消散項を持つ非線形クラインゴルドン方程式の 2 ソリトン周りの大域ダイナミクス

京都大学数理解析研究所
石塚健二郎 (Kenjiro ISHIZUKA)

概要

消散項を持つ非線形クライン・ゴルドン方程式について考える. この方程式は大域挙動が近年研究されており,[2] では 1 次元の場合において, 大域解が時間が経ったときに n 個のソリトンの和に漸近する「n ソリトン解」, または 0 に収束する「減衰解」になることを示した. 一方,n ソリトン解の近傍における初期値と大域挙動の関係性はわかっていない. 本講演では 2 ソリトン解近傍の初期値において,「2 ソリトン解集合」,2 つの「1 ソリトン解集合」,「減衰解集合」, そして「爆発解集合」の 5 つの連結な集合に分類でき, さらに減衰解集合と爆発解集合の境界が 2 つの 1 ソリトン解集合と 2 ソリトン解集合の和集合になっていることを示す. 本講演は京都大学の中西賢次氏との共同研究に基づく.

1　導入

1.1　主結果

次の消散項を持つ非線形クライン · ゴルドン方程式

$$\partial_t^2 u + 2\alpha\partial_t u - \Delta u + u - |u|^{p-1}u = 0,\ \ ((t,x) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}^N) \tag{DNLKG}$$

を考える. ただし $\alpha > 0$ で p, N は以下の条件

$$N = 1, 2 \text{ ならば } 2 < p < \infty,\ \ N \geq 3 \text{ ならば } 2 < p < \frac{N+2}{N-2}$$

を満たすとする. このとき (DNLKG) の解 $\vec{u}(t) := (u(t), \partial_t u(t))$ が $\mathcal{H} := H^1(\mathbb{R}^N)\times L^2(\mathbb{R}^N)$ で局所適切であることが知られている. ここでいう局所適切とは, 任意の初期値 $\vec{u}(0) \in \mathcal{H}$ に対して, この初期値に依存した最大存在区間 I 上での (DNLKG) の解 $\vec{u} \in C(I;\mathcal{H})$ が唯一つ存在することを指す.
次に,(DNLKG) のエネルギー関数として $E : \mathcal{H} \to \mathbb{R}$ を

$$E((u_1,u_2)) := \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} \{|\nabla u_1|^2 + |u_1|^2 + |u_2|^2 - \frac{2}{p+1}|u_1|^{p+1}\} \tag{1}$$

と定義する. このとき (DNLKG) の解 $\vec{u}$ は

$$E(\vec{u}(t_2)) - E(\vec{u}(t_1)) = -2\alpha\int_{t_1}^{t_2} \|\partial_t u(t)\|_{L^2}^2 dt \tag{2}$$

を満たす. さらに $Q:\mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ を

$$-\Delta Q + Q - |Q|^{p-1}Q = 0 \tag{3}$$

を満たす正定値球対称な解とする.(3) の解で正定値球対称であるものが唯一つ存在することは [6] に記されている. 本研究では Q を平行移動, または符号反転させたものをソリトンと呼ぶ.
(DNLKG) の解の大域挙動について, まず以下のように定義する.

- (DNLKG) の解 $\vec{u}$ においてある $T \in (0,\infty)$ が存在して $t \to T-0$ で $\|\vec{u}(t)\|_{\mathcal{H}} \to \infty$ のとき $\vec{u}$ を爆発解と定義する.
- (DNLKG) の大域解 $\vec{u}$ が $\lim_{t\to\infty} \|\vec{u}(t)\|_{\mathcal{H}} = 0$ となるとき,$\vec{u}$ を減衰解と定義する.
- ある $K \in \mathbb{N}$ と $\sigma \in \{\pm 1\}^K$, $z:[0,\infty) \to (\mathbb{R}^N)^K$ が存在して,(DNLKG) の大域解 $\vec{u}$ が

$$\lim_{t\to\infty} \|u(t,x) - \sum_{j=1}^{K} \sigma_j Q(x - z_j(t))\|_{H^1} + \|\partial_t u(t)\|_{L^2} = 0\ ,\ \lim_{t\to\infty} \min_{j\neq k} |z_j(t) - z_k(t)| = \infty$$

  を満たすとき $\vec{u}$ を K ソリトン解と定義する.

