

吊り下げ曲面の微分幾何学的定式化

九州大学マス・フォア・インダストリ研究所
軸丸芳揮 (Yoshiki JIKUMARU)

概要

電線のように自重で釣り合う形状を上下反転させると、圧縮力のみで釣り合う構造が得られ、建築の屋根構造などにおいて力学的に優れた特性を与える。曲線の場合は懸垂線として知られ、さらに膜を吊り下げた場合に現れる曲面の取り扱いに関しては現在も研究が進められているが、材料特性を活かすことができる力学的に優れた特性をもち、かつ変分原理と適合するような定式化に基づく研究は皆無であった。本講演では、膜理論の釣り合い式と変分原理の両方に整合する、力学的特性に優れた吊り下げ型曲面の定式化を提示する。また特別な座標による表示を利用すると、建築曲面設計の問題に対し有用な知見をもたらすことを報告する。なお、本研究は鹿児島大学の横須賀洋平准教授との共同研究に基づく。

1 導入

電線の形状などに見られる、ある曲線を吊り下げた場合に得られる形状は懸垂線やカテナリーとして知られ、自重に対して張力のみで釣り合う。さらに懸垂線を上下反転させた形状は、自重に対して圧縮力のみで釣り合い、逆さ吊り模型と呼ばれる。建築における組積造^{*1}のような構造に対しては、逆さ吊り模型で得られる形状が力学的に有用である。サグラダ・ファミリアの設計で著名な Antoni Gaudi は、数式に頼らず、このような逆さ吊り模型の実験を数多く行い、その利点を活かした構造物を提唱した^{*2}。またスイスの建築構造家である Heinz Isler は、1000 を超える逆さ吊り模型の実験を行い、実際にガソリンスタンドの屋根形状などへ応用したことで知られる (図 1)。

近年では実験に頼らない形状形成手法として、チューリッヒ工科大学の Phillippe Block らによって提唱された平面内の力の釣り合い図式を利用した「Thrust Network Analysis (TNA)」と呼ばれる手法が広く知られるようになり、ベルリンやウィーンの幾何学のグループとともに活発な研究が進められている [2, 4, 11]。しかしながら TNA では曲面の座標に関する問題が扱えないため、面内に生じる応力の挙動が明確でなく、さらに変分原理との関連も明確でない。本講演では、微分幾何的手法に基づき、自重に対して座標線方向に面内せん断が生じず、面内膜応力によって釣り合う形状をシェル・膜理論と変分原理に適合する形で定式化する。また建築の文脈において、滑らかな曲面を良い座標でもって離散化することは、数値解析のみならず、力学的特性を維持し、厚みのある平らな板を活用できるという施工性の点からも有効である。そのため、本講演では特別な座標における釣り合い式

^{*1} レンガやブロックを積み上げてできる構造のこと。

^{*2} 実際には Hooke の法則で有名な Robert Hooke が 1670 年代、すでに逆さ吊り模型の有用性に気づいていたようであるが、彼はアナグラムを利用してその研究成果を公表していたため、解読されたのは 19 世紀になってからであった。実際に Hooke が記述していたアナグラムを文献 [1] に見ることができるが、初見では全く理解できないものである。

の表示と、座標を利用した離散化について述べる。なお本報告内容は論文 [6] を準備中である。



(a) サグラダ・ファミリア (b) 逆さ吊り模型 (c) 屋根構造 (d) Isler の模型

図 1: (a), (b): Gaudi によるサグラダ・ファミリアとその逆さ吊り模型。
(c), (d): Isler によるダイティンゲンのガソリンスタンドの屋根構造と逆さ吊り模型。

