

# 圏と関手を用いた Kuperberg 不変量の研究

東京工業大学 情報理工学院 数理・計算科学系 数理・計算科学コース  
岩木隼太 (Hayata IWAKI)

## 概要

Kuperberg 不変量とは 3 次元多様体の Heegaard 図式と有限次元 Hopf 代数から得られる 3 次元多様体の不変量である。本講演では Hopf 代数  $H$  を用いた  $S^3$  内の絡み目の補空間の Kuperberg 不変量と Drinfel'd double  $D(H)$  を用いた絡み目の Reshetikhin-Turaev 不変量のひとつが一致するという Kuperberg の主張に厳密な証明を与える。また、Heegaard 図式の圏を定義し、タングルの圏や  $\circ$ -タングルの圏、ベクトル圏との間の関手を構成し、上記の関係を圏と関手を用いて書き表す。最後に、タングルや  $\circ$ -タングル、Heegaard 図式の圏とそれらの間の関手についての関係を考察する。

## 1 Kuperberg 不変量

Kuperberg 不変量は 3 次元多様体の Heegaard 図式と有限次元 Hopf 代数を用いて計算される。Heegaard 図式は多様体のハンドル分解を表したものである。不変量はその図式より Hopf 代数  $H$  上のテンソルネットワークを得ることで計算される。まず、Hopf 代数とテンソルネットワークについて述べ、絡み目の補空間に対する Kuperberg 不変量を考察する。

### 1.1 Hopf 代数

**定義 1.** ( $k$ -Hopf 代数).

$S: H \rightarrow H$  とする。  $(H, M, i, \Delta, \varepsilon, S)$  が  $k$ -Hopf 代数とは、  $(H, M, i, \Delta, \varepsilon)$  が  $k$ -双代数であり、  $S$  について以下の式が成り立つものである。

$$M(\text{id}_H \otimes S)\Delta = M(S \otimes \text{id}_H)\Delta = i\varepsilon.$$

Hopf 代数  $(H, M, i, \Delta, \varepsilon, S)$  を単に  $H$  と書くこともある。また、  $S^2 = \text{id}_H$  であるとき Hopf 代数  $H$  は involutory であるという。

今後、特に断りがなければ Hopf 代数は有限次元で involutory なものを考えることとする。

**定義 2.** (integral, cointegral).

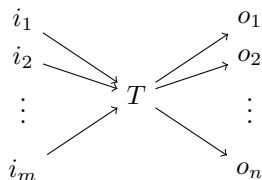
$(H, M, i, \Delta, \varepsilon, S)$  を Hopf 代数とする。  $\mu_L$  [resp.  $\mu_R$ ] が left [resp. right] integral とは、以下を満たすものである。

$$(\mu_L \otimes \text{id}_H)\Delta = i\mu_L \quad [\text{resp.} \quad (\text{id}_H \otimes \mu_R)\Delta = i\mu_R]$$

また、  $e_L$  [resp.  $e_R$ ] が left [resp. right] cointegral とは、以下を満たすものである。

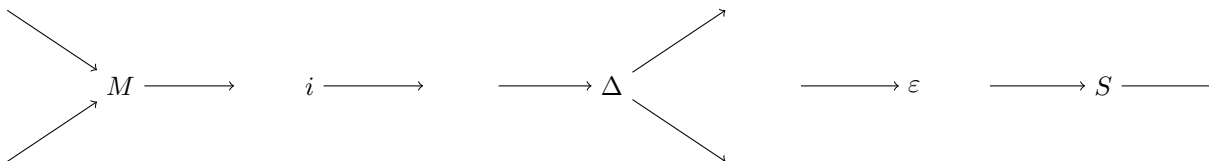
$$M(e_L \otimes \text{id}_H) = e_L\varepsilon \quad [\text{resp.} \quad M(\text{id}_H \otimes e_R) = e_R\varepsilon]$$

これまでに定義した写像を視覚的に捉えるため、テンソルネットワークを導入する。  $V$  を体  $k$  上の有限次元ベクトル空間とする。  $V$  上のテンソルネットワークとは、テンソルを表す向き付きグラフである。 テンソル  $T \in (V^*)_{i_1} \otimes (V^*)_{i_2} \otimes \cdots \otimes (V^*)_{i_m} \otimes V_{o_1} \otimes V_{o_2} \cdots \otimes V_{o_n}$  に対して、  $T$  に入る辺として反時計回りの順に  $i_1, i_2, \dots, i_m$ ,  $T$  から出ていく辺として時計回りの順に  $o_1, o_2, \dots, o_n$  を持つグラフ