$N=1$ のとき,[2] によって (DNLKG) の解は上のいずれかになることが示された. 我々の興味は初期値と上の解の大域挙動の対応付けである. この興味に対する研究の結果, 十分離れた異符号の 2 つのソリトンの重ね合わせの近傍での初期値と大域挙動の対応付けを示した.
主結果を述べるために Q 周りの線形化作用素について述べる. まず作用素 L を

$$L := -\Delta + 1 - pQ^{p-1} \tag{4}$$

とする. このとき [1] より, 作用素 L は唯一つ負の固有値を持つことが知られている. このとき負の固有値を $-\nu_0^2$ (ただし $\nu_0 > 0$) とし,L^2 ノルムが 1 である固有ベクトルで正定値のものを Y とする. すなわち,$Y \in H^1(\mathbb{R}^N)$ は正定値の球対称な関数で

$$LY = -\nu_0^2 Y\ ,\ \|Y\|_{L^2} = 1 \tag{5}$$

を満たすものとする. このとき (DNLKG) に対して $\vec{u} = \vec{Q} + \vec{v}$ とおくと

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} v \\ \partial_t v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -L & -2\alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v \\ \partial_t v \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ f(Q+v) - f(Q) - f'(Q)v \end{pmatrix}$$

なので, 方程式の線形化を考えたとき,

$$e^{\nu_+ t}Y_+\ (\text{ただし}\ Y_+ = \begin{pmatrix} Y \\ \nu_+ Y \end{pmatrix},\ \nu_+ := -\alpha + \sqrt{\alpha^2 + \nu}\ )$$

という解が存在する. それゆえ, この Y^+ の方向は不安定な成分となっている.[3] では十分離れた異符号の 2 つのソリトンの重ね合わせの近傍において, それぞれのソリトン周りの不安定成分を制御することで 2 ソリトン解が余次元 2 の多様体をなすことを示した. 我々はこの近傍内の初期値と大域挙動の対応付けを行った.
主定理を述べるためにもう少し用語の定義を行う. まず

$$Y^-(x) := \begin{pmatrix} \frac{\nu}{\nu_+}Y \\ Y \end{pmatrix}$$

と定義し,$|z_1 - z_0| \gg 1$ なる $z = (z_0, z_1) \in (\mathbb{R}^N)^2$ に対して

$$\mathcal{A}_{z,\delta} := \{\varphi \in \mathcal{H} | \langle \varphi, Y^-(\cdot - z_j)\rangle = 0 \ (j = 0, 1), \|\varphi\|_{\mathcal{H}} < \delta\} \tag{6}$$

とする. ただし $\langle \cdot, \cdot \rangle$ は $L^2(\mathbb{R}^N)$ の標準内積である. このとき,$|z_1 - z_0|$ が十分大きいので

$$\mathcal{H} = \mathbb{R}Y^+(x - z_0) \oplus \mathbb{R}Y^+(x - z_1) \oplus \mathcal{A}_{z,\infty} \tag{7}$$

が容易にわかる. それゆえ 2 ソリトンの近傍に対して (7) の形で分解することで 2 つの方向の不安定成分を取り出すことができる. 我々の主結果は以下のとおりである ($\vec{Q} := (Q, 0)$ とする).

定理 1.1. ある $\delta \in (0, 1)$ が存在して以下が成立する.
$\sigma_0, \sigma_1 \in \{\pm 1\}$ と $z = (z_0, z_1) \in (\mathbb{R}^N)^2$ が

$$\sigma_0\sigma_1 = -1 \ , \ |z_0 - z_1| > \frac{1}{\delta} \tag{8}$$

を満たすとする. このときあるリプシッツ連続な写像 $F_j : \mathcal{A}_{z,\delta} \times [-\delta, \delta] \to [-\delta, \delta]$ が存在して (DNLKG) の初期値

$$\sum_{j=0,1} \sigma_j(\vec{Q} + a_jY^+)(\cdot - z_j) + \varphi \ (\varphi \in \mathcal{A}_{z,\delta}, \ a_0, a_1 \in [-\delta, \delta])$$

の解 $\vec{u}$ の挙動は以下のように分類される.

- $j = 0, 1$ の両方に対して $a_j = F_j(\varphi, a_{1-j})$ のとき $\vec{u}$ は *2* ソリトン解となる.
- $j = 0, 1$ の片方に対して $a_j = F_j(\varphi, a_{1-j})$ かつ $a_{1-j} < F_{1-j}(\varphi, a_j)$ のとき $\vec{u}$ は *1* ソリトン解となる.
- $j = 0, 1$ の両方に対して $a_j < F_j(\varphi, a_{1-j})$ のとき $\vec{u}$ は減衰解となる.
- (a_0, a_1) が上記以外の場合 $\vec{u}$ は有限時間で爆発する.