2 準備：曲面論の基本用語

$M \subset \mathbb{R}^2$ を平面内の領域とし^{*3}、その座標を (x, y) と表す。 M の**はめ込み**とは、ベクトル値関数 $X: M \rightarrow \mathbb{R}^3$ であって、 M 上の任意の点においてベクトル X_x, X_y が一次独立であるときをいい、はめ込み X を \mathbb{R}^3 内の**曲面**と呼ぶ。このとき X の**面積要素**を $dA = \|X_x \times X_y\| dx dy$ で定める。ベクトル X_x, X_y は曲面の接ベクトルを与え、外積をとって単位法ベクトル $\nu = (X_x \times X_y) / \|X_x \times X_y\|$ を定める。 \mathbb{R}^3 上の内積を $\langle \cdot, \cdot \rangle$ と表すとき、曲面の**第一・第二基本行列** g, h を次式で定める：

$$g = \begin{pmatrix} \langle X_x, X_x \rangle & \langle X_x, X_y \rangle \\ \langle X_y, X_x \rangle & \langle X_y, X_y \rangle \end{pmatrix}, \quad h = \begin{pmatrix} -\langle X_x, \nu_x \rangle & -\langle X_x, \nu_y \rangle \\ -\langle X_y, \nu_x \rangle & -\langle X_y, \nu_y \rangle \end{pmatrix}. \quad (1)$$

行列 $S = g^{-1}h$ を**形作用素**、 S の固有値 κ_1, κ_2 を曲面 X の**主曲率**と呼び、対応する固有ベクトルを**主曲率方向**と呼ぶ。また

$$\mathcal{H} = \frac{\kappa_1 + \kappa_2}{2}, \quad \mathcal{K} = \kappa_1 \kappa_2 \quad (2)$$

とおき、 \mathcal{H}, \mathcal{K} をそれぞれ曲面 X の**平均曲率**、**Gauss 曲率**と呼ぶ。

以下、座標 (x, y) は曲率線座標であるとする、すなわち第一・第二基本行列がともに対角化される座標を考える^{*4}。このとき第一・第二基本行列の成分に関して次の記号を用いる：

$$g = \begin{pmatrix} A_1^2 & 0 \\ 0 & A_2^2 \end{pmatrix}, \quad h = \begin{pmatrix} \kappa_1 A_1^2 & 0 \\ 0 & \kappa_2 A_2^2 \end{pmatrix}. \quad (3)$$

また単位接ベクトル e_1, e_2 を関係式

$$X_x = A_1 e_1, \quad X_y = A_2 e_2 \quad (4)$$

によって定める。

^{*3} 一般に M は境界をもつ滑らかな 2 次元多様体でよい。

^{*4} 接ベクトル X_x, X_y が主曲率方向となる座標。このような座標は $\kappa_1 = \kappa_2$ となる点を除いて存在する。

3 膜の釣り合い式

空間内のシェルや膜のモデル化は，文献 [8, 5] に従う．弾性体の理論における「シェル」という用語は，他の大きさに比べて十分近い距離にある 2 つの曲面 X_1, X_2 によって囲まれた物体に対して用いられ，特に「膜」とはモーメントをゼロとしたシェルを指す．これら 2 つの曲面 X_1, X_2 から等距離にある点の集まりをシェル中央面と呼ぶ．シェルの厚みは一定とし，シェル中央面を $X = X(x, y)$ とおく． X に作用する合応力を図 2 のように表すとき， X が膜であるとは $N_1 = N_2 = 0$ かつ

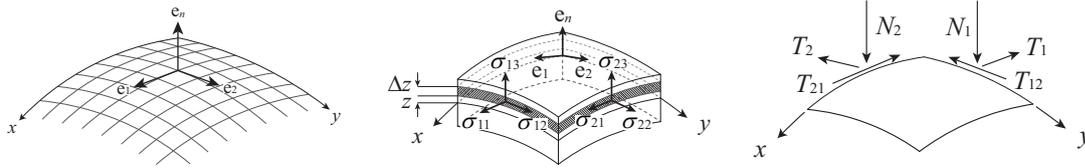


図 2: 単位接ベクトル・法ベクトル，応力・合応力の方向

$T_{12} = T_{21} = S$ と表されるときをいう．このとき，単位面積あたりの荷重 \mathbf{q} に対し，座標線方向に面内せん断 S が生じない膜の釣り合いは次式で表される：

$$(A_2 T_1)_x - (A_2)_x T_2 + \langle \mathbf{q}, X_x \rangle A_2 = 0, \quad (5)$$

