Surjectivity of some local cohomology maps and the second vanishing theorem

日本大学大学院総合基礎科学研究科地球情報数理科学専攻
伊城　慎之介 (Shinnosuke Ishiro)

概要

局所コホモロジーは可換環論の重要な研究対象の一つである．特に局所コホモロジーが消滅する条件を調べることは，局所コホモロジーが定義されて以来，研究され続けている．本稿では局所コホモロジーの消滅定理の一つである，第二消滅定理に関する M. Asgharzadeh 氏と下元数馬氏との共同研究について紹介する．

本稿は M. Asgharzadeh 氏と日本大学の下元数馬氏との共著論文 [1] に基づく．また R は可換ネーター環，I は R のイデアルとする．

[*1] R が有理数体 $\mathbb{Q}$ を含むとき R は**標数 0 の環**であるといい，R が有限体 $\mathbb{F}_p$ を含むとき R は**標数 $p > 0$ の環**という．特に標数 0 と標数 $p > 0$ の環をまとめて**等標数の環**という．また等標数でない環（体を含まない環）を**混標数の環**という．

例 0.1.
1. 有理数体 $\mathbb{Q}$ 上の多項式環やベキ級数環は，標数 0 の環である．
2. 有限体 $\mathbb{F}_p$ 上の多項式環やベキ級数環は標数 p の環である．
3. p 進整数環 $\mathbb{Z}_p$ 上の多項式環やベキ級数環は混標数の環である．

1　局所コホモロジー

まず局所コホモロジーを定義する．局所コホモロジーは 1961 年に A. Grothendieck によって Harvard 大学のセミナーにて定義された．

定義 1.1. R-加群 M に対して

$$\Gamma_I(M) := \{x \in M \mid I \text{ ある自然数 } n > 0 \text{ が存在して } I^n x = 0 \text{ が成り立つ.}\}$$

と定義する．このとき関手 $\Gamma_I(-)$ は共変な左完全関手であり，この i 次右導来関手を **i 次局所コホモロジー**と呼び，$H^i_I(-)$ を表す．

局所コホモロジーを定義する方法は他にも Cech 複体を用いた定義があるが，詳細は [2] や [7] を参照のこと．ホモロジー代数の一般論から次の長完全列が得られる．

[*1] 標数はネーター性は必要ない．

命題 1.2. R 加群の短完全列

$$0 \to L \to M \to N \to 0$$

に対して次の長完全列が得られる；

$$\cdots \to H_I^{i-1}(N) \to H_I^i(L) \to H_I^i(M) \to H_I^i(N) \to H_I^{i+1}(L) \to \cdots.$$

また定義より以下が成り立つ．

命題 1.3. M を R 加群とする．任意の $i > 0$，任意の $x \in H_I^i(M)$ に対してある $n \geq 0$ が存在して $I^n x = 0$ である．

1.1 局所コホモロジーの消滅問題

次の問題は局所コホモロジーが定義されてから研究され続けている．

問題 1 (局所コホモロジーの消滅問題 (Grothendieck'61))**.** $(R, \mathfrak{m})$ を局所環，n を整数とする．このとき任意の $i > n$ に対して $H_I^i(M) = 0$ となる条件を与えよ．

$n = \dim R$ の時は 1961 年に Grothendieck 自身によって与えられ（**Grothendieck の消滅定理**），$n = \dim R - 1$ の時は 1968 年に Hartshorne によって与えられた (**Hartshorne-Lichtenbaum の消滅定理**)．$n = \dim R - 2$ の時は**第二消滅定理**と呼ばれている．

定義 1.4. ([cf. [10, Definition 1.2]) $(R, \mathfrak{m})$ を d 次元局所環，$\widetilde{R}$ を R の完備化の強ヘンゼル化の完備化，$\widetilde{\mathfrak{m}}$ は $\widetilde{R}$ の極大イデアルとする．このとき R に対して**第二消滅定理が成り立つ**とは以下が同値であることをいう；

1. 全ての $i > d - 2$ と R-加群 M に対して $H_I^i(M) = 0$ が成り立つ，
2. $\dim(R/I) \geq 2$ かつ $\widetilde{R}/I\widetilde{R}$ の punctured spectrum $\operatorname{Spec}^\circ(\widetilde{R}/I\widetilde{R}) := \operatorname{Spec}(\widetilde{R}/I\widetilde{R}) \backslash \{\widetilde{\mathfrak{m}}\}$ が連結である．

第二消滅定理には長い歴史がある．この定理は，1968 年に Hartshorne[3] によって射影多様体に対して証明され，任意の正則局所環に対して成り立つことが予想された．1993 年に標数 p の場合を Peskin-Szpiro[9] が証明し，同年に標数 0 の場合を Ogus[8] が証明した．1977 年には Hartshorne-Speiser[5] によって，Frobenius 作用を用いた，標数 p の場合の別証明が与えられた．その後 1990 年に Huneke-Lyubeznik[4] によって，標数 0 と標数 p を区別しない証明が与えられた．

混標数の場合は長年進展はなかったが，2018 年に Hernández-Betancourt-Perez-Witt[6] によって不分岐な正則局所環 ($p \in \mathfrak{m} \backslash \mathfrak{m}^2$ を満たす) の特別な場合に証明を与えた（彼らはこの定理を**新第二消滅定理**と呼んでいる）．さらに 2021 年に arXiv にあげられた Zhang のプレプリント [10] では不分岐な場合に第二消滅定理が成り立つことを証明した．現在では分岐している正則局所環（$p \in \mathfrak{m}^2$ を満たす）の場合のみ未解決問題である．

