

平面 n 体問題の周期解と組みひも

京都大学大学院情報学研究科数理工学専攻

梶原唯加 (Yuika KAJIHARA)

概要

平面 n 体問題の周期解に時間軸を付け加えて 3 次元上で解をプロットすると、 n 本からなる組みひも (n -braid) ができる。このようにして平面 n 体問題の周期解から実現される n -braid を考えたとき、あらゆる組みひもが実現可能かどうか？という問いを n 体問題の研究で著名な Montgomery が近年の講演の中で提起している。本講演では、 n 体問題と組みひもの研究背景を紹介し、既知の周期解から得られる組みひもについて考察する。

1 導入

n 体問題とは、 n 個の質点が相互作用を受けながら動くとき、どのような振る舞いをするかを調べる問題を指す。Montgomery はこの数十年の間、 n 体問題の研究の第一線で活躍する数学者の一人であり、特に、Chenciner と共に 3 体問題における 8 の字解 [1] の厳密な存在証明を初めて行ったことでも著名な人物である。彼は、近年の講演の中で n 体問題に関する open problem をいくつか提起した。この中の一つに次のようなものがある：

Q: 任意の (pure) braid に対してそれを実現するような周期解は存在するだろうか？

この表現は Montgomery の講演スライドの文章を少し意識した形ではあるが、組みひもと n 体問題の周期解の振る舞いと対応は、この分野において大きな研究テーマの一つである。

まず、 n 体問題と周期解の関係について触れておこう。2 体問題は簡易な変形によってケプラー問題（原点に固定された質点から万有引力を受けて運動する質点の振る舞いを表すモデル）に帰着され、一般解を求めることができる。一方で、 $n \geq 3$ の場合は一般には解けない（可積分でない）ことが知られている。そこで、 $n \geq 3$ の場合の n 体問題の力学系を解析するにあたって、特殊解（特に周期解）を求めよう、という発想が出てくる。現在では様々な周期解の存在が知られているが、その中でも最も有名なのが冒頭に述べた 8 の字解である。これは等質量 3 体問題の周期解で、3 点が互いに 8 の字を描き、互いを追跡しあうふるまいをする平面 3 体問題の解である。8 の字解を含め、既知な周期解の多くが変分法によって存在証明がなされているが、詳しい議論はここでは割愛する。

1.1 組みひもの基本事項

この節では組みひもについての基本的な定義などを確認する。組みひもについてある程度知識のある方は読み飛ばしてもらって差し支えない。ここに記載してあることに関しては概ね [5] と [6] を参考にした。

組みひもとは、「立方体の向かい合ったある二つの面に同じ数の点を同じ位置にうち、これらを結んで出来上がる図形」である。（説明の簡略化のために、立方体としたが、立方体である必要はない。）例えば、図 1 はどれも 4 本の紐を結んでできる組みひもである。

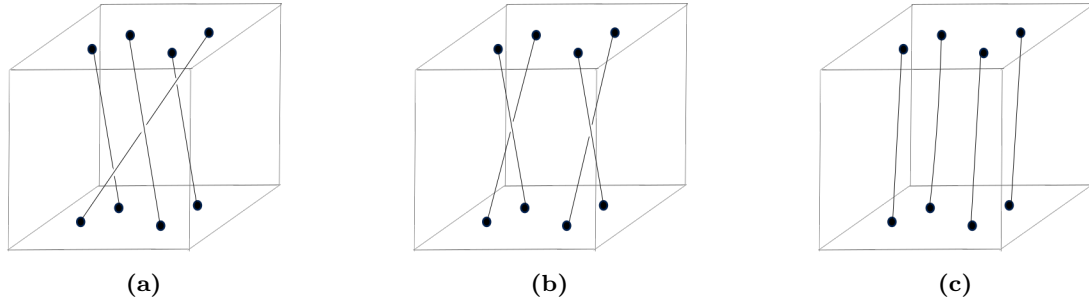


図 1: 組みひもの例

組みひもを数学的に定義しよう。立方体 B を $B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \leq x, y, z \leq 1\}$ で定義し、

$$A_i(t) = (x_i(t), y_i(t), t) \in B \quad (i = 1, \dots, n)$$

とおく。ただし、各 i について $x_i, y_i \in C^0([0, 1])$, $i \neq j$ なら任意の $t \in [0, 1]$ で $(x_i(t), y_i(t)) \neq (x_j(t), y_j(t))$ とし、

$$\{(x_i(0), y_i(0)) \mid 1 \leq i \leq n\} = \{(x_i(1), y_i(1)) \mid 1 \leq i \leq n\}$$

とする。

$$A([0, 1]) = \bigcup_{i=1}^n A_i([0, 1])$$

としたとき、 $A([0, 1])$ で定まる図形が n 次の組みひも (n -braid) である。特に、任意の i について $(x_i(0), y_i(0)) = (x_i(1), y_i(1))$ が成り立つときは pure braid と呼ばれる。ここで、 $t = 0, 1$ の点を固定した元で、内部で紐が交わることなく連続変形によって写り合う組みひもは同値とみなす。