を  $T$  のテンソルネットワークと呼ぶ。

テンソル  $T$  は線形写像  $V^{\otimes m} \rightarrow V^{\otimes n}$  と思うことができる。 テンソルネットワークを用いて Hopf 代数の各写像を以下のように表す。



次に、Hopf 代数の満たす性質を紹介する。

**系 3.**  $H$  が involutory な Hopf 代数のとき、以下の 2 つのテンソルは right integral かつ left integral である。



前者を  $T \in H^*$  と表し、trace と呼ぶ。 と表す。 さらに以下の 2 つのテンソルは right cointegral かつ left cointegral である。



前者を  $C \in H$  と表し、cotrace と呼ぶ。

## 1.2 Kuperberg 不変量

### 1.2.1 ハンドル体

**定義 4.** (ハンドル).

$\lambda \in \{0, 1, 2, \dots, m\}$  次元円盤と  $m - \lambda$  次元円盤の直積

$$D^\lambda \times D^{m-\lambda}$$

を  $m$  次元  $\lambda$ -ハンドルという.

**定義 5.** (ハンドル体).

以下のようなものを  $m$  次元ハンドル体と呼ぶ.

1.  $m$  次元 0-ハンドル  $D^m$  は  $m$  次元ハンドル体である.
2.  $m$  次元ハンドル体  $N$  に  $C^\infty$  級の埋め込み  $\varphi: \partial D^\lambda \times D^{m-\lambda} \rightarrow \partial N$  によって  $\lambda$  を貼り付けた  $N \cup D^\lambda \times D^{m-\lambda}$  は  $m$  次元ハンドル体.

$C^\infty$  級の埋め込み  $\varphi: \partial D^\lambda \times D^{m-\lambda} \rightarrow \partial N$  を接着写像と呼ぶ. さらに,  $\partial D^\lambda$  を接着球面と呼ぶ.

**定理 6.** (多様体のハンドル分解).

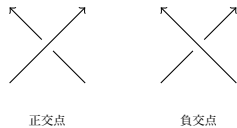
任意の閉じた  $m$  次元多様体  $M$  について,  $M$  はある  $m$  次元ハンドル体で表すことができる.

閉 3 次元多様体を同じ種数の 2 つのハンドル体の境界に沿った張り合わせに分解することを Heegaard 分解と呼ぶ. この境界を Heegaard 曲面と呼ぶ. この分解で得られたハンドル体をそれぞれ upper, lower と名付ける. 2 つのハンドル体が lower upper で名付けられているとき, Heegaard 曲面の向きから 2 つのハンドル体を境界に沿って張り合わせてできた多様体の向きを定めることができる.  $S$  が閉曲面であるとき,  $S$  上のハンドル体図式  $d$  を次のように定めることができる.  $S$  へのハンドルの埋め込みの非交和な接着球面で  $c_i$  の近傍を  $S$  から除いたものが平面へ埋め込めるものの集合を  $\{c_i\}$  とする. このとき,  $(S, \{c_i\})$  をハンドル体図式と呼ぶ.

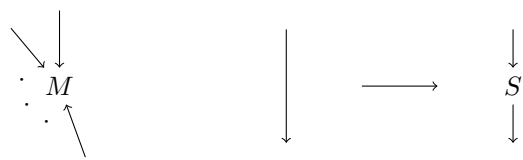
**定義 7.** (Heegaard 図式).

閉曲面  $S$  上の 3 次元閉多様体の Heegaard 図式とは, その多様体の Heegaard 分解によって得られた 2 つの同じ種数のハンドル体に対応する  $S$  上のハンドル体図式  $d_u, d_l$  と Heegaard 曲面  $S$  の組  $(S, d_u, d_l)$  である.

Kuperberg 不変量は Heegaard 図式の upper circle と lower circle の各交点にテンソルネットワークを対応させてそれを縮約したものを正規化したものである.  $D$  を lower circle と upper circle が向き付けられた Heegaard 図式とする. さらに,  $H$  を次元が 1 以上の有限次元 involutory Hopf 代数とする. これらを用いて次のように  $\#(D, H)$  を定義する. ただし, 定義に使う正交点, 負交点はそれぞれ以下のものとする.



図の, 上を通る辺は upper circle, 下を通る辺は lower circle に対応している. upper circle  $u$  が,  $m$  個の lower circle と交わっているとき,  $m$  本の辺が入るテンソルネットワークを対応させる. ここで,  $m$  本の辺は反時計回りに交点に対応している. ただし,  $u$  と lower circle の交点が負交点ならば, 下図のように  $M$  に入る辺を置き換える.