$$(A_1 T_2)_y - (A_1)_y T_1 + \langle \mathbf{q}, X_y \rangle A_1 = 0, \quad (6)$$

$$\kappa_1 T_1 + \kappa_2 T_2 + \langle \mathbf{q}, \nu \rangle = 0. \quad (7)$$

補題 3.1. $T_1 = T_2 = T$ かつ \mathbf{q} が定ベクトルであるとする．このとき，ある定数 $b \in \mathbb{R}$ が存在し，

$$T + \langle \mathbf{q}, X \rangle = -b \quad (8)$$

と表すことができる．また，釣り合い第 3 式は以下の形となる：

$$2\mathcal{H}(\langle \mathbf{q}, X \rangle + b) - \langle \mathbf{q}, \nu \rangle = 0. \quad (9)$$

注意 3.2. 膜の単位面積あたりの質量を m ，重力加速度を g とするとき，鉛直荷重 $\mathbf{q} = (0, 0, -mg)$ に対し， $X = (X^1, X^2, X^3)$ とおくと $T = mgX^3 - b$ となり， T は高さ方向の一次関数である．定数 b は膜の最下部の水平張力によって決まり，曲面の高い部分ほど T が大きくなる．

4 変分原理による導出

曲面 $X : M \rightarrow \mathbb{R}^3$ と定ベクトル \mathbf{q} に対し，以下の汎関数を考える：

$$E(X) := \int_M (\langle \mathbf{q}, X \rangle + b) dA \quad (10)$$

汎関数 E の停留点は，膜の面積保存条件下における位置エネルギーの停留点にあたる．十分小さな正の数 $\varepsilon > 0$ に対し，曲面 X の変分 X_ε を $X_\varepsilon = X + \varepsilon \delta X + O(\varepsilon^2)$ を考える．ここで δX は変分ベクトル場と呼ばれる．

定理 4.1. 汎関数 E に対する第一変分公式は次式で与えられる：

$$\delta E = - \int_M (2\mathcal{H}(\langle \mathbf{q}, X \rangle + b) - \langle \mathbf{q}, \nu \rangle) \langle \delta X, \nu \rangle dA + \int_{\partial M} (\langle \mathbf{q}, X \rangle + b) \langle \delta X, N \rangle ds \quad (11)$$

ここで N は境界 ∂M 上の外向き単位余法ベクトルである。したがって Euler-Lagrange 方程式は式 (9) で与えられる。

証明は [6, 7] を参照。

定義 4.2 (吊り下げ曲面). 定荷重 $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^3$ に対し, 膜 $X : M \rightarrow \mathbb{R}^3$ が吊り下げ曲面であるとは, 面内の合応力 T が式 (8) を満たし, 釣り合い式 (9) を満たすときをいう。

5 吊り下げ曲面の例

この節では, 座標は (s, t) で表すこととする。

5.1 吊り下げ柱面

曲面 X が柱面, すなわち (x, z) 平面上の曲線 $(x(s), 0, z(s))$ (s は弧長) を用いて

$$X(s, t) = (x(s), t, z(s)) \quad (12)$$

と表される場合を考える。平面曲線 $(x(s), 0, z(s))$ の曲率を κ と表すと, 吊り下げ柱面の釣り合い式は

$$\kappa(\langle \mathbf{q}, X \rangle + b) - \langle \mathbf{q}, \nu \rangle = 0$$

となる。したがって, 補遺で示すように, 柱面としての吊り下げ曲面は「懸垂線を y 軸方向へ動かして得られる曲面」に限る。この場合, 第一・第二基本形式がともに対角化され, さらに第一基本形式の対角成分は等しいので座標 (s, t) は「等温曲率線座標 (isothermic coordinates)」であるから, 座標線方向が主応力方向を与える (図 3)。



図 3: 懸垂線を y 軸方向へ動かして得られる曲面 (座標線方向が主応力線を与える)

