リーマン多様体上のジャンプ過程とその性質

大阪市立大学大学院 理学研究科 数物系専攻
甲斐大貴 (Hirotaka Kai)

概要

Markov 過程とは未来の状態が現在の情報のみによって決定するランダムな粒子の動きである．Dirichlet 形式の発展に伴い，より一般の空間に Markov 過程を構成出来るようになった．一方で，ユークリッド空間上の独立増分性を持つ確率連続な確率過程（Lévy 過程）はユークリッド空間上の典型的な Markov 過程の 1 つである．ユークリッド空間上の Lévy 過程の性質については，多くのことが分かっており，後に詳しく説明する再帰性と過渡性については Chung-Fuchs[4] によって特徴づけられている．従って，一般の Markov 過程を Lévy 過程に限定し，対象とする空間をリーマン多様体に拡張して研究すると，どれくらいの結果が得られるのか，という疑問は自然な発想である．まず，リーマン多様体上の確率過程がどの様な条件を満たしたとき，それを Lévy 過程と呼べるのだろうか，という問題が発生する．実は，Hille-Yoshida の定理によって，Banach 空間上の強連続縮小半群と擬微分作用素，Markov 過程（及びレゾルベント，Dirichlet 形式）は 1 対 1 に対応していることが分かっている．この擬微分作用素が $\Delta/2$（ラプラシアン）のとき，対応する Markov 過程は Brown 運動となる．これに着目して，Malliavin-Elworthy-Li は正規直交枠束上の確率微分方程式の解を底空間に射影して多様体上の Brown 運動を構成した．その後，Applebaum[1],[2] はこの手法を拡張し，正規直交枠束上の Marcus 型確率微分方程式の解を底空間に射影する事によってリーマン多様体上の Lévy 型確率過程を構成した．

ユークリッド空間と一般のリーマン多様体の違いの一つは曲率である．Ichihara[10] はリーマン多様体上の Brown 運動が再帰性，過渡性，保存性を持つための十分条件を曲率の情報から与えた．この研究を一般化し，Lévy 型確率過程の再帰性，過渡性，保存性の十分条件を与えたのが今回の私の研究内容である．

1　導入

(M, g) を $m(\geq 2)$ 次元単連結完備リーマン多様体とし無限遠点 ∂_M による 1 点コンパクト化を $\widehat{M}$ とする．更に ∇ を Levi-Civita 接続とする．M の枠束を $\mathcal{F}(M)$ とし，$\mathcal{F}(M)$ から M への射影を π と書く．$\mathcal{F}(M)$ の部分多様体 $O(M)$ を次のように定義する．

$$O(M) = \{u = ((v_1)_{\pi u}, \ldots, (v_m)_{\pi u}); (v_1)_{\pi u}, \ldots, (v_m)_{\pi u} \text{ は } \mathrm{T}_{\pi u}M \text{ の正規直交基底 }\}$$

$u \in O(M)$ を次の関係で $\mathrm{T}_{\pi u}M$ から $\mathbb{R}^m$ への線形同型写像と考える．

$$\mathbb{R}^m \ni z \mapsto \sum z^i (v_i)_{\pi u} \in \mathrm{T}_{\pi u}M$$

勝手な $z \in \mathbb{R}^m$ に対して，$Hz(u) \in \mathrm{T}_u O(M)$ を $uz \in \mathrm{T}_{\pi u}M$ の水平持ち上げと定義すると Hz は $O(M)$ 上のベクトル場となる．特に $\mathbb{R}^m$ 上の正規直交基底 $e_1, \ldots, e_m$ に対して，$H_i(u) = He_i$ と書

くことにする．$O(M)$ 上の常微分方程式

$$\frac{\partial \Xi_t}{\partial t} = Hz(\Xi_t),\ \Xi_0 = id$$

の解を $\Xi_z^t = \mathrm{Exp}(tHz)$ と書く．

$\{B_t = (B_t^1, \ldots, B_t^m); 0 \le t < \infty\}$ を m 次元 Brown 運動とし $N(dz, ds)$ を $\nu(dz)ds$ を intensity に持つ Poisson ランダム測度とする．ただし $\nu(dz)$ は