次に, lower circle  $l$  が,  $n$  個の upper circle と交わっているとき,  $n$  本の辺が出るテンソルネットワークを対応さ

せる. ここで,  $n$  本の辺は時計回りで交わる順に交点と対応している.



最後にそれぞれの交点に対して, その交点を構成する upper circle と lower circle のテンソルネットワークの対応する辺を縮約し, 新たなテンソルネットワークを得る. この操作を全ての circle に対して行ってきたテンソルの値を  $Z(D; H)$  とする. この  $Z(D; H)$  を用いて Heegaard 図式から  $k$  上の値を得る.

**定義 8.**  $S$  を閉曲面,  $D$  を  $S$  上の Heegaard 図式,  $H$  を有限次元 involutory Hopf 代数とする. このとき,  $\#(D, H) \in k$  を

$$\#(D, H) = Z(D; H)(\dim H)^{g(S)-n_u-n_l}$$

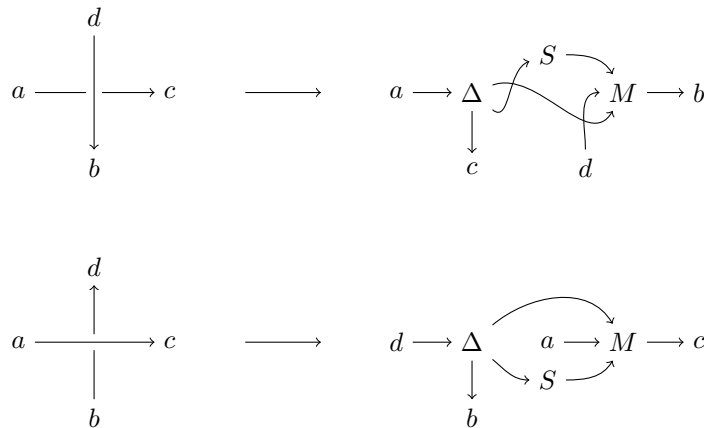
と定める. ただし,  $g(S)$  は曲面  $S$  の種数であり,  $n_u, n_l$  はそれぞれ upper circle, lower circle の数である.

**定理 9.**  $\#(D, H)$  は 3 次元 bordism の不変量である. 特に, 閉 3 次元多様体の不変量である.

ここで, 3 次元 bordism とは 3 次元多様体  $M$  の内部から  $B^3$  を取り除き, その閉包を得る操作による同値関係から得られる 3 次元多様体の同値類である.

### 1.3 絡み目の補空間に対する Kuperberg 不変量

絡み目の補空間の Heegaard 図式から Kuperberg 不変量を得ることができる. 絡み目の各交点について次のようなテンソルネットワークを対応させる.



この操作を全ての交点について行い, 絡み目に沿ってテンソルネットワークをつなげることにより, Kuperberg 不変量  $\#(D, H)$  が得られる.

Reshetikhin-Turaev 不変量 [3] は絡み目  $L$  の不変量である. Drinfel'd double  $D(H)$  の自身への有限次元表現を  $H^* \otimes C$  へ制限したものに付随する Reshetikhin-Turaev 不変量と Hopf 代数  $H$  を用いた  $S^3$  内の絡み目  $L$  の補空間 Kuperberg 不変量が一致していることが知られている.  $(H, M, i, \Delta, \varepsilon, S)$  を Hopf 代数と

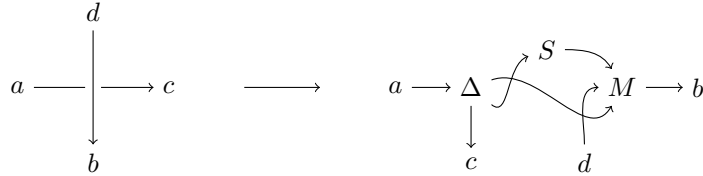
する. Drinfel'd double  $D(H)$  とは 6 つ組  $(H^* \otimes H, M_{D(H)}, i_{D(H)}, \Delta_{D(H)}, \varepsilon_{D(H)}, S_{D(H)})$  である. ただし,  $M_{D(H)}, i_{D(H)}, \Delta_{D(H)}, \varepsilon_{D(H)}, S_{D(H)}$  は以下の通りである.