5.2 吊り下げ回転面

z 軸方向の荷重 $\mathbf{q} = (0, 0, \gamma)$ に対し, $X = X(s, t)$ は z 軸を回転軸とする回転面, すなわち

$$X(s, t) := (x(s) \cos t, x(s) \sin t, z(s))$$

と表される曲面を考える (s は弧長パラメータ). 弧長の条件 $(x')^2 + (z')^2 = 1$ より, $x'(s) = \cos \theta(s)$, $z'(s) = \sin \theta(s)$ とおくと, 釣り合い式は次の常微分方程式系へ書き換えられる:

$$x'(s) = \cos \theta(s), \quad z'(s) = \sin \theta(s), \quad \left(\theta'(s) + \frac{\sin \theta(s)}{x(s)} \right) (\gamma z(s) + b) - \gamma \cos \theta(s) = 0.$$

これを Mathematica (Version 12.1.0.0) で解かせると, 以下のような曲面が得られる:

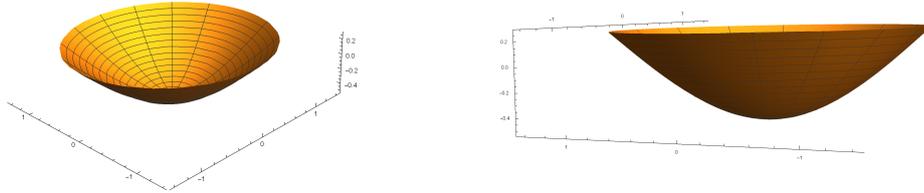


図 4: 吊り下げ回転面 ($\gamma = 0.516$, $b = 0.5$)

6 等温座標による表示, 離散化と応力密度法

いま, 曲面 X の座標 (x, y) が等温座標, すなわち第一基本行列の係数が

$$A_1^2 = A_2^2 = e^\omega \tag{13}$$

という形で表される座標であるとする*5.

定理 6.1. 等温座標で表される膜 X に対し, 式 (9) は次の形へ書き換えられる:

$$(-(\langle \mathbf{q}, X \rangle + b)X_x)_x + (-(\langle \mathbf{q}, X \rangle + b)X_y)_y + \mathbf{q}A_1A_2 = 0. \tag{14}$$

特に座標 (x, y) が等温かつ曲率線座標であるとき*6, 荷重 \mathbf{q} に対して吊り下げ曲面は座標線方向に面内せん断が生じない釣り合い状態を与え, 座標線に沿う主合応力 (張力・圧縮力) はそれぞれ $-(\langle \mathbf{q}, X \rangle + b)X_x$, $-(\langle \mathbf{q}, X \rangle + b)X_y$ で与えられる.

証明は [6] を参照されたい. 式 (14) を用いて, 以下のように吊り下げ曲面の離散化を考えることができる. 建築の文脈において, 滑らかな曲面を良い座標でもって離散化することは, 数値解析のみならず, 力学的特性を維持し, 厚みのある平らな板を活用できるという施工性の点からも有効である. さらにここでは, Schek [10] により提案された応力密度法との関連についても補足する.

等温座標で記述された釣り合い式 (14) は以下のように表せる:

$$\frac{\partial \mathbf{T}^{(1)}}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{T}^{(2)}}{\partial y} + \mathbf{q}A_1A_2 = \mathbf{0}, \tag{15}$$

ここで, 以下の記号を用いた:

$$\mathbf{T}^{(1)} := -(\langle \mathbf{q}, X \rangle + b)X_x, \quad \mathbf{T}^{(2)} := -(\langle \mathbf{q}, X \rangle + b)X_y. \tag{16}$$

*5 このような座標は曲面に $C^{1,\alpha}$ 級の滑らかさがあればいつでも存在し, Korn-Lichtenstein の定理として知られる. 現在は S. S. Chern (1955) による証明が広く知られる.

*6 等温曲率線座標あるいは双等温座標と呼ばれる.