主定理の 2 ソリトン解はリプシッツ連続 $G : \mathcal{A}_{z,\delta} \to (-\delta, \delta)^2$ を用いて「$(a_0, a_1) = G(\varphi)$ なら 2 ソリトン解」と言い換えることができる. 先のリプシッツ写像 G の存在については [3] で示されている. 主定理ではこの 2 ソリトン解の近傍を考えたとき,「2 ソリトン解集合」と 2 つの「1 ソリトン解集合」, そして「減衰解集合」と「爆発解集合」の 5 つの連結な集合に分割でき, さらに減衰解と爆発解の境界が 2 つの 1 ソリトン解集合と 2 ソリトン解集合の和集合になっていることを示している.

1.2 3 ソリトン解近傍での困難性について

今回の主定理では $\sigma_0\sigma_1 = -1$ が重要で, この関係式のときソリトン間の相互作用は反発するように働く. それゆえ時間が経つとソリトン間の相互作用は小さくなっていく. それゆえ 2 ソリトン解の近傍で解を考えるとき, 相互作用が常に小さくなっているのが活きている.
一方, 同様のことを 3 ソリトン解の近傍を考えると, 真ん中のソリトンのみ減衰するような状況になることがある. このとき, 先の主定理の状況で $\sigma_0\sigma_1 = 1$ の場合も考える必要がでてくる. この状況での解析は極めて困難である. なぜなら, この状況のときの 2 つのソリトン間の相互作用は引力となる. そのため, 時間が経つと 2 つのソリトンが融合するような状況が発生する. しかしながら, この融合の

状況には解析できる手段がほぼないので, この部分の解析ができないと 3 ソリトン周りでの初期値大域挙動の対応付けはできない.

1.3 証明の概略について

2 ソリトン周りの解析もソリトン間の相互作用が弱いときは 1 ソリトン周りの貼り合わせに帰着する. そのためには 1 ソリトン周りの解析が必要である. また,1 ソリトン解周りの解を考える以前に, 古くからエネルギーが $E(\vec{Q})$ より下の状態ではネハリ関数と呼ばれる関数の符号で解の大域挙動が決定できていた. そのため, ここでは基底状態より下での解析, 評価について述べた後,1 ソリトン周りの大域挙動の解析を行い, 最後に 2 ソリトン周りの大域挙動と初期値の対応付けを行う.

2 基底状態より下での基本的性質

ここでは (DNLKG) の解 $\vec{u}$ がソリトンのエネルギー $E(\vec{Q})$ より下の状態での解の大域挙動について考える.. 最初に, 基底状態に関してはネハリ関数 $K_0 : H^1(\mathbb{R}^N) \to \mathbb{R}$ を

$$K_0(\varphi) := \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla\varphi|^2 + |\varphi|^2 - |\varphi|^{p+1} \tag{9}$$

と定義すると,

$$E(\vec{Q}) = \inf\{E((\varphi, 0)|\varphi \in H^1(\mathbb{R}^N) \setminus \{0\},\ K_0(\varphi) = 0\} \tag{10}$$

となる. 特にこの性質から $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2) \in \mathcal{H}$ に対して $E(\varphi) < E(\vec{Q})$, $\varphi_1 \neq 0$ なら $K_0(\varphi_1) \neq 0$ がわかる. [4] ではこの状況での評価を一様に行っていて, 十分小さい $\delta > 0$ が存在して

$$E(\varphi) < E(\vec{Q}) - \delta \text{ ならば } K_0(\varphi_1) \gtrsim \min\{\delta, \|\varphi_1\|_{H^1}^2\} \text{ または } K_0(\varphi_1) \lesssim -\delta \tag{11}$$

が成立する. ただし, ここでいう $\gtrsim$,$\lesssim$ はある集合 A 上の実数値関数 ψ_1, ψ_2 に関して

$$\psi_1 \lesssim \psi_2 \Leftrightarrow \text{ ある } C > 0 \text{ が存在して任意の } x \in A \text{ で} \psi_1(x) \leq C\psi_2(x)$$
$$\psi_1 \gtrsim \psi_2 \Leftrightarrow \text{ ある } C > 0 \text{ が存在して任意の } x \in A \text{ で} \psi_1(x) \geq C\psi_2(x)$$

のことを指す. この一様な評価は極めて良い性質で, なぜなら (DNLKG) の解 $\vec{u}$ のエネルギーは (2) より時間が経つと減衰していく. この減衰の性質から $\vec{u}$ が基底状態よりエネルギーが低いとき,K_0 の一様な評価も合わせて用いることで $\vec{u}$ の解の大域挙動に関する一様な評価を得ることができる. まず, 減衰解に関しては以下のような結果がある.

