boldsymbol{\omega}_s)-\tau(\boldsymbol{\omega}_{s-1})=1$ を満たすものである．$\boldsymbol{x}$ から $\boldsymbol{y}$ への長さ $t=\tau(\boldsymbol{y})-\tau(\boldsymbol{x})$ の経路全体を $\mathscr{W}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ と記し，便宜上 $\mathscr{W}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x})\equiv\{(\boldsymbol{x})\}$ と定める．長さ $t=\tau(\boldsymbol{y})-\tau(\boldsymbol{x})$ の経路 $\vec{\boldsymbol{\omega}}=(\boldsymbol{\omega}_0,\dots,\boldsymbol{\omega}_t)\in\mathscr{W}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ が開経路であるとは，$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{y}$ または 全ての $s=1,\dots,t$ に対してボンド $(\boldsymbol{\omega}_{s-1},\boldsymbol{\omega}_s)$ が開であることをいう．時空間の 2 点 $\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{y}$ が連結であるとは，開経路 $\vec{\boldsymbol{\omega}}\in\mathscr{W}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ が少なくとも一つ存在することをいい，$\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{y}$ と書く．このとき，$\boldsymbol{x}=(x,t)\in\mathbb{G}^d\times\mathbb{Z}_+$ に対して，有向パーコレーションの二点関数 φ_p を

$$\varphi_p(\boldsymbol{x})=\mathbb{P}_p(\boldsymbol{o}\to\boldsymbol{x})=\mathbb{P}_p\left(\bigcup_{\vec{\boldsymbol{\omega}}\in\mathscr{W}(\boldsymbol{o},\boldsymbol{x})}\{\,\vec{\boldsymbol{\omega}}\text{ is occupied}\,\}\right)$$

によって定義する．ここで，$\boldsymbol{o}\coloneqq(o,0)$ である．また，$\mathcal{C}(\boldsymbol{o})=\{\,\boldsymbol{x}\in\mathbb{G}^d\times\mathbb{Z}_+\mid\boldsymbol{o}\to\boldsymbol{x}\,\}$ を（原点を含む）クラスターと呼ぶ．これを用いて，有向パーコレーションの感受率 χ_p と臨界点 p_{c} を[8]

$$\chi_p=\mathbb{E}_p\big[|\mathcal{C}(\boldsymbol{o})|\big]=\sum_{\boldsymbol{x}\in\mathbb{G}^d\times\mathbb{Z}_+}\varphi_p(\boldsymbol{x}),\quad p_{\mathrm{c}}=\sup\left\{\,p\in[0,\|D\|_\infty^{-1}]\;\middle|\;\chi_p<\infty\,\right\},$$

によって定義する．臨界指数 γ は感受率の臨界点近傍 $(p\uparrow p_{\mathrm{c}})$ での漸近的な振る舞いを特徴付けるものとして，$\chi_p\asymp(p_{\mathrm{c}}-p)^{-\gamma}$ で定義する．ここで，$x\to a$ で $f(x)\asymp g(x)$ とは，$\mathcal{O}(g(x))\le f(x)\le\mathcal{O}(g(x))$ となることである．

2.3 Fourier-Laplace 変換

主結果を述べるために必要となるので，Fourier-Laplace 変換とそれに関連する結果について列挙する．二点関数 $\varphi_p(x,t)$ の x に関する Fourier 変換を $\Phi_p(k;t)=\sum_{x\in\mathbb{G}^d}\varphi_p(x,t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\cdot x}$ とすると，$\{\log\Phi_p(k;t)/t\}_{t=1}^\infty$ が劣加法的数列になることによって，極限 $m_p^{-1}=\lim_{t\uparrow\infty}\Phi_p(k;t)^{1/t}$ が存在する [5, Appendix. II]．$p<p_{\mathrm{c}}$ では $m_p<1$ であり，特に $m_{p_{\mathrm{c}}}=1$ が成り立つ [9]．このように定義

[6] $f\colon\mathbb{G}^d\to\mathbb{R}$ に対して，$\|f\|_\infty=\sup_{x\in\mathbb{G}^d}|D(f)|$．また，第 1 節では p を確率としていたが，以下では D と掛け合わせた $pD(\bullet)$ が確率である．