$$\int_{\mathbb{R}_0^m} (1 \wedge |z|^2)\nu(dz)$$

を満たす Lèvy 測度である．これらの記号の下，$\{U_t; 0 \le t < e\}$ を次の確率微分方程式の解とする．

$$\begin{aligned}
F\left(U_t^u\right) - F\left(u\right) = &\int_0^t \sum_{i=1}^m H_i F\left(U_{s-}^u\right) \circ dB_s^i \\
&+ \int_0^t \int_{|z|>1} \left\{\left(F \circ \Xi_z\right)\left(U_{s-}^u\right) - F\left(U_{s-}^u\right)\right\} N\left(dz, ds\right) \\
&+ \int_0^t \int_{|z|\le 1} \left\{\left(F \circ \Xi_z\right)\left(U_{s-}^u\right) - F\left(U_{s-}^u\right)\right\} \widetilde{N}\left(dz, ds\right) \\
&+ \int_0^t \int_{|z|\le 1} \left\{\left(F \circ \Xi_z\right)\left(U_{s-}^u\right) - F\left(U_{s-}^u\right) - \sum_{i=1}^m z^i H_i F\left(U_{s-}^u\right)\right\} \nu\left(dz\right) ds \\
&\forall F \in C^\infty(M).
\end{aligned} \tag{1}$$

ここで $e = \inf\{t > 0; X_t \notin M\}$ は爆発時刻であり，$\circ dB_s^i$ は Stratonovich 積分である．この確率微分方程式の解の射影 $\{X_t = \pi U_t; 0 \le t < e\}$ を M 上の Lèvy 型確率過程と呼ぶ．一般に $\{U_t; 0 \le t < e\}$ は Markov 過程であるが $\{X_t = \pi U_t; 0 \le t < e\}$ は Markov 過程かどうかは分からない．次の定理は $\{X_t = \pi U_t; 0 \le t < e\}$ が Markov 性を持つ十分条件を与えている．

定理 1 (Applebaum, D. and Estrade, A. (2000))**.** *Lèvy* 測度 $\nu(dz)$ が回転不変であるとき，$\{X_t = \pi U_t; 0 \le t < e\}$ は出発点 x のフレームの選び方に依らない．従って，$\{X_t = \pi U_t; 0 \le t < e\}$ は *Markov* 過程となる．

これで，本研究に必要な基本的な設定は終わりである．ここからは本研究の主結果について述べたいと思う．

2 主結果

まずは，Markov 過程の再帰性，過渡性，既約性についての定義をまとめる．

定義 1. D を M 上の滑らかな境界を持つ相対コンパクト集合とし，到達時刻，最終脱出時刻をそれぞれ

$$T_D = \inf\{t > 0;\ X_t \in D\}$$

$$\sigma_D = \sup\{t > 0;\ X_t \notin D\}$$

と定義する．このとき

- $\mathbb{P}_x[\sigma_D = \infty] = 1$ が全ての x,D で成り立つとき，$\{X_t; 0 \leq t < e\}$ は再帰的である．
- $\mathbb{P}_x[\sigma_D < \infty] = 1$ が全ての x,D で成り立つとき，$\{X_t; 0 \leq t < e\}$ は過渡的である．
- $\mathbb{P}_x[T_D < \infty] = 1$ が全ての x,D で成り立つとき，$\{X_t; 0 \leq t < e\}$ は既約的である．

既約的な右連続 Markov 過程は再帰性か過渡性のどちらかを持つ．また，再帰的な右連続 Markov 過程は爆発しないことに注意する．詳細は Getoor[7] を参照すること．

$\mathrm{dist}(\cdot,\cdot) : M \times M \to [0,\infty)$ を M 上の距離関数とする．また, M の基準となる点 $o \in M$ を一つ固定して，$r(\cdot) = \mathrm{dist}(o,\cdot)$ と定義する．

定理 2. *ある負の定数 β が存在して，M の断面曲率 K が $K \leq \beta < 0$ を満たすとき，次の不等式が成り立つような定数 $C(\beta,m) > 0$ と 1 次元 Brown 運動 $\{W_t; 0 \leq t < e\}$ が存在する．*

$$r(X_t) \geq r(x) + W_t + \int_0^t \int_{\mathbb{R}_0^m} \Big(r \circ \xi_z(X_{s-}) - r(X_{s-}) \Big) \widetilde{N}(dz,ds) + C(\beta,m)t$$

この定理から次のことが分かる．

定理 3.

$$\mathbb{P}_x[\lim_{t\to\infty} r(X_t) = \infty,\ e = \infty] = \mathbb{P}_x[e = \infty]$$