補題 2.1. ある定数 $\delta > 0$ と (DNLKG) の解 $\vec{u}$ が

$$E(\vec{u}(0)) < E(\vec{Q}) - \delta\ ,\ K_0(u(0)) \geq 0$$

を満たすとする. このとき $\vec{u}$ は大域解となり, さらにある *(δ に依存しない)* 定数 $C, c > 0$ が存在して任意の $t \geqq 0$ で

$$\|\vec{u}(t)\|_{\mathcal{H}} \leq Ce^{-c\delta t} \tag{12}$$

が成立する.

次に, 爆発解に関する議論を行う. 爆発解に関しては以下の 2 つの評価を合わせることで判定が容易に行える.

補題 2.2. 関数 $P : \mathcal{H} \to \mathbb{R}$ を

$$P((\varphi_1, \varphi_2)) = \langle \varphi_1, \varphi_2 \rangle + \alpha \|\varphi_1\|_{L^2}^2 \tag{13}$$

と定義する. このとき (DNLKG) の解 $\vec{u}$ に対して, ある $t \geq 0$ で

$$P(\vec{u}(t)) > \frac{p+1}{p-1}(1+2\alpha)E(\vec{u}(t)) \tag{14}$$

を満たすなら $\vec{u}$ は爆発解となる. さらにこの不等式は一度成立すればそれ以降の解が存在する時間で常に成立する.

補題 2.3. ある正の定数 $\delta > 0, B > 0$ と (DNLKG) の解 $\vec{u}$ が

$$E(\vec{u}(0)) < E(\vec{Q}) - \delta \ , \ K_0(u(0)) < 0 \ , \ \|\vec{u}(0)\|_{\mathcal{H}} \leq B$$

を満たすとする. このときある *(*δ *に依存しない)* 定数 $C, c > 0$ が存在して任意の $t \geqq 0$ で

$$P(\vec{u}(t)) \geq e^{ct - \frac{CB^2}{\delta}} - 1 - B^2 \tag{15}$$

が成立する.

この 2 つを併用することで $K_0(u(0)) < 0$ なら爆発解になることは容易にわかる. これらの証明は [5] に記してある. これらより, 解のエネルギーが基底状態のエネルギーより低くなっているならば上の評価から一様に減衰, 爆発の評価が得られる.

3　1 ソリトン周りの大域挙動の分類

3.1　1 ソリトン解の存在

次に 1 ソリトン周りの解の挙動の分類を行う. 紙面の都合上粗く議論をすることがあるが,[5] に完全な証明が記載されている. まず $z \in \mathbb{R}^N$ に対して (セクション 3 においては z は $\mathbb{R}^N$ の要素とする),

$$\vec{Q}_z := (Q_z, 0) \ , \ Q_z(x) := Q(x-z) \ , \ Y_z^{\pm}(x) := Y^{\pm}(x-z) \tag{16}$$

とする. このとき z は後でうまく選ぶとして,$v(t)$ と $a(t)$ を

$$v(t) = \vec{u}(t) - \vec{Q}_z \ , \ a(t) = \langle v(t), Y_z^- \rangle$$

と定める. さらにこのとき $\gamma(t) := v(t) - a(t)Y^+(t)$ とすると

$$\langle Y^+(t), \gamma(t) \rangle = 0 \tag{17}$$

が成立する. よって上の分解で不安定成分とそれ以外を分けることができている. さらにこの $a(t)$ に関しては不安定方向の成分となっているため, 指数増大する項となる. これらをまとめると以下の主張が成立する.