組みひもを式で表そうとすると少し回りくどいが、図に描いてみると、それらは基本的な要素によって構成されていることがわかる。簡略化のため $(x_i(0), y_i(0))$ は一直線上に並んでいるとし、左の点から順に $1, \dots, n$ と番号付けされているとしよう。適当な連続変形を施すことによって「二つの紐の交わり」が各時刻で一組ずつしか起きないとしてよい。つまり、図 2 のように各ブロックごとに二つの紐の交わっている図形の積み重ねで表現できる。

紐の交わり方はどちらが上か下かで 2 パターンある。 i 番目と $i + 1$ 番目の紐の交わりを i 番目が上、下でそれぞれ σ_i, σ_i^{-1} としよう。例えば、図 2(a) の一番下のブロックが σ_1 、真ん中が σ_2^{-1} 、一番上が σ_3 である。ブロックは上から読んでいくとすると、図 2(a) は $\sigma_3 \sigma_2^{-1} \sigma_1$, (b) は $\sigma_3 \sigma_1$ となる。また、紐同士の交わりが全くない組みひもは 1 と表すことにし、これを自明な組みひもと呼ぶ。例えば、4 次の場合は、図 1, 2 (c) が自明な組みひもである。組みひもの構成の仕方から以下の性質が成り立つことがわかる：

$$\begin{aligned} \sigma_i \sigma_j &= \sigma_j \sigma_i \quad (|i - j| \geq 2) \\ \sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i &= \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1} \end{aligned}$$

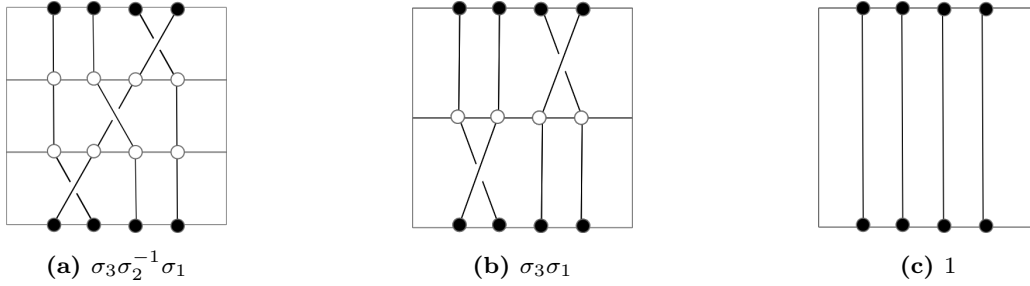


図 2: 組みひもの分割

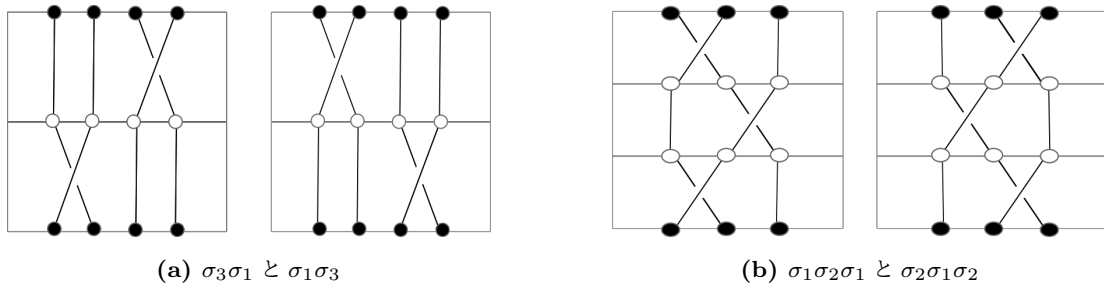


図 3: 同じ組みひも

これらは実際に図を描いてみるとわかりやすいので、図 3 を参照されたい。

そして、二つの別の組みひも同士を積み重ねることで、文字通り「積」を考えることができる。積み重ねると、立方体ではなくなってしまうが、ぎゅっと縦に圧縮して立方体とみなせばよい。積も上から順に読むとして、組みひも x の下に y を重ねたとき出来上がる組みひもを xy とする。

さて、上記で定義した積によって組みひも群が得られることを確認しよう。証明は平易であるので、事実だけ列挙する。

- 単位元の存在：単位元 e は自明な組みひもである。
- 逆元の存在： $x = \sigma_{k_1}^{l_1} \cdots \sigma_{k_m}^{l_m}$ とする。このとき $y = \sigma_{k_m}^{-l_m} \cdots \sigma_{k_1}^{-l_1}$ とすれば、 $xy = yx = e$ が成り立つ。
- 結合法則：任意の組みひも x, y, z について $(xy)z = x(yz)$ が成り立つ。