[7] 第 1 節では，説明の便宜上，生存確率に関する相転移も述べたものの，以下では専ら感受率のみを扱う．この節で定義する記号を用いると，生存確率は $\Theta_p=\mathbb{P}_p(|\mathcal{C}(\boldsymbol{o})|=\infty)\asymp(p-p_{\mathrm{c}})^\beta$ と表される．また，一般に生存確率の臨界点 $p_{\mathrm{H}}=\inf\{\,p\in[0,\|D\|_\infty^{-1}]\mid\Theta_p>0\,\}$ と感受率の臨界点 p_{c} が一致するとは限らない．しかし，本稿で扱うグラフでは両者が一致することが知られているため，特に区別しないで用いる．

[8] 集合 C に対して，$|C|$ は集合の濃度．

すると，m_p は Laplace 変換

$$\hat{\varphi}_p(k,z) \coloneqq \sum_{t\in\mathbb{Z}_+} \Phi_p(k;t)z^t = \sum_{(x,t)\in\mathbb{G}^d\times\mathbb{Z}_+} \varphi_p(x,t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\cdot x}z^t$$

の収束半径となる．

また，ランダム・ウォークの二点関数を $Q_p(x,t) = p^t D^{*t}(x)\mathbb{1}_{\{t\in\mathbb{Z}_+\}}$ で定義する．$Q_1(x,t)$ の Laplace 変換として，ランダム・ウォークの Green 関数が

$$S_p(x) \coloneqq \sum_{t\in\mathbb{Z}_+} Q_1(x,t)p^t = \sum_{t\in\mathbb{Z}_+} p^t D^{*t}(x) \quad (x\in\mathbb{G}^d,\ p\in[0,1])$$

で与えられる．Bool の不等式[9]によって，$\varphi_1(x,t) \le Q_1(x,t)$ および $p_\mathrm{c} \ge 1$ が示される．

3　主結果

Aizenman と Newman [1] はトライアングル条件と呼ばれる十分条件を満たせば（有向でない）無向パーコレーションの臨界指数が平均場臨界指数 $\gamma = 1$ に退化することを示した．Barsky と Aizenman [2] はこの条件を有向パーコレーションにも適用できるように統一的な形で再定義した．$\|(x,t)\|_2 = (\sum_{i=1}^d |x_i|^2 + t^2)^{1/2}$ および時空間の畳み込みを $\varphi_p^{\star n}(x,t) = (\varphi_p^{\star(n-1)} \star \varphi_p)(x,t) \coloneqq \sum_{(y,s)\in\mathbb{G}^d\times\mathbb{Z}_+} \varphi_p^{\star(n-1)}(y,s)\varphi_p(x-y,t-s)$ と書けば，トライアングル条件は

$$\lim_{R\to\infty} \sup\left\{ \sum_{\boldsymbol{y}\in\mathbb{G}^d\times\mathbb{Z}_+} \varphi_{p_\mathrm{c}}^{\star 2}(\boldsymbol{y})\varphi_{p_\mathrm{c}}(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}) \;\middle|\; \|\boldsymbol{x}\|_2 \ge R \right\} = 0 \tag{3}$$

と表される．もし (3) が成り立てば，$\chi_p^{-2}\,\mathrm{d}\chi_p\big/\mathrm{d}p = -\,\mathrm{d}\chi_p^{-1}\big/\mathrm{d}p$ に注意して微分不等式

$$\epsilon_R\left(1-\sup\left\{ \sum_{\boldsymbol{y}\in\mathbb{G}^d\times\mathbb{Z}_+} \varphi_p^{\star 2}(\boldsymbol{y})\varphi_p(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}) \;\middle|\; \|\boldsymbol{x}\|_2 \ge R \right\}\right)\chi_p^2 \le \frac{\mathrm{d}\chi_p}{\mathrm{d}p} \le \chi_p^2 \tag{4}$$

の各辺を積分することで，$\gamma = 1$ が得られる．ただし，ϵ_R は $R \gg 1$ を固定したとき $\epsilon_R \ll 1$ となるような定数である．

トライアングル条件 (3) を確認するために，次の赤外評価を証明する．これが本研究の主結果である．なお，赤外評価が (3) を導くことは [8] を参照されたい．