補題 3.1. ある $\delta > 0$ と $z \in C^1(\mathbb{R};\mathbb{R}^N)$ 存在して, 以下を満たす.(DNLKG) の解 $\vec{u}$ がある $T > 0$ に対して

$$\sup_{t\in[0,T)} \|\vec{u}(t) - \vec{Q}_z\|_{\mathcal{H}} \leq \delta \ , \ \|\vec{u}(T) - \vec{Q}_z\|_{\mathcal{H}} = \delta \tag{18}$$

を満たすとする. このときある $\mu > 0$ が存在して,

$$\begin{aligned} |\frac{d}{dt}a - \nu_+ a| &\lesssim \|v\|_{\mathcal{H}}^2 \\ \|\gamma\|_{\mathcal{H}} &\lesssim e^{-\mu t}\|\gamma(0)\|_{\mathcal{H}} + \|v(t)\|_{\mathcal{H}}^2 \end{aligned} \tag{19}$$

が成立する.

この主張より,$\vec{u}(0)$ に対して

$$a(0) \gg \|\gamma(0)\|_{\mathcal{H}}\text{かつ}\ \|v(0)\|_{\mathcal{H}} \ll \delta \tag{20}$$

を満たすように初期値を取ると, この初期値の解 $\vec{u}$ は $t = T$ で $a(T) \sim \delta$ かつ $\|\gamma(T)\|_{\mathcal{H}} \ll \delta$ となる. ここで

$$K_0(Q+\varphi) = -(p-1)\langle Q^p, \varphi\rangle + O(\|\varphi\|_{H^1}^2) \tag{21}$$

が成立するので,$a(T) \sim \delta$ かつ $\|\gamma(T)\|_{\mathcal{H}} \ll \delta$ の状態なら $0 < t < T$ で

$$a(t) \gtrsim e^{\frac{\nu_+}{2}t}a(0)\ ,\ \|\gamma(t)\|_{\mathcal{H}} \ll a(t) \sim \|v(t)\|_{\mathcal{H}} \tag{22}$$

となっているので $t = T$ で

$$E(\vec{u}(T)) < E(\vec{Q})\ ,\ K_0(u(T)) \sim -a(T)$$

が成立. ただし「$A \sim B$」とは $A \lesssim B$ かつ $B \lesssim A$ のことを指す. これから (20) の初期値では解は爆発することがわかる. 同様の作業で $-a(0) \gg \|\gamma(0)\|_{\mathcal{H}}$ かつ $\|v(0)\|_{\mathcal{H}} \ll \delta$ のときは解が 0 に減衰することもわかる. さらに T' を

$$T' := \sup_{t\in[0,T)} \{t \mid 0 \leq s \leq t\ \text{で}\ |a(s)| \leq \delta'\} \tag{23}$$

とする. ただし $0 < \delta' \ll \delta$ なる定数とする. ここで $\|v(0)\|_{\mathcal{H}} \ll \delta'$ の範囲で $T' < \infty$ とおくと,$|a(T')| = \delta'$ となる. さらに解の連続依存性から写像 $a(0) \mapsto a(T')$ を考えると連続写像になり, それゆえこの写像の定義域 $[-\delta', \delta']$ での値域は連結になる. ところがこの値域は $\{-\delta', \delta'\}$ となるので矛盾. よって $T' = \infty$ となる $a(0)$ が存在し, これが 1 ソリトン解になる.

3.2 1 ソリトン解の解集合の形状

次に先に求めた 1 ソリトン解が余次元 1 の多様体をなすことを示す. 先の $z, \vec{u}$ に加えて,(DNLKG) の初期値

$$\vec{Q}_z + v_* = \vec{Q}_z + a_*(0)Y_z^+ + \gamma_*(0) \tag{24}$$

の解を $\vec{u}_*$ とする. さらに時間が経ったとき

$$\vec{u}_*(t) = \vec{Q}_z + a_*(t)Y_z^+ + \gamma_*(t) \tag{25}$$

とする. ただし分解方法は $\vec{u}$ と同様とする. このとき以下の評価が成立する.

補題 3.2. ある $\delta > 0$ と $z \in C^1(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$ 存在して, 以下を満たす.(DNLKG) の解 $\vec{u}, \vec{u}_*$ がある $T > 0$ に対して

$$\sup_{t\in[0,T]} \|\vec{u}(t) - \vec{Q}_z\|_{\mathcal{H}} \leq \delta$$
$$\sup_{t\in[0,T]} \|\vec{u}_*(t) - \vec{Q}_z\|_{\mathcal{H}} \leq \delta \ ,$$

を満たすとする. このとき

$$\vec{u}_\#(t) = \vec{u}(t) - \vec{u}_*(t) \ , v_\#(t) = v(t) - v_*(t) \ , \ a_\#(t) = a(t) - a_*(t) \ , \ \gamma_\#(t) = \gamma(t) - \gamma_*(t)$$

とするとある $\mu > 0$ が存在して,

$$|\frac{d}{dt}a_\# - \nu_+ a_\#| \lesssim (\|v\|_{\mathcal{H}} + \|v_*(t)\|_{\mathcal{H}})\|v_\#(t)\|_{\mathcal{H}} \tag{26}$$

が成立する.