$$\begin{aligned} M_{D(H)}: H^* \otimes H \otimes H^* \otimes H \ni f \otimes a \otimes g \otimes b &\mapsto fg(S^{-1}(a''')?a') \otimes a''b \in H^* \otimes H, \\ i_{D(H)}: k \ni 1_k &\mapsto i_{H^*} \otimes i_H = \varepsilon \otimes i \in H^* \otimes H, \\ \Delta_{D(H)}: H^* \otimes H \ni f \otimes a &\mapsto \sum f'' \otimes a' \otimes f' \otimes a'' \in H^* \otimes H \otimes H^* \otimes H, \\ \varepsilon_{D(H)}: H^* \otimes H \ni f \otimes a &\mapsto f(i)\varepsilon(a) \in k, \\ S_{D(H)}: H^* \otimes H \ni f \otimes a &\mapsto \sum f'(S^{-1}(a'''))f'''(a')S^{-1}(f'') \otimes S^{-1}(a'') \in H^* \otimes H. \end{aligned}$$

Drinfel'd double  $D(H)$  は Hopf 代数の構造を持つ. さらに,  $R \in D(H) \otimes D(H)$  を

$$R_{D(H)} = \sum_j \varepsilon_H \otimes e_j \otimes e^j \otimes i_H$$

と定義すると,  $(H^* \otimes H, M_{D(H)}, i_{D(H)}, \Delta_{D(H)}, \varepsilon_{D(H)}, S_{D(H)}, R_{D(H)})$  は準三角 Hopf 代数である. 絡み目の正交点に対して Kuperberg 不変量の構成は次のようなテンソルネットワークを与えた.



このテンソルネットワークを  $H^* \otimes H^*$  から  $H^* \otimes H^*$  への線形写像と思うと,

$$f \otimes g \mapsto f_{(3)}S(f_{(1)})g \otimes f_{(2)} \quad (1)$$

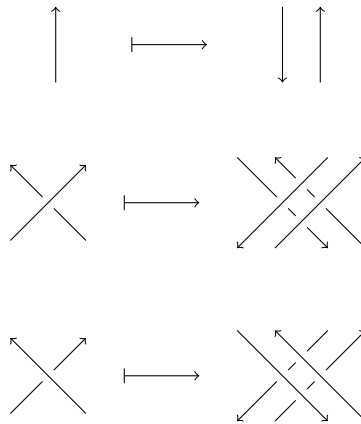
という写像が得られる. 一方で, 正交点に対して Drinfel'd double  $D(H)$  の自身への有限次元表現を  $H^* \otimes C$  へ制限したものに付随する Reshetikhin-Turaev 不変量は次の  $H$ -準同型写像を対応させる.

$$\begin{aligned} f \otimes C \otimes g \otimes C &\mapsto \sum_k M_{D(H)}((e^k \otimes i) \otimes (g \otimes C)) \otimes M_{D(H)}((\varepsilon \otimes e_k) \otimes (f \otimes C)) \\ &= \sum_k g_{(1)}(S^{-1}(i))g_{(3)}(i)e^k g_{(2)} \otimes iC \otimes f_{(1)}(S^{-1}(e_{k(3)}))f_{(3)}(e_{k(1)})\varepsilon f_{(2)} \otimes e_{k(2)}C \\ &= \sum_k e^k g \otimes C \otimes f_{(1)}(S^{-1}(e_{k(3)}))f_{(3)}(e_{k(1)})f_{(2)} \otimes e_{k(2)}C \\ &= \sum_k e^k g \otimes C \otimes f_{(1)}(S^{-1}(e_{k(3)}))f_{(3)}(e_{k(1)})f_{(2)} \otimes \varepsilon(e_{k(2)})C \\ &= \sum_k e^k g \otimes C \otimes f_{(1)}(S^{-1}(e_{k(2)}))f_{(3)}(e_{k(1)})f_{(2)} \otimes C \\ &= \sum_{k,l} e^k e^l g \otimes C \otimes f_{(1)}(S^{-1}(e_l))f_{(3)}(e_k)f_{(2)} \otimes C \\ &= f_{(3)}S^{-1}(f_{(1)})g \otimes C \otimes f_{(2)} \otimes C \end{aligned}$$