いま，平面格子 \mathbb{Z}^2 の \mathbb{R}^3 への実現 $X : \mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ を離散曲面と考える．そこで，釣り合い式 (15) に対し，以下のような離散化をとる：

$$\mathbf{T}_i^{(1)} - \mathbf{T}_{i-1}^{(1)} + \mathbf{T}_j^{(2)} - \mathbf{T}_{j-1}^{(2)} + \mathbf{q}|\vec{A}| = \mathbf{0}, \quad (17)$$

ここで，以下の記号を用いた：

$$\begin{aligned} \mathbf{T}_i^{(1)} &:= - \left(\left\langle \mathbf{q}, \frac{X_{i,j} + X_{i+1,j}}{2} \right\rangle + b \right) (X_{i+1,j} - X_{i,j}), \\ \mathbf{T}_j^{(2)} &:= - \left(\left\langle \mathbf{q}, \frac{X_{i,j} + X_{i,j+1}}{2} \right\rangle + b \right) (X_{i,j+1} - X_{i,j}), \end{aligned} \quad (18)$$

\vec{A} は各頂点に対応する「面積ベクトル」に対応する．計算により，式 (17) は以下のように書き直せる：

$$\sum_{X_q: \text{adjacent to } X_p} w_{pq}(X_q - X_p) + \mathbf{q}|\vec{A}| = \mathbf{0}, \quad w_{pq} = - \left(\left\langle \mathbf{q}, \frac{X_p + X_q}{2} \right\rangle + b \right). \quad (19)$$

w_{pq} を定数とおくとき，与えられた荷重 \mathbf{q} に対して方程式 (19) は X を未知数とする線型方程式であり，このリダクションによって形状形成を行う手法を応力密度法と呼ぶ [10]．ところが，式 (19) は一般に非線型方程式であることと，滑らかな理論に鑑みると座標に関する制約条件も必要となる．これらに関する形状形成や応力解析に関する研究は現在も進行中であり，現在は図 5 のような曲面生成の手法が得られている．ここで示す形状生成は，三角形要素による有限要素法ではなく，力学的特性に基づき，座標線に沿った離散化を行い，各矩形の 4 頂点は同一円周上にあるという性質をもつように形状生成を行っている．

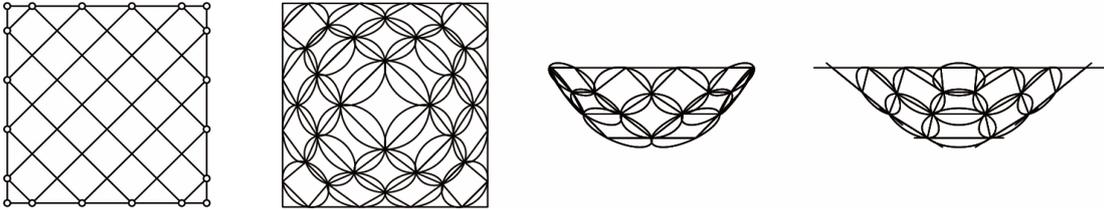


図 5: 初期メッシュと $b = 20$ のときの吊り下げ形状生成例．

7 補遺 1：極小曲面・弾性曲線との関連

7.1 極小曲面（石鹸膜の数理モデル）との関連

一般の吊り下げ曲面において荷重 $\mathbf{q} = 0$ の場合を考えると，汎関数 E は面積汎関数（の定数倍）となり，停留点は極小曲面である．ここで曲面 X が極小曲面であるとは，平均曲率が至るところゼロであるような曲面をいい，石鹸膜の数理モデルを与える．実際に釣り合い式 (9) で $\mathbf{q} = 0$ とおいても $\mathcal{H} = 0$ が得られる．さらに $T_1 = T_2 = -b$ となり，これは構造力学の分野では等張力と呼ばれる（等張力曲面は極小曲面と等価）．また式 (14) より， $\mathbf{q} = 0$ とおくと Laplace 方程式 $X_{xx} + X_{yy} = 0$ が得られる．すなわち等温座標 (x, y) で表された曲面 $X = X(x, y)$ の各座標成分関数はすべて調和関数であるという条件となり，これも極小曲面の有名な特徴づけの一つである．