以上より、組みひもは上記で定めた積によって群をなす。これを組みひも群と呼ぶ。以下、 n 次の組みひも群を B_n と表す。

Remark 1. ここでは平面上の組みひもしか扱わないが、より一般には $n \geq 2$ の n 次元多様体 M 上で定義でき、また n 点が直線的に並んでいる必要もない。 $F_n M$ を

$$F_n M = \{(x_1, \dots, x_n) \in \prod_{i=1}^n M \mid x_i \neq x_j \ (i \neq j)\}$$

で定義すると、基本群 $\pi_1 F_n M$ が *pure braid group* を与える。さらに、 (x_1, \dots, x_n) の添字の入れ替えによる違いを無視した（添字の順列で同値類をとった）ものを $B_n M$ とすると、 $\pi_1 B_n M$ が *braid group* を与える。

1.2 n 体問題の周期解と組みひも

さて、組みひもの性質がわかったところで話を平面 n 体問題の周期解の話題に戻そう。平面 n 体問題の周期解に対し、時間軸を z 軸として選んで軌道を 1 周期分プロットすると、 n 次の組みひもができる。これらの関係について言及しているのが冒頭に述べた Montgomery の問いである。(ここで周期解としているのは、 n 次の組みひもはその性質から立方体の上面と下面にある n 点が集合として同じであるから。)

8 の字解の場合は、3 点の集合は $1/3$ 周期で元の位置に戻ってくる。 $1/3$ 周期分の軌道の概略と braid を記したのが図 4 である。 braid の積の取り方と見方が逆になってしまっていてわかりにくい、図 4 の左側の時系列としては下から上にとってみていただきたい。

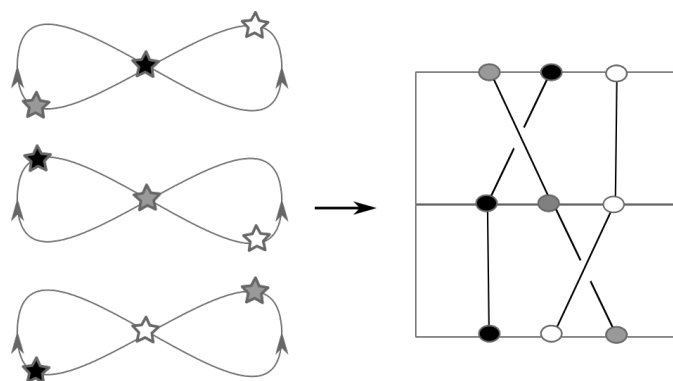


図 4: 8 の字解から得られる 3 次の組みひも

上記の操作によって平面 n 体問題の周期解から構成される組みひもにどのような性質があるのかを次節で見ていくことにしよう。ただし注意が必要なのは、前節では定義した組みひもをある一方向から見て描いていた。観測する方向を固定したもつで立方体をひっくり返したり、回転させたりすると組みひもの形は変わってしまう。周期解から組みひもを描いたときに、どの方向から見るかによって一つ一つ区別しては具合が悪い。そこで

$$\mathcal{B}_n = B_n / Z(B_n)$$

の共役類 (braid type) を考える。ここで、 $Z(B_n)$ とは、 Δ_n^2 で生成される無限巡回群である。ただし、

$$\Delta_n = (\sigma_1 \sigma_2 \cdots \sigma_{n-1})(\sigma_1 \sigma_2 \cdots \sigma_{n-2}) \cdots (\sigma_1 \sigma_2) \sigma_1$$

とする。 Δ_n は half twist, Δ_n^2 は full twist と呼ばれる。なぜこのような呼び方をするかは、具体的に組みひもを想像するとわかりやすい。例えば $n = 3$ の場合、 $\Delta_3 = \sigma_1 \sigma_2 \sigma_1$ (図 3(b) の左側) となるが、これはよく目を凝らして見ると、自明な組みひもの底面を固定して、上面をぐるっと π 回転させたものに等しい。したがって、 Δ_3^2 は自明な組みひもの底面を固定して、上面をぐるっと 2π 回転させたものに等しくなる。half twist で共役をとることは、組みひもを後ろから見ることに対応する。実際、図 4 をみると 8 の字解の $1/3$ 周期分の braid は $\sigma_1^{-1} \sigma_2$ となるが、half twist (この場合

は $\sigma_1\sigma_2\sigma_1$) によって共役を取ると,

$$\begin{aligned} (\sigma_1\sigma_2\sigma_1)^{-1}\sigma_1^{-1}\sigma_2(\sigma_1\sigma_2\sigma_1) &= \sigma_1^{-1}\sigma_2^{-1}\sigma_1^{-1}\sigma_1^{-1}\sigma_2\sigma_1\sigma_2\sigma_1 \\ &= \sigma_1\sigma_2\sigma_1\sigma_1^{-1}\sigma_2\sigma_1\sigma_2\sigma_1 (= \sigma_1\sigma_2\sigma_2\sigma_1\sigma_2\sigma_1) \\ &= \sigma_2^{-1}\sigma_1 \end{aligned}$$

となるから, $\sigma_1^{-1}\sigma_2$ と $\sigma_2^{-1}\sigma_1$ が共役であることがわかる. ここで, 二つ目の等号は $(\sigma_1\sigma_2\sigma_1)^2 = 1$ から, 最後の等号は $(\sigma_2\sigma_1\sigma_2)^2 = 1$ から導かれる.