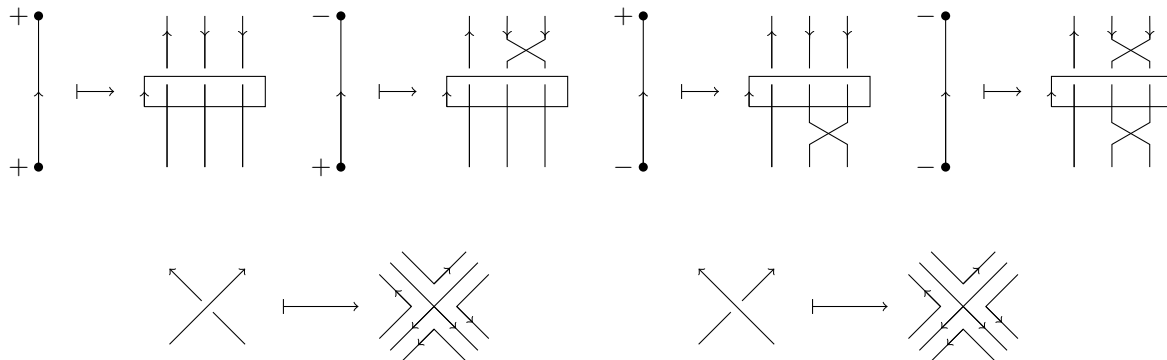
$H$  の involutory 性より  $S^{-1} = S$  であるから, この写像は (1) と同一視することができる. 負交点についても同様の結果が得られる.

## 2 タングル, o-タングル

以降, 絡み目をタングルとして扱う. o-タングルとはタングルに仮想交点を許したものである. 仮想交点とは, 交点を通る辺に上下を付けないものである. o-タングルは branched spine を表したものである. ここで, 次のようなタングルと o-タンダルの対応を考える.



このようにして絡み目  $L$  を表すタングルから得られた o-タングルが表す branched spine は  $S^2 \times [-1, 1]$  から絡み目  $L$  の開近傍を取り除いたものを表す [2]. また, branched spine から Heegaard 図式を得ることができる [4]. 次のようにして o-タングルから Heegaard 図式を得られる.



## 3 いろいろな圏と関手

タングルや o-タングルを射にした圏を定義する. タングル圏  $\mathcal{T}$  は対象が  $\{+, -\}$  の列  $\cup \emptyset$  であり, 射がタングルであるような圏である. o-タングル圏は対象が  $\{+, -\}$  の列  $\cup \emptyset$  であり, 射を o-タングルであるような圏である. Heegaard 図式圏は対象が  $\{+, -\} \times \{u, l\}$  の列  $\cup \emptyset$  であり, 射がタングルであるような圏である. Heegaard 図式圏の対象が他の 2 つの圏のものとは異なるのは, upper circle と lower circle を区別するためである.

1. tangle 圏  $\mathcal{T}$ .

- (対象)  $\text{Ob}(\mathcal{T}) = \{\{+, -\} \text{ の列 } \} \cup \emptyset$ .
- (射)  $\text{Hom}_{\mathcal{T}}(\varepsilon, \varepsilon') = \{(\varepsilon, \varepsilon') \text{ 型の tangle の isotopy class}\}$ .
- (恒等射)  $\text{id}_{\emptyset}$  は空のタンクル,  $\text{id}_{\varepsilon}$  は区間  $\{1, 2, \dots, n\} \times \{0\} \times [0, 1]$  で構成される  $(\varepsilon, \varepsilon')$  型の tangle の isotopy class.
- (合成射)  $L \in \text{Hom}_{\mathcal{T}}(\varepsilon, \varepsilon')$ ,  $L' \in \text{Hom}_{\mathcal{T}}(\varepsilon', \varepsilon'')$  に対して,  $L \circ L'$  は tangle  $L$  の上部に tangle  $L'$  を置いて繋げたもの.
- (対象のテンソル積)  $\varepsilon = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_k), \varepsilon' = (\varepsilon'_1, \varepsilon'_2, \dots, \varepsilon'_l) \in \text{Ob}(\mathcal{T})$  に対し,  $\varepsilon \otimes \varepsilon' = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k, \varepsilon'_1, \dots, \varepsilon'_l)$ .
- (射のテンソル積)  $L, L' \in \text{Hom}(\mathcal{T})$  に対し,  $L \otimes L'$  は  $L$  の右側に  $L'$  を置いたもの.