定理 1 (赤外評価 [Chen, Handa and K.])**.** 単純立方格子 $\mathbb{Z}^{d\ge 183}\times\mathbb{Z}_+$ および体心立方格子 $\mathbb{L}^{d\ge 9}\times\mathbb{Z}_+$ 上の最近接有向パーコレーションに対して，定数 $K\in(0,\infty)$ が存在して，

$$|\hat{\varphi}_p(k,z)| \le \frac{K}{\left|1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\arg z}\hat{D}(k)\right|} = K|\hat{S}_{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\arg z}}(k)| \tag{5}$$

が任意の $p\in[0,p_\mathrm{c})$ と $k\in\mathbb{T}^d$ と $|z|\in[1,m_p)$ を満たす $z\in\mathbb{C}$ で成り立つ．

---

[9] 事象列 $\{A_i\}_{i=1}^\infty$ に対して，$\mathbb{P}_p(\bigcup_{i=1}^\infty A_i) \le \sum_{i=1}^\infty \mathbb{P}_p(A_i)$．

4　主結果の証明

4.1　Bootstrapping argument

定理 1 の証明は bootstrapping argument と呼ばれる手法に基づく．その詳細については [11, Lemma 5.9] や [6, Lemma 8.1]，あるいは講演者の数学総合若手研究集会に於ける過去のテクニカルレポートに譲ることとし，本稿では必要となる命題についてのみ言及する．

$k, l \in \mathbb{T}^d$ と $|\mu| \in [0,1]$ を満たす $\mu \in \mathbb{C}$ に対して，

$$\hat{U}_\mu(k,l) = (1-\hat{D}(k))\Bigg(\frac{|\hat{S}_\mu(l+k)|+|\hat{S}_\mu(l-k)|}{2}|\hat{S}_\mu(l)| + (1-\hat{D}(2l))|\hat{S}_\mu(l)||\hat{S}_\mu(l+k)||\hat{S}_\mu(l-k)|\Bigg), \quad (6)$$

および $p \in [0, p_\mathrm{c})$ と $|z| \in [1, m_p)$ を満たす $z \in \mathbb{C}$ に対して，

$$\mu_p(z) = \big(1-\hat{\varphi}_p(0,|z|)^{-1}\big)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\arg z}$$

とおく．また，$\mathbb{T}^d$ 上の関数 $\hat{f}$ に対して，$\hat{\Delta}_k \hat{f}(l) = \hat{f}(l+k) + \hat{f}(l-k) - 2\hat{f}(l)$ と書く．以上から $\{g_i\}_{i=1}^3$ を[10)]

$$g_1(p,m) \coloneqq p(m \vee 1), \quad (7)$$

$$g_2(p,m) \coloneqq \sup_{\substack{k\in\mathbb{T}^d,\\ z\in\mathbb{C}:\,|z|\in\{1,m\}}} \frac{|\hat{\varphi}_p(k,z)|}{|\hat{S}_{\mu_p(z)}(k)|}, \quad (8)$$

$$g_3(p,m) \coloneqq \sup_{\substack{k,l\in\mathbb{T}^d,\\ z\in\mathbb{C}:\,|z|\in\{1,m\}}} \frac{\big|\frac{1}{2}\hat{\Delta}_k\big(\hat{q}_p(l,z)\hat{\varphi}_p(l,z)\big)\big|}{\hat{U}_{\mu_p(z)}(k,l)} \quad (9)$$

によって定義する．以下の命題は [11, Lemma 5.9] の十分条件である．これらを示されれば，各 $i = 1,2,3$ に対して K_i が存在して $g_i(p,m) < K_i$ が成り立つ，すなわち $i = 2$ の上界から主結果 1 が帰結される．

命題 2 (連続性)**.** $p \in [0, p_\mathrm{c})$ を固定する毎に，$m \in [1, m_p)$ に関して $\{g_i\}_{i=1}^3$ は連続である．また，$p \in [0, p_\mathrm{c})$ に関して $\{g_i(p,1)\}_{i=1}^3$ は連続である．

命題 3 (初期条件)**.** 或る有限な定数 $\{K_i\}_{i=1}^3$ が存在して，全ての $i = 1,2,3$ に対して $g_i(0,1) < K_i$ が成り立つ．