2 例

それでは平面 n 体問題の周期解から得られる組みひもの例を見ていこう. ここでは偶数体問題 ($2n$ 体問題) と 3 体問題について考える.

2.1 $2n$ 体問題の解から構成される組みひも

等質量 $2n$ 体問題には, $n \geq 2$ において, 少なくとも各 n ごとに $\lfloor n/2 \rfloor$ 個の (かなり対称性の強い) 周期解があることが [7] の結果からわかっている. ここで $[\cdot]$ はガウス記号を表す. この周期解を $x_{n,p}$ ($p = 1, \dots, \lfloor n/2 \rfloor$) と表し, 適当なスケールで周期を 1 と仮定する. ここでは [7] で与えられた周期解から構成される組みひもを考えよう.

各周期解 $x_{n,p}$ は $2d$ 個の閉曲線上を互いに追跡し合う解である. ここで, $d = \gcd(n, p)$ とする. また奇数番と偶数番の質点は互いに逆向きに回っていて, どの時刻においても常に奇数番と偶数番の質点がそれぞれ正 n 角形を成している. 柴山先生に提供していただいた図を用いていくつかの具体例を図 5 に載せよう.

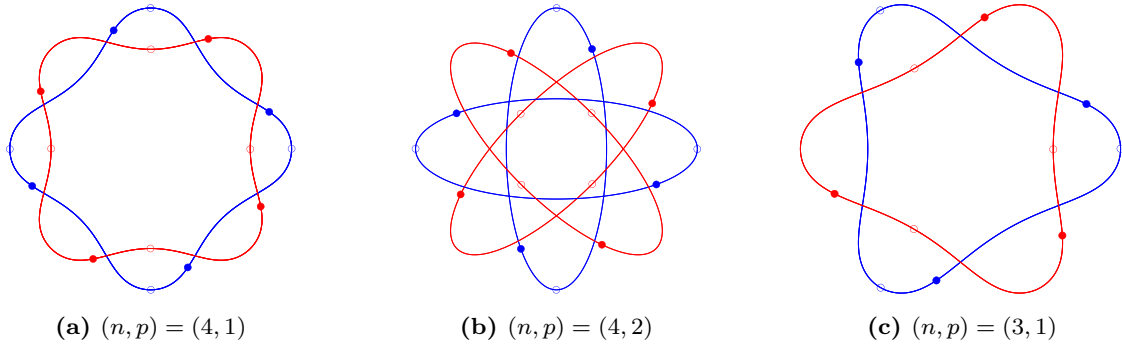


図 5: 周期解 $x_{n,p}$

図 5 において, 赤と青の本質的な区別はないので, どちらを偶数, 奇数と思っても構わない. ここでは赤を奇数, 青を偶数と思うことにすると, 奇数番の添字が振られた質点たちは時計回りに赤い閉曲線上をまわり, 偶数番は半時計周りに青い閉曲線上を動いている. 塗りつぶしの点の配置を $x_{n,p}(0)$ すると, 白抜きになっている点は $x_{n,p}(d/2n)$ の配置を表している.

p が周期解のどのような幾何的性質を反映しているかをもう少し説明しよう. 質点が成す 2 つの正 n 角形の大きさはどちらか一方がずっと大きい (あるいは小さい) のではなく, 特定の時間ごとにその大小関係が入れ替わる. 入れ替わる瞬間から次の入れ替わりの瞬間まで, 奇数番と偶数番が「すれ

違う」回数を p は表している。「すれ違う」とは、ここでは奇数番と偶数番の質点と中心の 3 点が、(偶, 奇, 原点) または (奇, 偶, 原点) の順で同一直線上に並ぶ状態、つまりこの 3 点による syzygy を指す (syzygy については 2.2 節を参照)。詳しい証明は割愛するが、例えば周期解 $x_{4,1}$ の振る舞いを図示すると図 6 のようになる。矢印の番号は軌道が描く順に対応する。