## 2. o-tangle 圏 $\mathcal{O}$ .

- (対象)  $\text{Ob}(\mathcal{O}) = \{\{+, -\} \text{ の列 } \} \cup \emptyset$ .
- (射)  $\text{Hom}(\mathcal{O}) = \{(\varepsilon, \varepsilon') \text{ 型の o-タンクルの isotopy class}\}$ .
- (恒等射)  $\text{id}_{\emptyset}$  は空の o-タンクル,  $\text{id}_{\varepsilon}$  は区間  $\{1, 2, \dots, n\} \times \{0\} \times [0, 1]$  で構成される o-tangle の isotopy class.
- (合成射)  $L \in \text{Hom}_{\mathcal{O}}(\varepsilon, \varepsilon')$ ,  $L' \in \text{Hom}_{\mathcal{O}}(\varepsilon', \varepsilon'')$  に対して,  $L \circ L'$  は o-タンクル  $L$  の上部に o-タンクル  $L'$  を置いて繋げたもの.
- (対象のテンソル積)  $\varepsilon = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_k), \varepsilon' = (\varepsilon'_1, \varepsilon'_2, \dots, \varepsilon'_l) \in \text{Ob}(\mathcal{O})$  に対し,  $\varepsilon \otimes \varepsilon' = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k, \varepsilon'_1, \dots, \varepsilon'_l)$ .
- (射のテンソル積)  $L, L' \in \text{Hom}(\mathcal{O})$  に対し,  $L \otimes L'$  は  $L$  の右側に  $L'$  置いたもの.

## 3. Heegaard 図式圏 $\mathcal{Hee}$ .

- (対象)  $\text{Ob}(\mathcal{Hee}) = \{\{+, -\} \times \{u, l\} \text{ の列 } \} \cup \emptyset$ .
- (射)  $\text{Hom}(\mathcal{Hee}) = \{(\varepsilon, \varepsilon') \text{ 型の o-タンクルの isotopy class}\}$ .
- (恒等射)  $\text{id}_{\emptyset}$  は空の o-タンクル,  $\text{id}_{\varepsilon}$  は区間  $\{1, 2, \dots, n\} \times \{0\} \times [0, 1]$  で構成される o-タンクルの isotopy class.
- (合成射)  $L \in \text{Hom}_{\mathcal{O}}(\varepsilon, \varepsilon')$ ,  $L' \in \text{Hom}_{\mathcal{O}}(\varepsilon', \varepsilon'')$  に対して,  $L \circ L'$  は o-タンクル  $L$  の上部に o-タンクル  $L'$  を置いて繋げたもの.
- (対象のテンソル積)  $\varepsilon = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_k), \varepsilon' = (\varepsilon'_1, \varepsilon'_2, \dots, \varepsilon'_l) \in \text{Ob}(\mathcal{Hee})$  に対し,  $\varepsilon \otimes \varepsilon' = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k, \varepsilon'_1, \dots, \varepsilon'_l)$ .
- (射のテンソル積)  $L, L' \in \text{Hom}(\mathcal{Hee})$  に対し,  $L \otimes L'$  を  $L$  の右側に  $L'$  置いたもの.

これらの圏の間の関手を定める.

### 1. $\mathcal{Hee}$ から $\mathbf{Vect}_k$ への functor $F_{\mathcal{Hee}}^{\mathbf{Vect}_k}$ .

$$F_{\mathcal{Hee}}^{\mathbf{Vect}_k} : \text{Ob}(\mathcal{Hee}) \ni (+, u), (+, l) \mapsto H \in \text{Ob}(\mathbf{Vect}_k), \\ \text{Ob}(\mathcal{Hee}) \ni (-, u), (-, l) \mapsto H^* \in \text{Ob}(\mathbf{Vect}_k),$$

$$\text{Hom}(\mathcal{Hee}) \ni \begin{array}{c} \swarrow \quad \searrow \\ \quad \quad \quad \end{array} \longmapsto \begin{array}{ccc} & \swarrow & \searrow \\ M & \longleftarrow & \Delta \\ \uparrow & & \uparrow \end{array} \in \text{Hom}(\mathbf{Vect}_k)$$

$$\text{Hom}(\mathcal{H}ee) \ni \begin{array}{c} \nearrow \\ \searrow \\ \swarrow \\ \searrow \end{array} \longmapsto \begin{array}{c} \uparrow \\ M \leftarrow S \rightarrow \Delta \\ \uparrow \end{array} \in \text{Hom}(\mathbf{Vect}_k)$$

2.  $\mathcal{H}ee$  から  $\mathcal{O}$  への functor  $F_{\mathcal{H}ee}^{\mathcal{O}}$ .

対象の遷移は  $u, l$  の色を忘れたものとする. すなわち,  $(+, u), (+, l) \mapsto +$ ,  $(-, u), (-, l) \mapsto -$  である. 射は同じものへと写す.