この評価より,$|a_\#|$ は時間が経つと指数増大して, さらに $|a_\#| \gg \|\gamma_\#\|_{\mathcal{H}}$ となるので,$\vec{u}_*$ を 1 ソリトン解の初期値としたら $\vec{u}$ は補題 3.1 に帰着出来て解の分類ができる. また,$-\vec{Q}_z$ 周りでも同様の議論ができるのでまとめると以下が成立する.

補題 3.3. ある $\delta \in (0,1)$ が存在して以下が成立する.
$\sigma \in \{\pm 1\}$ と $z \in \mathbb{R}^N$ に対して

$$\mathcal{A}_z = \{\varphi \in \mathcal{H} \mid \langle \varphi, Y_z^- \rangle = 0 \ , \ \|\varphi\|_{\mathcal{H}} < \delta\} \tag{27}$$

とすると, あるリプシッツ連続な写像 $\mathcal{F} : \mathcal{A}_z \to [-\delta, \delta]$ が存在して (DNLKG) の初期値

$$\sigma(Q + aY^+)(x - z) + \varphi \ (a \in (-\delta, \delta), \varphi \in \mathcal{A}_z)$$

の解 $\vec{u}$ の挙動は以下のように分類される.

- $a < \mathcal{F}(\varphi)$ のとき $\vec{u}$ は減衰解になる.
- $a = \mathcal{F}(\varphi)$ のとき $\vec{u}$ は *1* ソリトン解となる.
- $a > \mathcal{F}(\varphi)$ のとき $\vec{u}$ は爆発解となる.

4 2 ソリトン周りの大域挙動の分類

次に 2 ソリトン周りで解を分解する. まず $\sigma_0, \sigma_1 \in \{\pm 1\}$,$z = (z_0, z_1) \in C^1(\mathbb{R}; \mathbb{R}^N)^2)$, $|z_0 - z_1| \gg 1$ とする. さらに $j = 0, 1$ に対して

$$Q_j(x) := \sigma_j Q(x - z_j) \ , \vec{Q}_j = (Q_j, 0) \ , \ Y_j^{\pm}(x) := Y^{\pm}(x - z_j) \tag{28}$$

とする. さらに (DNLKG) の解 $\vec{u}$ に対して

$$\begin{aligned} \vec{u} &= \sum_{j=0,1} \vec{Q}_j + v \\ v &= \sum_{j=0,1} a_j Y_j^+ + \gamma \ , \ a_j = \langle v, Y_j^- \rangle \end{aligned} \tag{29}$$

となるように v,γ,a_j を定義する. このとき 1 ソリトン周りの場合と異なり a_j にはソリトン間の相互作用も働くが, この場合も z をうまくとることで以下が成立する.

補題 4.1. ある $\delta>0$ と $z\in C^1(\mathbb{R};(\mathbb{R}^N)^2)$ 存在して, 以下を満たす.(DNLKG) の解 $\vec{u}$ がある $T>0$ に対して

$$\sup_{t\in[0,T]}\|\vec{u}(t)-\sum_{j=0,1}\vec{Q}_j\|_{\mathcal{H}}\le\delta\ ,\ \|\vec{u}(T)-\vec{Q}_z\|_{\mathcal{H}}=\delta \tag{30}$$

を満たすとする. このときある $\mu>0$ が存在して,

$$\begin{aligned}|\frac{d}{dt}a-\nu_+a|&\lesssim\|v\|_{\mathcal{H}}^2+Q(z_1-z_0)\\ \|\gamma\|_{\mathcal{H}}&\lesssim e^{-\mu t}\|\gamma(0)\|_{\mathcal{H}}+\|v(t)\|_{\mathcal{H}}^2+Q(z_1-z_0)\end{aligned} \tag{31}$$

が成立する.