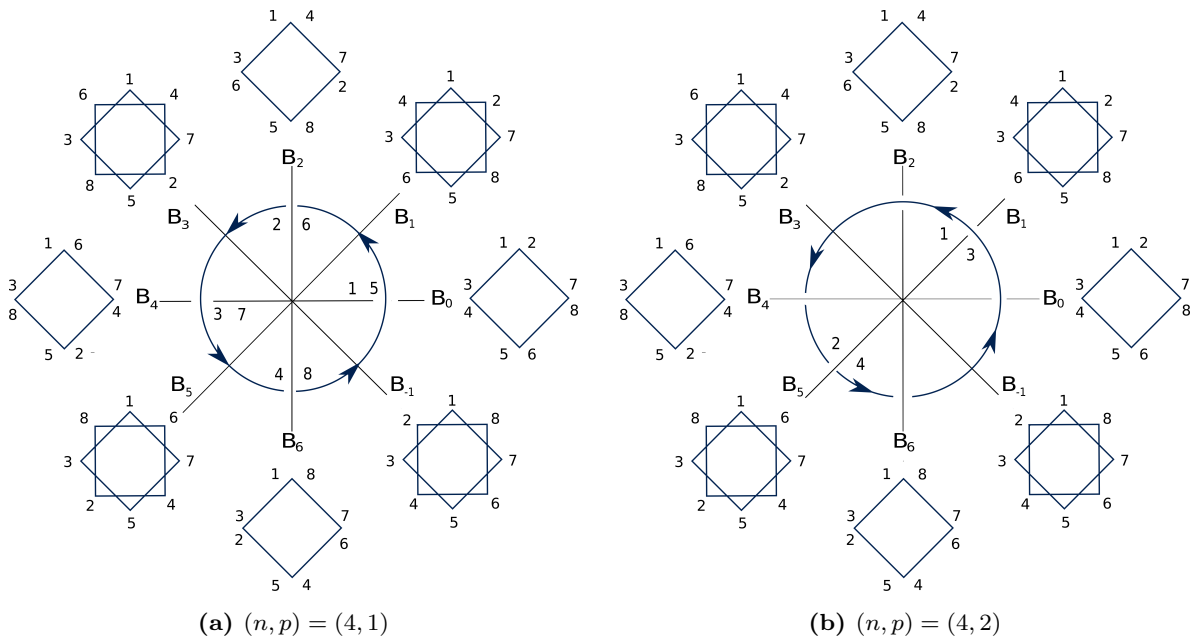


図 6: 配置の移り変わりの概略図

図 6 では奇数番の質点を固定し、偶数番だけ動かして考えている。また、正 n 角形（この場合は正方形）の大きさを全て同じ大きさで描いているが、実際には 1 3 という添字の振られた矢印と 5 7 という添字の振られた矢印上の軌道は奇数番の質点が成す正方形が小さく、一方、2 4 という添字の振られた矢印と 6 8 という添字の振られた矢印上の軌道は偶数番の質点が成す正方形が小さい。図 5 と図 6 とを見比べると、図 5 において塗りつぶし点は青と赤と合わせて正 $2n$ 角形を成している ($x_{n,p}(0)$)。ここは図 6 の B_{-1} に対応している。そしてしばらく時間が経つと白抜き点では赤と青がそれぞれ正 n 角形をなし、正 n 角形の傾きは等しくなる ($x_{n,p}(d/2n)$)。つまり正 n 角形の一辺の長さを同じとみなすと奇数番と偶数番の質点がピッタリ重なっている。これは B_0 に対応する。

さらに図 6 における奇数番の矢印上での添字の入れ替えと、偶数番の矢印上での添字の入れ替えに注目しよう。1 3 5 7 の矢印では奇数番の方が小さいから偶数番の「内側」を通って点が入れ替わる。2 4 6 8 の矢印についても同様で、合わせて図 7 のように表すことができる。ここで、図 6 と同様、図 7 は奇数番の質点を固定し、偶数番だけ動かして描いている。以下、これを奇数シフト、偶数シフトと呼ぶことにする。次に、図 7 の中心に原点を書き加え、この質点たちを連続的に移動させて一列に並べて描いてみると、図 8 のような振る舞いとみなせる。

上の考察から対応する組みひもを描くと図 9 のようになる。 $(n,p) = (4,1)$ の場合に $t \in [0, d/4]$ では奇数シフトと偶数シフトが一回ずつ起こる。

$$a_n = (\sigma_1 \sigma_2 \cdots \sigma_{2n-1})(\sigma_1 \sigma_3 \cdots \sigma_{2n-1})^{-1}$$

$$b_n = (\sigma_1 \sigma_2 \cdots \sigma_{2n-1})^{-1}(\sigma_1 \sigma_3 \cdots \sigma_{2n-1})$$