3. Reshetikhin-Turaev 不変量を表す functor  $\mathbf{RT}$ .

$$\mathbf{RT}: \mathcal{T} \rightarrow \mathbf{Vect}_k$$

はタングルの Drinfel'd double  $D(H)$  の自分自身への有限次元表現を  $H^* \otimes C$  に制限したものに付随する Reshetikhin-Turaev 不変量に対応させる関手である.

4.  $\mathcal{T}$  から  $\mathcal{O}$  への functor  $F_{\mathcal{T}}^{\mathcal{O}}$ .

$$F_{\mathcal{T}}^{\mathcal{O}}: \text{Ob}(\mathcal{T}) \ni +, - \mapsto (-, +) \in \text{Ob}(\mathcal{O}),$$

$$\text{Hom}(\mathcal{T}) \ni \begin{array}{c} \uparrow \\ \downarrow \end{array} \longmapsto \begin{array}{c} \downarrow \\ \uparrow \end{array} \in \text{Hom}(\mathcal{O})$$

$$\text{Hom}(\mathcal{T}) \ni \begin{array}{c} \nearrow \\ \searrow \\ \swarrow \\ \searrow \end{array} \longmapsto \begin{array}{c} \nearrow \\ \searrow \\ \swarrow \\ \searrow \\ \swarrow \\ \searrow \end{array} \in \text{Hom}(\mathcal{O})$$

$$\text{Hom}(\mathcal{T}) \ni \begin{array}{c} \nearrow \\ \searrow \\ \swarrow \\ \searrow \end{array} \longmapsto \begin{array}{c} \nearrow \\ \searrow \\ \swarrow \\ \searrow \\ \swarrow \\ \searrow \end{array} \in \text{Hom}(\mathcal{O})$$

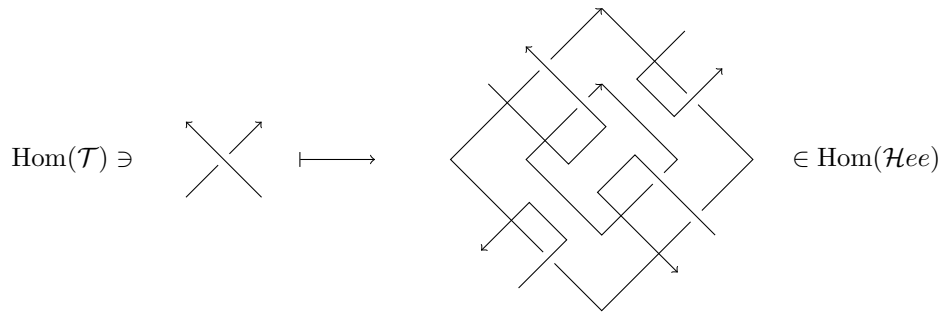
5.  $\mathcal{T}$  から  $\mathcal{H}ee$  への functor  $F_{\mathcal{T}}^{\mathcal{H}ee}$ .

$$F_{\mathcal{T}}^{\mathcal{H}ee}: \text{Ob}(\mathcal{T}) \ni (+, u), (+, l) \mapsto H \in \text{Ob}(\mathbf{H}ee),$$

$$\text{Ob}(\mathcal{T}) \ni (-, u), (-, l) \mapsto H^* \in \text{Ob}(\mathbf{H}ee),$$

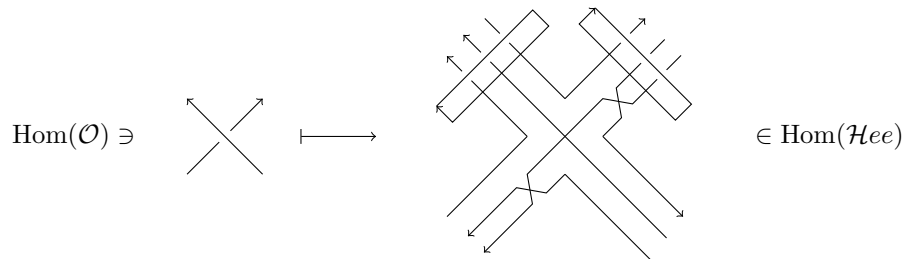
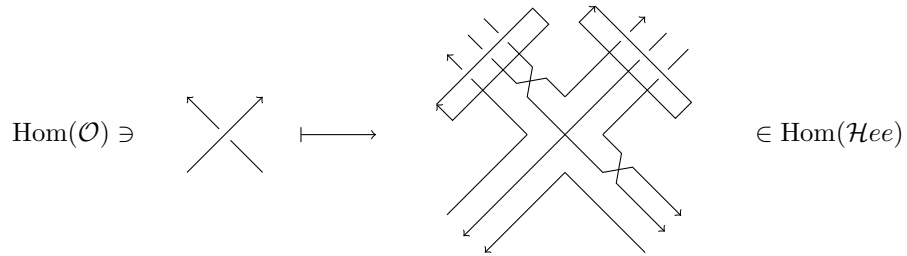
$$\text{Hom}(\mathcal{T}) \ni \begin{array}{c} \nearrow \\ \searrow \\ \swarrow \\ \searrow \end{array} \longmapsto \begin{array}{c} \text{A complex tangle diagram with multiple crossings and strands} \end{array} \in \text{Hom}(\mathcal{H}ee)$$