命題 4 (Bootstrapping argument)**.** $\mathbb{Z}^{d\geq 183} \times \mathbb{Z}_+$ および $\mathbb{L}^{d\geq 9} \times \mathbb{Z}_+$ 上の最近接有向パーコレーションに対して，$p \in (0, p_\mathrm{c})$ と $|z| \in (1, m_p)$ を満たす $z \in \mathbb{C}$ を固定する．このとき，命題 3 と同じ $\{K_i\}_{i=1}^3$ に対して，

$$\forall i = 1,2,3, \quad [g_i(p,m) \leq K_i \implies g_i(p,m) < K_i]$$

10) ここで，$a \vee b = \max\{a,b\}$ である．同様に，$a \wedge b = \min\{a,b\}$ という表記も以下で用いる．

が成り立つ．

命題 2 と命題 3 の証明は [7] に譲り，本稿では特に命題 4 の証明の概略についてのみ述べる．

4.2 レース展開

ランダム・ウォークの二点関数 Q_p に対して，再生方程式

$$Q_p(\boldsymbol{x}) = \delta_{\boldsymbol{o},\boldsymbol{x}} + (q_p \star Q_p)(\boldsymbol{x})$$

が成り立つことはよく知られている．ここで，$\boldsymbol{x} = (x,t) \in \mathbb{G}^d \times \mathbb{Z}_+$ に対して，$\delta_{\boldsymbol{o},\boldsymbol{x}} = \delta_{o,x}\delta_{o,t}$ とした．レース展開は有向パーコレーションの二点関数 φ_p に対する或る種の Q_p からの摂動展開を与えるものである．

命題 5 (**レース展開** [10])**.** 任意の $p < p_{\mathrm{c}}$ と $N \in \mathbb{Z}_+$ に対して，$\mathbb{G}^d \times \mathbb{Z}_+$ 上の非負関数 $\{\pi_p^{(n)}\}_{n=0}^N$ が存在して，再生方程式

$$\varphi_p(\boldsymbol{x}) = \delta_{o,\boldsymbol{x}} + \Pi_p^{(N)}(\boldsymbol{x}) + \Big((\delta_{\boldsymbol{o},\bullet} + \Pi_p^{(N)}) \star q_p \star \varphi_p \Big)(\boldsymbol{x}) + (-1)^{N+1} R_p^{(N+1)}(\boldsymbol{x}), \tag{10}$$

が成り立つ．ただし，

$$\Pi_p^{(N)}(\boldsymbol{x}) = \sum_{n=0}^{N} (-1)^n \pi_p^{(n)}(\boldsymbol{x})$$

であり，剰余項 $R_p^{(N+1)}(\boldsymbol{x})$ は

$$0 \le R_p^{(N+1)}(\boldsymbol{x}) \le \Big(\pi_p^{(N)} \star \varphi_p\Big)(\boldsymbol{x}).$$

と評価される．

下記の補題 6 により，$\{\pi_p^{(N)}\}_{N=1}^\infty$ の交代級数が絶対収束することがわかる．ゆえに，$\boldsymbol{x} \in \mathbb{G}^d \times \mathbb{Z}_+$ に対して，$\lim_{N\to\infty} \pi_p^{(N)}(\boldsymbol{x}) = 0$ を仮定してよい．このとき，$N \to \infty$ で $R_p^{(N)}(\boldsymbol{x}) \to 0$ となるから，無限級数

$$\Pi_p(\boldsymbol{x}) \coloneqq \lim_{N\to\infty} \Pi_p^{(N)}(\boldsymbol{x}) = \sum_{N=0}^{\infty} (-1)^N \pi_p^{(N)}(\boldsymbol{x}) \tag{11}$$

は well-defined である．

4.3 レース展開係数の評価

レース展開の絶対収束性を示すために，交代級数 (11) の上界を得る必要がある．$\varphi_p^{(m)}(x,t) = m^t \varphi_p(x,t)$ とおき，$\lambda, \rho \in \mathbb{N}$ と $m > 0$ と $k \in \mathbb{T}^d$ に対して，

$$B_{p,m}^{(\lambda,\rho)} \coloneqq \sup_{\boldsymbol{x}} \sum_{\boldsymbol{y}} \left(q_p^{\star\lambda} \star \varphi_p\right)(\boldsymbol{y}) \left(m^\rho q_p^{\star\rho} \star \varphi_p^{(m)}\right)(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}),$$