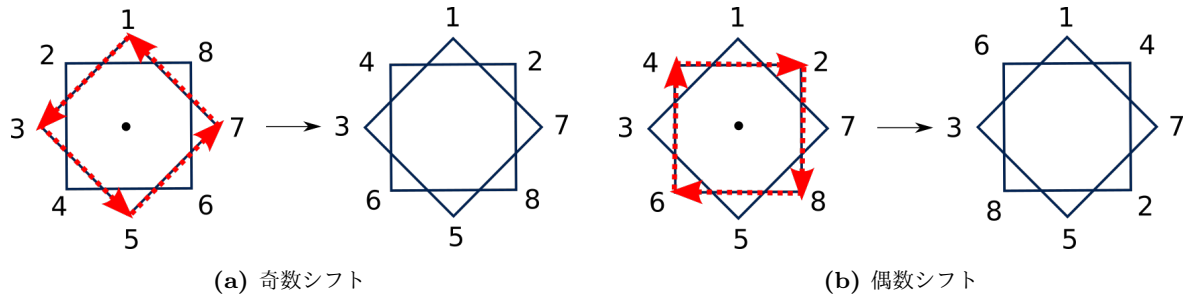


図 7: $(n, p) = (4, 2)$ におけるシフト

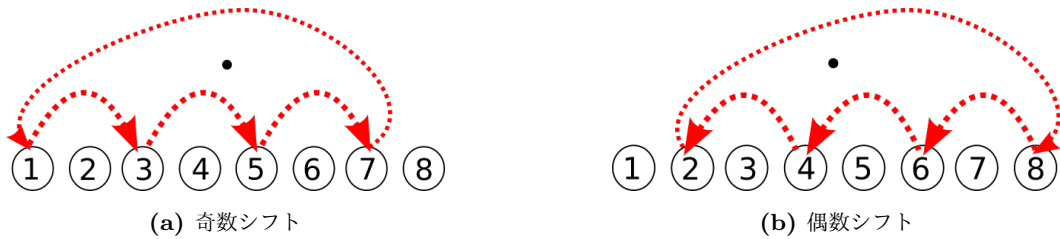


図 8: 直線的に並べた場合

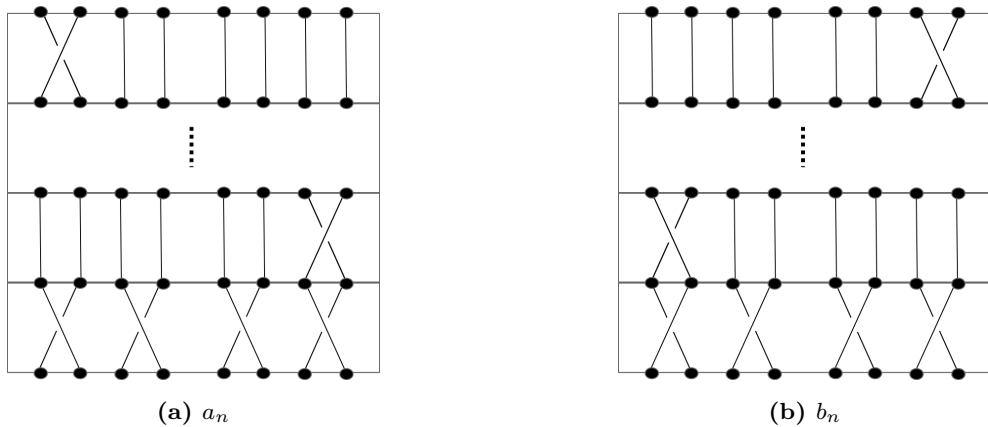


図 9: $n = 4$ の場合

を用いると、この間に描く braid type は $a_4 b_4$ とわかる。各区間 $t \in [(d/n)k, (d/n)(k+1)]$ ($k = 1, \dots, (n/d) - 1$) での振る舞いは $t \in [0, d/4]$ と同様であるから、全体の braid type は $(a_4 b_4)^{n/d} = (a_4 b_4)^4$ とわかる。より一般に $p = 1$ の場合は n を増やしても図 7 が正 4 角形から正 n 角形に変わるだけで、あとのふるまいは同様である。 $t \in [0, d/n]$ での braid type が $a_n b_n$ 、全体の braid type は $(a_n b_n)^n$ とわかる。

では、 $p = 2$ 以上だとどうなるだろうか。 p は大小関係が入れ替わるまでに奇数番と偶数番が「すれ違う」回数を表している。図 7 は 1 回分のすれ違いを表しているから、 $p = 2$ の場合は、図で表したシフトが奇数と偶数それぞれ 2 回ずつ繰り返して起こることになる。したがって、 $(n, p) = (4, 2)$ の場合に $t \in [0, d/n]$ で描かれる braid type は $a_n^2 b_n^2$ となる。より一般に、 $x_{n,p}$ の $t \in [0, d/n]$ で描かれる braid type は $a_n^p b_n^p$ となり、全体は $(a_n^p b_n^p)^{n/d}$ となる。

2.2 3体問題の解から構成される組みひも

2.2.1 Syzygy と 3 次の組みひも

3 次の組みひもを考えよう．平面 3 体問題の解は退化した三角形（3 点が一直線に並んだ状態）も含めて考えれば常に三角形をなしていることになる．このとき三角形の配置のパターンが全く変わらなければ，得られる braid type は自明なものになる．例えば，3 体問題にはオイラー解とラグランジュ解と呼ばれる周期解が存在することが知られている．図 10 を参照されたい．（こちら柴山先生に提供してもらいました．）ちなみにこの解は等質量という制限はなく，3 質点の比は任意に選べる．