6.  $\mathcal{O}$  から  $\mathcal{H}ee$  への functor  $F_{\mathcal{O}}^{\mathcal{H}ee}$ .

$$\begin{aligned}
 F_{\mathcal{O}}^{\mathcal{H}ee}: \text{Ob}(\mathcal{O}) \ni + &\mapsto ((+, u), (-, u), (-, u)) \in \text{Ob}(\mathcal{H}ee), \\
 \text{Ob}(\mathcal{O}) \ni - &\mapsto ((+, u), (+, u), (-, u)) \in \text{Ob}(\mathcal{H}ee),
 \end{aligned}$$



1 は Kuperberg 不変量の構成の一部である Heegaard 図式からテンソルネットワークを得る方法を表している. 2 は Heegaard 図式の upper circle と lower circle を忘れることで  $\circ$ -タングルとみる関手である. 3 はタングルから結び目の不変量である Reshetikhin-Turaev 不変量を計算する関手である. 4 は [2] の構成である. 絡み目  $L$  に対して 4 で写された  $\circ$ -タングルは  $S^2 \times [-1, 1]$  から絡み目  $L$  の開近傍を取り除いた branched spine を表す. 5 は絡み目からその補空間の Heegaard 図式を作る関手である. 6 は branched spine から Heegaard 図式を作る関手である [4].

#### 4 各圏間の関係

$$\begin{array}{ccc}
 \mathcal{T} & \longrightarrow & \mathcal{O} \\
 \downarrow & \searrow & \downarrow \\
 \mathcal{H}ee & \longrightarrow & \mathbf{Vect}_k
 \end{array}$$

これまでに定義した圏や関手を用いると上のような図式が考えられる。  $H$  を用いた絡み目  $L$  の補空間の Kuperberg 不変量と Drinfel'd double  $D(H)$  の自分自身への有限次元表現を  $H^* \otimes C$  に制限したものに付随する Reshetikhin-Turaev 不変量が一致することにより、

$$F_{\mathcal{H}ee}^{Vect_k} \circ F_{\mathcal{T}}^{\mathcal{H}ee} = RT$$

であることがわかる。また、 $F_{\mathcal{T}}^{\mathcal{O}}$  によって作られる branched spine は  $S^2 \times [-1, 1]$  内の元のタングルの補空間を表すが、

$$F_{\mathcal{O}}^{\mathcal{H}ee} \circ F_{\mathcal{T}}^{\mathcal{O}} \neq F_{\mathcal{H}ee}^{Vect_k} \circ F_{\mathcal{T}}^{\mathcal{H}ee}$$

であることがテンソルネットワークを計算することによりわかる。

## 参考文献

- [1] Kuperberg, Greg. "Involutory Hopf algebras and 3-manifold invariants." *International Journal of Mathematics* 2.01 (1991): 41–66.
- [2] Baseilhac, Stephane, and Riccardo Benedetti. "The Kashaev and quantum hyperbolic link invariants." arXiv preprint arXiv:1101.1851 (2011).
- [3] Reshetikhin, Nicolai Yu, and Vladimir G. Turaev. "Ribbon graphs and their invariants derived from quantum groups." *Communications in Mathematical Physics* 127.1 (1990): 1–26.
- [4] Benedetti, Riccardo, and Carlo Petronio. "Branched standard spines of 3-manifolds." Springer, 2006.
- [5] Mihalache, Serban Matei, Sakie Suzuki, and Yuji Terashima. "The Heisenberg double of involutory Hopf algebras and invariants of closed 3-manifolds." arXiv preprint arXiv:2104.03037 (2021).
- [6] 松本幸夫. Morse 理論の基礎. 岩波書店, 2005.