$$T_{p,m}^{(\lambda,\rho)} \coloneqq \sup_{\boldsymbol{x}} \sum_{\boldsymbol{y}} \left(q_p^{\star\lambda} \star \varphi_p^{\star 2}\right)(\boldsymbol{y}) \left(m^\rho q_p^{\star\rho} \star \varphi_p^{(m)}\right)(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}),$$

$$\hat{V}_{p,m}^{(\lambda,\rho)}(k) \coloneqq \sup_{\boldsymbol{x}} \sum_{\boldsymbol{y}} \left(q_p^{\star\lambda} \star \varphi_p\right)(\boldsymbol{y}) \left(1 - \cos k \cdot y\right) \left(m^\rho q_p^{\star\rho} \star \varphi_p^{(m)}\right)(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}).$$

と定義する. さらに, $\Pi_p(\boldsymbol{x})$ を二つに分ける. すなわち $\Pi_p^{\mathrm{even}}(\boldsymbol{x}) = \sum_{N=1} \pi_p^{(2N)}(\boldsymbol{x})$ および $\Pi_p^{\mathrm{odd}}(\boldsymbol{x}) = \pi_p^{(1)}(\boldsymbol{x}) - \pi_p^{(0)}(\boldsymbol{x}) + \sum_{N=1} \pi_p^{(2N+1)}(\boldsymbol{x})$ とする.

補題 6. $\varepsilon = \varepsilon_1^{(1)}\varepsilon_1^{(2)} \vee \varepsilon_1^{(1)}\varepsilon_2^{(2)} \vee \varepsilon_1^{(2)}\varepsilon_2^{(1)} \vee \varepsilon_2^{(1)}\varepsilon_2^{(2)} \vee (\varepsilon_1^{(1)})^3 \vee (\varepsilon_2^{(1)})^3$ とおく．$2T_{p,m}^{(1,1)} < 1$ が成り立つならば，交代級数 (11) が絶対収束し，かつ

$$\begin{gathered}
\hat{\Pi}_p^{\mathrm{even}}(0,m) \le \mathcal{O}(\varepsilon), \\
\hat{\Pi}_p^{\mathrm{odd}}(0,m) \le \frac{1}{2} B_{p,m}^{(2,2)} + \mathcal{O}(\varepsilon), \\
\sum_{(x,t)} \left(\Pi_p^{\mathrm{even}}(x,t) + \Pi_p^{\mathrm{odd}}(x,t)\right) m^t t \le \frac{1}{2}\left(B_{p,m}^{(2,2)} + T_{p,m}^{(2,2)}\right) + \mathcal{O}(\varepsilon), \\
\sum_{(x,t)} \left(\Pi_p^{\mathrm{even}}(x,t) + \Pi_p^{\mathrm{odd}}(x,t)\right) m^t \left(1 - \cos k \cdot x\right) \le \frac{1}{2}\hat{V}_{p,m}^{(2,2)}(k) + 2\hat{V}_{p,1}^{(2,2)}(k) B_{p,m}^{(0,2)} + \mathcal{O}(\varepsilon).
\end{gathered}$$

と評価できる．

4.4 Bootstrapping 関数の評価

交代級数 (11) が絶対収束すると仮定する．(10) の両辺の Fourier-Laplace 変換を取ると，

$$\hat{\varphi}_p(k,z) = \frac{1 + \hat{\Pi}_p(k,z)}{1 - \hat{q}_p(k,z)(1 + \hat{\Pi}_p(k,z))}. \tag{12}$$

となる．この表式を用いると，g_1 の上界

$$g_1(p,m) \le \frac{1}{1 + \hat{\Pi}_p^{\mathrm{even}}(0,m) - \hat{\Pi}_p^{\mathrm{odd}}(0,m)} \le \frac{1}{1 - \hat{\Pi}_p^{\mathrm{odd}}(0,m)} \tag{13}$$