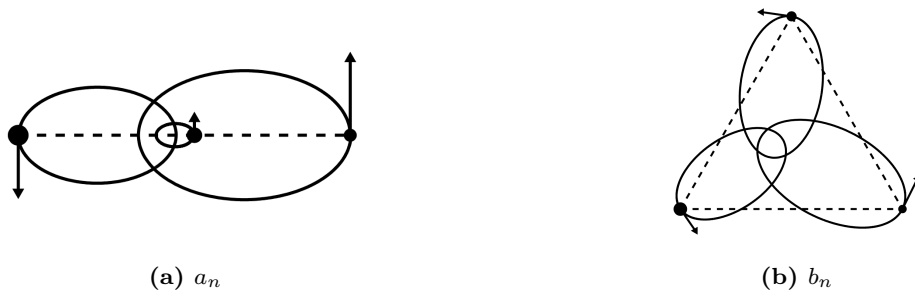


図 10: Euler 解と Lagrange 解

オイラー解は常に 3 質点が退化した三角形をなした状態で回転するような軌道を描く．一方，ラグランジュ解は常に 3 質点が正三角形をなすような軌道である．ゆえに，オイラー解もラグランジュ解も三角形としての配置がずっと変わらない．ラグランジュ解の braid を描いてみると正三角形を保ったままぐるっと回っていくから，これは full twist になる．したがって，braid type としては 1 となる．オイラー解も同様に braid type は 1 である．上の考察から，平面 3 体問題の周期解から自明でない braid type が現れるためには三角形としての配置が変わることが必要条件である．

では三角形の配置が変わるとはどういうことなのか考えると，それは syzygy（食）と呼ばれる現象と深く関わるのがわかる（syzygy を起こすような n 体問題の解については [2] を参照されたい）．Syzygy とは質点が一直線上に並ぶ現象のことをさし，3 体問題の場合は真ん中の質点の番号によって 3 通りの syzygy がある．三角形の配置が変わるとき，その間に必ず syzygy が起こっている．三角形のとりうる配置としては，非退化なものが 2 種類．退化したものは 3 種類ある．それぞれの配置について，非退化な三角形で時計回りに見て 123 になるものを t_1 ．132 になるものを t_2 ，退化なもの（syzygy）は真ん中の点の番号に対応させて s_1, s_2, s_3 と表すことにする．三角形の配置が変わるもの（非自明なもの）を考えたいので， t_1, t_2 にそれぞれ映りあう状態を考えるとすると， t_1 から t_2 に至るまでに間にいずれかの s_i を経由するから．仮に t_1 から始めるとすると，

$$t_1 \rightarrow s_{n_1} \rightarrow t_2 \rightarrow s_{n_2} \rightarrow t_1 \rightarrow s_{n_3} \rightarrow \dots$$

となる．ここで $\{n_k\}$ は $\{1, 2, 3\}$ からなる任意の点列とする．したがって，syzygy が起こる順番，つまり syzygy 列 $\{n_k\} \in \{1, 2, 3\}^{\mathbb{N}}$ を決めると，対応する braid が定まる．三角形の配置の変化と 3 次の組みひもとの対応については [4] を参照されたい．[4] はリサージュ図形の上に 3 質点を置き，そ

ここからできる braid について考察した結果であるが，三角形の配置の移り変わりとも braid の対応を求めているため，syzygy からできる braid についても応用ができる。

2.2.2 $2n$ 体問題と 3 次の組みひも

ここで再び $2n$ 体問題の話題に戻ろう。実は $x_{n,p}$ の braid は図 7 で加えた原点を含めて braid を考えることである意味で 3-braid とみなせる。図 7 を図 11 のように 4 分割してみよう。すると，奇数同士，偶数同士を同一視すれば緑で網がけした領域が基本領域になっていることがわかる。矢印が基本領域の外に出たときは端同士を同一視して，(b) のような矢印を加えて考える。すると対応する braid として (c) が描ける。

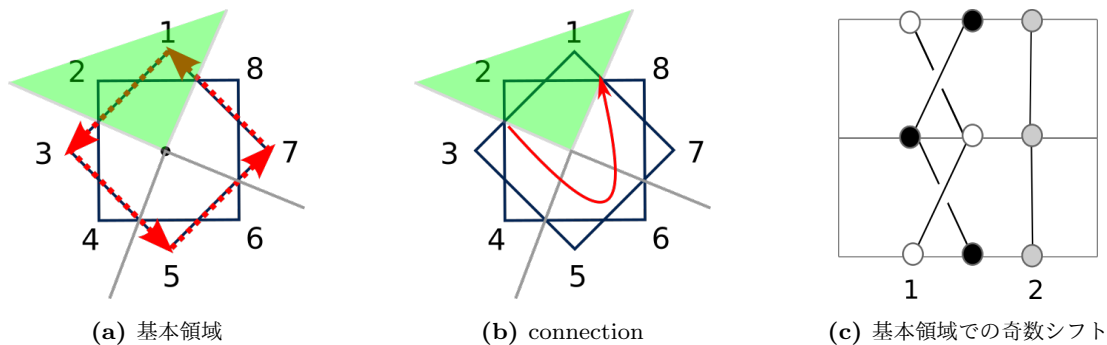


図 11: $x_{n,p}$ から得られる 3-braid

よって， a_n は 3-braid で考えると σ_1^2 に置き換わる。同様にして偶数シフトについても基本領域をとって考えると b_n は σ_2^{-2} になる。