7.2 Euler の弾性曲線との関連

弾性曲線との関連を注意しておく，すなわち自由境界をもつ吊り下げ曲面でかつ $\mathcal{H} = 0$ を満たす曲面は平面となり，境界曲線が平面弾性曲線となる（Bernoulli の Lintearia と呼ばれる．詳細は [7] を参照）．境界曲線を $X(s)$ と表すと，境界の長さ $L(X)$ の第一変分は

$$L(X) = - \int_{\partial M} \langle X'', \delta X \rangle ds = - \int_{\partial M} \langle \kappa_n \nu + \kappa_g N, \delta X \rangle ds$$

と表せる．ここで κ_n, κ_g はそれぞれ，境界曲線の法曲率・測地的曲率である．境界の長さを固定する変分まで考えた場合，停留点の境界が満たすべき方程式は（ c を定数として）

$$\kappa_n = 0, \quad c \cdot \kappa_g = \langle \mathbf{q}, X \rangle + b \quad (20)$$

となる．このとき $\mathcal{H} = 0$ とすると，釣り合い式から $\langle \mathbf{q}, \nu \rangle = 0$ となり， X は平面となるため，境界曲線の形状に関心がある．以下ではこの平面が (x, z) 平面であるとし，荷重 \mathbf{q} は (x, z) 平面内のベクトル $\mathbf{q} = (q_1, 0, q_2)$ として一般性を失わない．境界の釣り合い式より（測地的曲率 κ_g は通常の平面曲線としての曲率 κ に一致し）

$$c\kappa = \langle \mathbf{q}, X \rangle + b \quad (21)$$

を得る．これは振り子の方程式である，実際 $X' = (\cos \theta, 0, \sin \theta)$ とおくと $\theta' = \kappa$ より

$$c\theta'' = c\kappa' = \langle \mathbf{q}, X' \rangle = q_1 \cos \theta + q_2 \sin \theta \quad (22)$$

を得る．保存量は $C = (\theta')^2/2 - (q_1/c) \sin \theta + (q_2/c) \cos \theta$ となり，式 (22) を微分して弾性曲線の方程式

$$\kappa'' + \frac{1}{2}\kappa^3 + C\kappa = 0, \quad (23)$$

を得る．すなわち平面内のどの方向に荷重がかかっているも，境界曲線の形状は弾性曲線の一部として記述される．

8 補遺 2：懸垂線の釣り合い式・変分による特徴づけ

平面曲線としての吊り下げ曲線（懸垂線，カタナリー曲線）の場合を考える．区間 $I = [\alpha, b]$ 上で定義された (x, z) 平面上の曲線 $X(s) := (x(s), z(s))$ を考え， s は弧長パラメータとする． $X(s)$ の単位接ベクトルを $\mathbf{e} = X'$ ，単位法ベクトルを ν と表す．張力を $\mathbf{T} = T\mathbf{e}$ とおくと，微小線素における力の釣り合い方程式は

$$-\mathbf{T} + \left(\mathbf{T} + \frac{d\mathbf{T}}{ds} ds \right) + \mathbf{q} ds = 0 \iff \frac{d\mathbf{T}}{ds} + \mathbf{q} = 0 \quad (24)$$

となる．鉛直荷重 $\mathbf{q} = (0, 0, -mg)$ に対して釣り合い式を解くと以下の主張を得る：

定理 8.1. 曲線の単位長さあたりの質量を m ，重力加速度を g とおく．このとき，水平張力を T_0 とおくと， C_1, C_2 を定数として懸垂線は以下の形で表される：

$$z = \frac{T_0}{mg} \cosh \left(\frac{mg}{T_0} x + C_1 \right) + C_2. \quad (25)$$

またこのとき、張力 T は以下のように高さの 1 次関数で与えられる：

$$T = mg(z - C_2). \quad (26)$$

次に変分原理による特徴づけを考える．定ベクトル $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^2$ と実数 b に対し，汎関数 $E(X)$ を次式で定義する：

$$E(X) = \int_{\alpha}^{\beta} (\langle \mathbf{q}, X \rangle + b) ds. \quad (27)$$

曲線 X の変分 X_{ε} を $X_{\varepsilon} = X + \varepsilon \delta X + O(\varepsilon^2)$ の形で考える．