が得られる．補題 6 で評価された量が現れていることに注目されたい．また，[11, Lemma 5.7] を若干修正した補題を用いることによって，g_3 の上界

$$\begin{aligned}
g_3(p,m) \le \left(1 \vee \frac{g_2(p,m)}{1 - \hat{\Pi}_p^{\mathrm{even}}(0,m) - \hat{\Pi}_p^{\mathrm{odd}}(0,m)}\right)^3 K_1^2 \\
\times \Bigg(1 + 2\left(\hat{\Pi}_p^{\mathrm{even}}(0,m) + \hat{\Pi}_p^{\mathrm{odd}}(0,m)\right) \\
+ 2\left\| \frac{(\hat{\Pi}_p^{\mathrm{even}}(0,m) + \hat{\Pi}_p^{\mathrm{odd}}(0,m)) - (\hat{\Pi}_p^{\mathrm{even}}(\bullet,m) + \hat{\Pi}_p^{\mathrm{odd}}(\bullet,m))}{1 - \hat{D}(\bullet)} \right\|_\infty \Bigg)^2
\end{aligned} \tag{14}$$

も得られる．これらは単純立方格子 $\mathbb{Z}^d \times \mathbb{Z}_+$ でも体心立方格子 $\mathbb{L}^d \times \mathbb{Z}_+$ でも成り立つ．一方で，g_2 の上界はそれぞれの格子で変わる上に，補題を新たに 3 つ必要とする．結果のみ示すと，

$$
\begin{aligned}
g_2(p,m) \le{}& \frac{1+\hat{\Pi}_p^{\mathrm{even}}(0,m)+\hat{\Pi}_p^{\mathrm{odd}}(0,m)}{1-\hat{\Pi}_p^{\mathrm{odd}}(0,m)} + \frac{K_2}{1-\hat{\Pi}_p^{\mathrm{odd}}(0,m)}\Biggl(2\hat{\Pi}_p^{\mathrm{even}}(0,m) \\
&+ cK_1\biggl(\pi\sum_{(x,t)}\Bigl(\Pi_p^{\mathrm{even}}(x,t)+\Pi_p^{\mathrm{odd}}(x,t)\Bigr)m^t t\biggr) \\
&\vee \biggl(\sum_{(x,t)}\Bigl(\Pi_p^{\mathrm{even}}(x,t)+\Pi_p^{\mathrm{odd}}(x,t)\Bigr)m^t\frac{1-\cos k\cdot x}{1-\hat{D}(k)}\biggr)\Biggr)
\end{aligned}
\tag{15}
$$

となる．ただし，単純立方格子，体心立方格子それぞれに対して $c=4,2$ である．この上界を示すのに，講演者らは [8] の評価を修正する必要があった．詳しくは [4, Remark 1] を参照されたい．

4.5　ランダム・ウォーク量によるダイアグラムの評価

上で定義した $B_{p,m}^{(\lambda,\rho)}$，$T_{p,m}^{(\lambda,\rho)}$ および $V_{p,m}^{(\lambda,\rho)}(k)$ は次の補題のように評価できる．これらの上界は（単なる定数を除いて）$\{K_i\}_{i=1}^3$ とランダム・ウォーク量 (1) のみで表されていることに注目されたい．

補題 7. $g_i(p,m) \le K_i$, $i=1,2,3$ を仮定する．各 $\mu,\rho\in\mathbb{N}$ と $p\in[0,p_\mathrm{c})$ と $m\in[1,m_p)$ に対して，

$$
B_{p,m}^{(\lambda,\rho)} \le K_1^{\lambda+\rho}K_2^2\varepsilon_1^{(\lfloor(\lambda+\rho)/2\rfloor)}, \tag{16}
$$

$$
T_{p,m}^{(\lambda,\rho)} \le \sqrt{2}K_1^{\lambda+\rho}K_2^3\varepsilon_2^{(\lfloor(\lambda+\rho)/2\rfloor)}, \tag{17}
$$

$$
\left\|\frac{\hat{V}_{p,m}^{(\lambda,\rho)}}{1-\hat{D}}\right\|_\infty \le
\begin{cases}
K_1^2\|D\|_\infty + K_1^3K_2\sqrt{\varepsilon_1^{(2)}} + \left\|\dfrac{\hat{V}_{p,m}^{(2,1)}}{1-\hat{D}}\right\|_\infty & [\lambda=\rho=1], \\
\lambda(\lambda-1)K_1^{\lambda+\rho}K_2^2\varepsilon_1^{(\lfloor(\lambda+\rho-1)/2\rfloor)} & \\
\quad + \lambda K_1^{\lambda+\rho-1}K_2K_3(\sqrt{2}+4)\varepsilon_2^{(\lfloor(\lambda+\rho-1)/2\rfloor)} & [\lambda\ge 2 \text{ or } \rho\ge 2].
\end{cases}
\tag{18}
$$