3 なぜ組みひもを調べるのか？

そもその前提として，このように平面 n 体問題の周期解から構成される組みひもやそれらの関係性を調べることにどのような意義があるのか，という問題がある。その問いの答えのひとつとしては「周期解を組みひもによって何らかのクラス分けをする」ということが挙げられる。特に，2 章で紹介した $2n$ 体問題の周期解 $x_{n,p}$ から構成される braid type について，最近の金先生らとの共同研究で次のことがわかった：

定理 3.1 ([3]). 例で紹介した $2n$ 体問題の解 $x_{n,p}$ について， $x_{n,p}([0, d/n])$ から得られる braid type を $Y_{n,p}$ ， $x_{n,p}([0, 1])$ から得られる braid type を $X_{n,p}$ とする。このとき， $Y_{n,p}$ は stretch factor $(s_{2p})^2$ をもつ pseudo-Anosov になり， $X_{n,p}$ は stretch factor $(s_{2p})^{\frac{2n}{d}}$ をもつ pseudo-Anosov になる。

ここで s_k は metallic ratio，つまり，

$$s_k = \frac{1}{2}(k + \sqrt{k^2 + 4}) = k + \frac{1}{k + \frac{1}{k + \ddots}}$$

とする。(s_2 がいわゆる黄金比である。)

定理について少し説明しよう． D_n を n 次の穴あき disk として，写像類群 (Mapping Class Group) を

$$\text{MCG}(D_n) = \pi_0(\text{Homeo}_+(D_n))/(\text{isotopy})$$

で定義する．また $\pi_0(\text{Homeo}_+(D_n))$ は向きを保つ同相写像の集合とする．ここで

$$\mathcal{B}_n \simeq \text{MCG}(D_n)$$

となることが知られている．したがって， $x \in \mathcal{B}_n$ に対して，対応する $\phi \in \text{MCG}(D_n)$ が取れる． ϕ はその性質によって次の 3 つに分類される：

- periodic $:\Leftrightarrow$ ある k があって， $\phi^k = 1$ が成り立つ．finite order とも呼ばれる．
- reducible $:\Leftrightarrow$ ある $e = c_1 \cup \dots \cup c_j$ があって， $\phi(e) = e$ ．ただし， c_i は互いに非交和な単純閉曲線とする．
- pseudo-Anosov $:\Leftrightarrow$ それ以外．

ϕ が pseudo-Anosov であるとき， ϕ は豊かな力学系としての構造をもつ．対応する stretch factor と呼ばれる値 $\lambda = \lambda(\phi)$ が $\lambda > 1$ になることが知られている．また $\log(\lambda)$ は位相的エントロピーと呼ばれ，これは ϕ によって定まる力学系の不変量のひとつである．

ただし，定理 3.1 には素直に喜べない事情がある． s_k は $x^2 - kx - 1 = 0$ の正の根と一致するが，定理の stretch factor に二次方程式の根が現れるのは，2.2.2 節に記載したような基本領域を考えることで 3-braid に帰着されることに由来する．このような操作ができるのはそもそも考えていた $2n$ 体問題の周期解 $x_{n,p}$ がかなり高い対称性を持った解だからである．3-braid と 3 次元力学系には深い繋がりがあがるが， m 次元上の n 体問題の微分方程式は一般に $2mn$ 次元となり，角運動量が 0 などの仮定によって多少の reduction が可能なことを考慮したとしても，低次元力学系とは言い難い．したがって，組みひもから得られる stretch factor やエントロピーなどがどの程度元の n 体問題の力学系を反映しているかを明らかにすることが今後の課題として残っている．

参考文献

- [1] A. Chenciner & R. Montgomery, A remarkable periodic solution of the three-body problem in the case of equal masses, *Annals of Mathematics*, **152** (2000), 881–901.
- [2] 梶原唯加, Syzygy と n 体問題, 北海道大学数学講究録 = Hokkaido University technical report series in mathematics, **180** (2021).
- [3] Y. Kajihara, E. Kin & M. Shibayama, Braids, metallic ratios and periodic solutions of the $2n$ -body problem, in preparation.
- [4] E. Kin, H. Nakamura & H. Ogawa, Lissajous 3-braids, <https://arxiv.org/abs/2008.00585>.
- [5] 河野俊丈, 新版 組みひもの数理, 遊星社. 2009.
- [6] 村杉邦男, 結び目理論とその応用, 日本評論社. 1993.
- [7] M. Shibayama, Multiple symmetric periodic solutions to the $2n$ -body problem with equal masses, *Nonlinearity*, **19** (2006), 2441–2453.