定理 8.2. 汎関数 E の第一変分は以下の式で与えられる：

$$\delta E = - \int_{\alpha}^{\beta} (\kappa(\langle \mathbf{q}, X \rangle + b) - \langle \mathbf{q}, \nu \rangle) \langle \delta X, \nu \rangle ds + [(\langle \mathbf{q}, X \rangle + b) \mathbf{e}, \delta X]_{\alpha}^{\beta}. \quad (28)$$

固定端の場合，Euler-Lagrange 方程式は

$$\kappa(\langle \mathbf{q}, X \rangle + b) - \langle \mathbf{q}, \nu \rangle = 0 \quad (29)$$

となる．

Frenet-Serret の公式により，(29) は以下のように変形できる：

$$(\langle \mathbf{q}, X \rangle + b) \mathbf{e}' + (\langle \mathbf{q}, X \rangle + b)' \mathbf{e} - \mathbf{q} = 0 \iff \frac{d}{ds} ((\langle \mathbf{q}, X \rangle + b) \mathbf{e}) - \mathbf{q} = 0 \quad (30)$$

ここで $\mathbf{T} := -(\langle \mathbf{q}, X \rangle + b) \mathbf{e}$ とおくと

$$\frac{d\mathbf{T}}{ds} + \mathbf{q} = 0 \quad (31)$$

が得られ，これは釣り合い方程式 (24) である．

謝辞

本研究は JST CREST JPMJCR1911 「設計の新パラダイムを拓く新しい離散的な曲面の幾何学」の支援を受けたものである．

参考文献

- [1] S. Adriaenssens, P. Block, D. Veenendaal and C. Williams, *Shell Structures for Architecture: Form Finding and Optimization* (Routledge, 2014).
- [2] P. Block and J. Ochsendorf, Thrust Network Analysis: A New Methodology for Three-dimensional Equilibrium, *J. Int. Assoc. Shell Spat. Struct.* **48**(3) (2007) 167–173.
- [3] J. S. Brew and W. J. Lewis, Free hanging membrane model for shell structures, *Int. J. Numer. Mech, Engng.* **71** (2007) 1513–1533.
- [4] F. Fraternali, A thrust network approach to the equilibrium problem of unreinforced masonry vaults via polyhedral stress functions, *Mech. Res. Commun.* **37**(2) (2010) 198–204.

- [5] 早川健太郎, 軸丸芳揮, 横須賀洋平, 可香谷隆, 林和希, 堺雄亮, シェル理論・膜理論への微分幾何学からのアプローチとその建築曲面設計への応用, MI レクチャーノート, Vol. 83, (2021), 九州大学マス・フォア・インダストリ研究所.
- [6] Y. Jikumaru and Y. Yokosuka, Differential geometric formulation of hanging membranes: shell membrane theory and variational principle, in preparation.
- [7] M. Koiso and B. Palmer, On a variational problem for soap films with gravity and partially free boundary, *J. Math. Soc. Japan* **57**(2) (2005) 333–355.
- [8] V. V. Novozhilov, Thin shell theory, 2nd edn., Groningen: Noordhoff, 1964.
- [9] E. Ramm, Finding Methods of Shells, *Bull. Int. Assoc. Shell Spat. Struct. (IASS)*, **57** (1992) 89–98.
- [10] H.-J. Schek, Force density method for form finding and computation of general networks, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, **3** (1974) 115–134.
- [11] E. Vouga, M. Höbinger, J. Wallner and H. Pottmann, Design of self-supporting surfaces, *ACM Trans. Graph.* **31**(4) (2012) 1–11.
- [12] サグラダ・ファミリア: https://en.wikipedia.org/wiki/Sagrada_Fam%C3%ADlia
- [13] Gaudi による逆さ吊り模型: https://en.wikipedia.org/wiki/Antoni_Gaud%C3%AD
- [14] ダイティンゲンのガソリンスタンド: https://en.wikipedia.org/wiki/Heinz_Isler
- [15] Isler の模型: <https://blog.build11c.com/2009/04/heinz-isler-a-few-important-things/>