4.6　命題 4 の証明

以上の評価を合わせると，命題 4 が証明できる．体心立方格子の場合についてのみ示す（単純立方格子でも数値が変わる程度で同様）．具体的に

$$
d=9,\quad K_1=1.0020,\quad K_2=1.0500,\quad K_3=1.2500,
$$

を代入する（これらは命題 3 を満たすように取る）．補題 7 と表 1 によって，

$$
\begin{aligned}
B_{p,m}^{(2,2)} &\le 2.116\,88\times10^{-4}, \\
B_{p,m}^{(0,2)} &\le 2.372\,79\times10^{-3}, \\
T_{p,m}^{(2,2)} &\le 4.402\,47\times10^{-4}, \\
T_{p,m}^{(1,1)} &\le 3.961\,90\times10^{-3}, \\
\frac{\hat{V}_{p,m}^{(2,2)}(k)}{1-\hat{D}(k)} &\le 3.922\,76\times10^{-2}
\end{aligned}
$$

を得る．この内，4 番目の不等式は補題 6 の十分条件であることに注意されたい．さらに，補題 6 によって，

$$\begin{aligned} \hat{\Pi}_p^{\mathrm{even}}(0,m) &\le 1.000\,00 \times 10^{-5}, \\ \hat{\Pi}_p^{\mathrm{odd}}(0,m) &\le 1.158\,44 \times 10^{-4}, \\ \sum_{(x,t)} \left(\Pi_p^{\mathrm{even}}(x,t) + \Pi_p^{\mathrm{odd}}(x,t)\right) m^t t &\le 4.000\,00 \times 10^{-4}, \\ \sum_{(x,t)} \left(\Pi_p^{\mathrm{even}}(x,t) + \Pi_p^{\mathrm{odd}}(x,t)\right) m^t \frac{1-\cos k\cdot x}{1-\hat{D}(k)} &\le 2.100\,00 \times 10^{-2} \end{aligned}$$

となるから，交代級数 (11) が絶対収束する．最後に，(13) と (15) と (14) によって，

$$\begin{aligned} g_1(p,m) &\le 1.0002 < K_1, \\ g_2(p,m) &\le 1.0445 < K_2, \\ g_3(p,m) &\le 1.2433 < K_3 \end{aligned}$$

を得る． □

参考文献

[1] M. Aizenman and C.M. Newman. Tree graph inequalities and critical behavior in percolation models. *J. Stat. Phys.* **36** (1984): 107–143.

[2] D.J. Barsky and M. Aizenmman. Percolation critical exponents under the triangle condition. *Ann. Probab.* **19** (1991): 1520–1536.

[3] S.R. Broadbent and J.M. Hammersley. Percolation processes. I. Crystals and mazes. *Proc. Cambridge Philos. Soc.* **53** (1957): 629–641.

[4] L.-C. Chen, S. Handa and Y. Kamijima. The mean-field behavior of the nearest-neighbor oriented percolation on the BCC lattice above $8+1$ dimensions. arXiv:2106.14211.

[5] G. Grimmett. *Percolation* (2nd ed., Springer, 1999).

[6] M. Heydenreich and R. van der Hofstad. *Progress in high-dimensional percolation and random graphs.* Springer, Cham, 2017.

[7] Y. Kamijima. *Mean-field behavior for percolation models.* Ph.D. thesis, Hokkaido University. To appear.

[8] B.G. Nguyen and W.-S. Yang. Triangle condition for oriented percolation in high dimensions. *Ann. Prob.* **21** (1993): 1809–1844.

[9] B.G. Nguyen and W.-S. Yang. Gaussian limit for critical oriented percolation in high dimensions. *J. Stat. Phys.* **78** (1995): 841–876.

[10] A. Sakai. Mean-field critical behavior for the contact process. *J. Stat. Phys.* **104** (2001): 111–143.

[11] G. Slade. *The lace expansion and its applications. Lecture Notes in Mathematics* **1879**. Springer, Berlin, 2006.