が全ての $x \in M$ で成り立つ．従って，$\{X_t; 0 \leq t < e\}$ は過渡的である．

定義 2. *Markov 過程 $\{X_t; 0 \leq t < e\}$ が保存的であるとは，*

$$\mathbb{P}_x[e = \infty] = 1$$

が全ての $x \in M$ で成り立つことである．

$M \ni x \mapsto \mathbb{P}_x[e = \infty] \in [0,1]$ にある程度の滑らかさがあれば，Markov 過程 $\{X_t; 0 \leq t < e\}$ が保存的であることを示すには，$\mathbb{P}_x[e = \infty] = 1$ となる $x \in M$ を一つ見つけてくるだけで十分である．

定理 4. *$j(x) = \mathbb{P}_x[e = \infty]$ と定義し，$j \in C^2(M)$ とする．このとき次のいずれかが成り立つ．*

- *全ての $x \in M$ に対して，$j(x) = 1$.*
- *全ての $x \in M$ に対して，$j(x) = 0$.*
- *全ての $x \in M$ に対して，$0 < j(x) < 1$.*

また断面曲率に更なる条件を加えることで次の定理が導かれる．

定理 5. *任意の $\delta > 0$ に対して，$\phi(\delta) = \delta + \frac{4\tanh\left(\sqrt{|\beta|}\delta\right)}{\sqrt{|\beta|}}$ とし，停止時刻を*

$$T(\delta) = \inf\{t > 0;\ r(X_t) < \phi(\delta)\}$$

と定義する．断面曲率 K に対して $\alpha \leq K \leq \beta < 0$ を満たす負の定数 α, β が存在すると仮定する．このとき次のことが成り立つ．

定数 $C(\alpha,m,\delta)$ が存在し，$\{t < e \wedge T(\delta)\}$ 上で

$$r(X_t) \leq r(x) + W_t + \int_0^t \int_{\mathbb{R}_0^m} \Big(r \circ \xi_z(X_{s-}) - r(X_{s-}) \Big) \widetilde{N}(dz,ds) + C(\alpha,m,\delta)t$$

が成り立つ.

この定理から $\{X_t; 0 \leq t < e\}$ が保存的であることが導かれる.

参考文献

[1] Applebaum ,D. and Estrade ,A.: *Isotropic Lèvy processes on Riemannian manifolds*, *Ann. Probab.* **28** (2000), 166-184.

[2] Applebaum, D.: *A horizontal Lévy process on the bundle of orthonormal frames over a complete Riemannian manifold. Séminarie de Probabilités.* XXIX, 166-180. Lecture Notes in Math., **1613**. *Springer, Berlin* (1995)

[3] Fujiwara, T.: *Stochastic differential equations of jump type on manifolds and Lévy flows. J. Math. Kyoto. Univ.* **31** (1991), 99-119.

[4] Chung, K. L. and Fuchs, W. H.: *On the distribution of values of sums of random variables. Amer. Math. Soc.* **6** (1951).

[5] Fujiwara, T.: *Stochastic differential equations of jump type on manifolds and Lévy flows. J. Math. Kyoto. Univ.* **31** (1991), 99-119.

[6] Fujiwara, T., Kunita, H.: *Stochastic differential equations of jump type and Lévy processess in diffeomorphisms group. J. Math. Kyoto. Univ.* **25** (1985), 71-106.

[7] Getoor, R. K.: *Transience and recurrence of Markov processes*, *Seminar on Probability, XIV(Paris, 1978/1979)(French),* 397-409, Lecture Notes in Math., **784**, *Springer, Berlin,* (1980).

[8] Hsu, E.: *Stochastic analysis on manifolds. Amer. Math. Soc.* (2002).

[9] Hunt, G. A.: *Semigroups on measures on Lie groups*, *Trans. Amer. Math. Soc* **81** (1956), 264-293.

[10] Ichihara, K.: *Curvature, geodesics and the Brownian motion on a Riemannian manifold. II. Explosion properties*, *Nagoya Math. J.* **87** (1982), 115-125.

[11] Kai ,H. and Takeuchi ,A.: *Gradient formula for jump processes on Riemannian manifolds*, *Electron. J. Probab.* **26** (2021), article no. 101, 1 –15.

[12] Kobayashi ,S. and Nomizu ,K.: *Foundations of Differential Geometry. Volume I*, *Wiley, NewYork*, (1963).

[13] Kunita, H.: *Stochastic Flows and Jump-Diffusions. Springer,* (2019).

[14] Takeuchi, A.: *Bismut-Elworthy-Li-type formulae for stochastic differential equations with jumps. J. Theoret. Probab.* **23** (2010), 576-604.