ここでの $Q(z_1-z_0)$ は 2 つのソリトン間の相互作用の大きさである. 詳しくは [5] で計算している. ここで $\|v\|_{\mathcal{H}}^2\gg Q(z_1-z_0)$ のときは a_0,a_1 に対して 1 ソリトン周りと同様の考え方をできるが,$\|v\|_{\mathcal{H}}^2\lesssim Q(z_1-z_0)$ の場合は相互作用が支配的になる.

4.1 2 ソリトン解の差の評価

先の $\vec{u}$ に加えて (DNLKG) の初期値

$$\sum_{j=0,1}\vec{Q}_j+v_*=\sum_{j=0,1}\vec{Q}_j+a_{*,j}(0)Y_j^++\gamma_*(0) \tag{32}$$

の解を $\vec{u}_*$ とする. さらに時間が経ったとき

$$\vec{u}_*(t)=\sum_{j=0,1}\vec{Q}_j+a_{*,j}(t)Y_j^++\gamma_*(t) \tag{33}$$

とする. ただし分解方法は $\vec{u}$ と同様とする. さらに $\vec{u}$ と $\vec{u}_*$ の差として

$$\vec{u}_\#(t)=\vec{u}(t)-\vec{u}_*(t)\ ,v_\#(t)=v(t)-v_*(t)\ ,\ a_{\#,j}(t)=a_j(t)-a_{*,j}(t)\ ,\ \gamma_\#(t)=\gamma(t)-\gamma_*(t)$$

ただし $j=0,1$ とする. ここで $\vec{u}_*$ を $\vec{u}$ 周りの線形化作用素を考えることで表現すると,

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix}a_{\#,0}\\a_{\#,1}\end{pmatrix}=\nu_+\begin{pmatrix}a_{\#,0}\\a_{\#,1}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}M_{00}(t)&M_{01}(t)\\M_{10}(t)&M_{11}(t)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_{\#,0}\\a_{\#,1}\end{pmatrix}+N(t) \tag{34}$$

のように表せる. ただし N は可積分としてよい. このとき

$$M(t)=\begin{pmatrix}M_{00}(t)&M_{01}(t)\\M_{10}(t)&M_{11}(t)\end{pmatrix}$$

とすると, これは $\|v\|_{\mathcal{H}}^2\gg Q(z_1-z_0)$ のときは M も可積分となり,1 ソリトン周りと同様の挙動を表す. しかしながら $\|v\|_{\mathcal{H}}^2\lesssim Q(z_1-z_0)$ の場合は M が可積分かはわからないため,$(a_{\#,0},a_{\#,1})$ の初期値の方向と時間発展後の方向が同じ方向を向くかはわからない. なぜなら, 例えば

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix}a_{\#,0}\\a_{\#,1}\end{pmatrix}=\nu_+\begin{pmatrix}a_{\#,0}\\a_{\#,1}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&e^{-t}\\e^{-t}&\frac{1}{1+t}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_{\#,0}\\a_{\#,1}\end{pmatrix}$$

での $(a_{\#,0}(0), a_{\#,1}(0)) = (1,0)$ の解は $(a_{\#,0}(t), a_{\#,1}(t)) \sim te^{\nu_+ t}(0,1)$ になる $(t \to \infty)$.
この式からわかるように M に関する可積分性がわからないと初期値の方向が一定の方向を向いているとは限らないことがわかる.
この方向に関する主張がわかれば嬉しいが, 方向に関する主張として以下が成立する.

補題 4.2. ある $\delta > 0$ と $z \in C^1((\mathbb{R}^N)^2; \mathbb{R})$ 存在して, 以下を満たす.(DNLKG) の解 $\vec{u}, \vec{u}_*$ がある $T > 0$ に対して

$$\sup_{t \in [0,T)} \|\vec{u}(t) - \sum_{j=0,1} \vec{Q}_j\|_{\mathcal{H}} \leq \delta \ , \ \sup_{t \in [0,T)} \|\vec{u}_*(t) - \sum_{j=0,1} \vec{Q}_j\|_{\mathcal{H}} \leq \delta \tag{35}$$

を満たすとする. このとき先の $M(t)$ に関して,$M_{00} - M_{11}, M_{01}, M_{10} \in L^1([0,T))$ となる.

この主張より,

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} a_{\#,0} \\ a_{\#,1} \end{pmatrix} = (\nu_+ + M_{00})\begin{pmatrix} a_{\#,0} \\ a_{\#,1} \end{pmatrix} + N'$$

となり,N' が可積分となるので $(a_{\#,0}, a_{\#,1})$ の初期値の方向と時間が経った後の方向は保たれる.
以上をふまえて主定理の証明の概略を記す. [3] より,2 ソリトン解を満たす (a_0, a_1) の存在はわかっている. この初期値を $\vec{u}$ としたとき,$a_{*,0} < a_0$ なら $\vec{Q}_0$ 周りのソリトンは減衰する. それゆえ時間が経つと $\vec{Q}_0$ 周りは減衰解の挙動をする. よって,$a_{*,0} < a_0$ での $(a_{*,0}, a_{*,1})$ は,

- $a_{*,1} - a_1 \gtrsim a_0 - a_{*,0}$ のときは時間がたつと $\vec{Q}_1$ 周りで爆発するので元の解自体の $P(\vec{u})$ も大きくなり, 爆発解になる.
- $a_1 - a_{*,1} \gtrsim a_0 - a_{*,0}$ のときは $\vec{Q}_0$ 周りも $\vec{Q}_1$ 周りもどちらも減衰するので, 時間が経つと解 $\vec{u}$ は $E(\vec{u}) < E(\vec{Q}), K_0(u) \geq 0$ となり減衰する.

注意 4.3. これらの評価はセクション 2 で行った一様な評価のおかげで成立している. もしセクション 2 での評価がなければ,$\vec{Q}_0$ 周りでの減衰が遅すぎて $\vec{Q}_0$ 周りと $\vec{Q}_1$ 周りの相互作用の影響などから解の挙動の分類が困難になる恐れがある.

よって上の議論と爆発解集合と減衰解集合がどちらも開集合になっている (セクション 2 からわかる) 性質から位相的な議論である $a_{\star,1}$ が存在して $(a_{\#,0}, a_{\star,1})$ は 1 ソリトン解になる.
最後にこの 1 ソリトン解集合のリプシッツ連続性を考える. これは $\vec{u}$ が $\vec{Q}_0$ 周りが消える 1 ソリトン解になっているとしたら,

- $a_{*,1} > a_1$ のとき,
  $a_{*,1} - a_1 \gtrsim |a_{\#,0}| + \|\gamma_{\#}\|_{\mathcal{H}}$ なら時間が経った後は $\vec{Q}_1$ 周りで爆発するので元の解自体の $P(\vec{u})$ も大きくなり, 爆発解になる.
  $a_{*,1} - a_1 \ll |a_{\#,0}| + \|\gamma_{\#}\|_{\mathcal{H}}$ なら時間が経った後に $\vec{Q}_0$ 周りは減衰した後も $\vec{Q}_1$ 周りは $\vec{Q}_1$ の近傍にいる状態のままなので 1 ソリトン周りの議論に帰着できて爆発解がわかる.
- $a_{*,1} < a_1$ のときも今の議論と同様の作業で減衰解になることが示せる.

これより 2 ソリトン解になる (a_0, a_1) における $a_{*,0} < a_0$ での解の大域挙動の分類はできた.$a_{*,1} < a_1$ の場合も同様にでき, 今までの議論をまとめることで主定理が得られる.

参考文献

[1] S. -M. Chang, S. Gustafson, K. Nakanishi and T. -P. Tsai, *Spectra of linearized operators for NLS solitary waves.* SIAM J. Math. Anal. **39** (2007/08), no. 4, 1070–1111.

[2] R. Côte, Y. Martel, and X. Yuan, *Long-time asymptotics of the one-dimensional damped nonlinear Klein-Gordon equation.* Arch. Ration. Mech. Anal. **239** (2021), no. 3, 1837–1874.

[3] R. Côte, Y. Martel, X. Yuan, and L. Zhao, *Description and classification of 2-solitary waves for nonlinear damped Klein-Gordon equations.* preprint, arxiv:1908.09527.

[4] S. Ibrahim, N. Masmoudi, and K. Nakanishi, *Scattering threshold for the focusing nonlinear Klein-Gordon equation.* Anal. PDE, **4** (2011), no. 3, 405–460.

[5] K. Ishizuka, and K. Nakanishi, *Global dynamics around 2-solitons for the nonlinear damped Klein-Gordon equations.* preprint, arxiv:2109.03737.

[6] M. Kwong, *Uniqueness of positive solutions of* $\Delta u - u + u^p = 0$ *in* $\mathbb{R}^N$. Arch. Rational Mech. Anal. **105** (1989), no. 3, 243–266.