講演者らは分岐している正則局所環の新第二消滅定理に関する研究を行なった．主結果を述べる前に [6] の新第二消滅定理について説明する．

定理 1.5. ([6, Theorem 3.8]) $(R,\mathfrak{m})$ を剰余体が分離閉体である d 次元不分岐な混標数の完備正則局所環，I を R のイデアルとする．I の任意の極小素イデアル $\mathfrak{q}$ に対して $\dim(R/\mathfrak{q}) \geq 3$ が成り立つと仮定する．このとき以下は同値である．

1. $H_I^{d-1}(R) = 0$.
2. $\mathrm{Spec}^\circ(R/I)$ が連結である．

定理 1.5 の証明では，次の補題（定理 1.5 の I が素イデアルの場合）が特に重要である[*2]．

補題 1.6. ([6, Lemma 3.7]) $(R,\mathfrak{m})$ を剰余体が分離閉体である d 次元不分岐な混標数の完備正則局所環，$\mathfrak{p}$ を R の素イデアルとする．このとき $\dim(R/\mathfrak{p}) \geq 3$ と仮定すると，$H_{\mathfrak{p}}^{d-1}(R) = 0$ が成り立つ．

注意 1.7.

1. Cohen の構造定理より以下が従う．
   (a) d 次元不分岐完備正則局所環 $(R,\mathfrak{m})$ は $C(k)[[x_2,\ldots,x_d]]$ と同型である．ただし $C(k)$ は剰余体 k が $R/\mathfrak{m}$ と同型であるような完備離散付値環である．
   (b) 分岐している d 次元正則局所環 $(R,\mathfrak{m})$ は $C(k)[[x_1,\ldots,x_d]]/(p-f)$ $(f \in \mathfrak{m}^2)$ と同型である．例えば $\mathbb{Z}_p[[x,y]]/(p-xy)$ は分岐している 2 次元正則局所環である．
2. 局所整域の punctured spectrum は連結である (cf. [7, Exercise 15.6])．したがって補題 1.6 において $\mathrm{Spec}^\circ(R/\mathfrak{p})$ は連結である．

簡単に補題 1.6 の証明の概略を述べる．

補題 *1.6* の証明. $p \in \mathfrak{p}$ の場合のみ証明する．命題 1.2 より，短完全列

$$0 \to R \xrightarrow{\times p} R \to R/pR \to 0$$

に対して長完全列

$$\cdots \to H_{\mathfrak{p}}^{d-2}(R/pR) \to H_{\mathfrak{p}}^{d-1}(R) \xrightarrow{\times p} H_{\mathfrak{p}}^{d-1}(R) \to H_{\mathfrak{p}}^{d-1}(R/pR) \to \cdots \tag{1}$$

が得られる．注意 1.7 より R は $C(k)[[x_2,\ldots,x_d]]$ と同型なので R/pR は $d-1$ 次元正則局所環である．また $\mathfrak{p}(R/pR) \subseteq R/pR$ は素イデアルなので注意 1.7.2 より $(R/pR)/\mathfrak{p}(R/pR)$ の punctured spectrum は連結である．したがって等標数の第二消滅定理から $H_{\mathfrak{p}}^{d-2}(R/pR) = 0$ が得られる．よって長完全列 (1) より $H_{\mathfrak{p}}^{d-1}(R) \xrightarrow{\times p} H_{\mathfrak{p}}^{d-1}(R)$ が単射である．ここで $H_{\mathfrak{p}}^{d-1}(R) \neq 0$ と仮定すると，命題 1.3 より，ある 0 でない元 $x \in H_{\mathfrak{p}}^{d-1}(R)$ と自然数 $n > 0$ が存在して $\mathfrak{p}^n x = 0$ が成り立つ．特に $p \in \mathfrak{p}$ より $p^n x = 0$ が成り立つ．このとき n は $p^{n-1}x \neq 0$ となるようにとれるが，これは $H_{\mathfrak{p}}^{d-1}(R) \xrightarrow{\times p} H_{\mathfrak{p}}^{d-1}(R)$ が単射であることに矛盾する．したがって $H_{\mathfrak{p}}^{d-1}(R) = 0$ である． □

我々は定理 1.5 を元にして，分岐している場合も扱えるように改良することを目標にした．問題は，分岐している場合は R/pR が正則局所環にならないことである．この問題を解消するために我々は次の定理を証明した．

[*2] 定理 1.5 の主張 $1 \Rightarrow 2$ の証明は Huneke-Lyubeznik[4] の証明をそのまま適用することができる．主張 $2 \Rightarrow 1$ では I が素イデアルの場合がが証明できれば，後は Huneke-Lyubeznik[4] の証明が適用できる．

主定理 1. ([1, Theorem 3.4]) $(R, \mathfrak{m})$ を標数 $p > 0$ の d 次元正則局所環，$I \subseteq R$ をイデアルとする．非負整数 $i \geq 0$ に対して $l_R(H_I^{d-i}(R)) < +\infty$ と仮定する．このとき $H_I^i(R)$ は可除加群である．すなわち任意の非零因子 $x \in R$ に対して $H_I^i(R) \xrightarrow{\times x} H_I^i(R)$ は全射である．

我々はこの定理を応用して，定理 1.5 をある仮定の元で分岐・不分岐を区別しない証明を与えた．

主定理 2. ([1, Theorem 1.1]) $(R, \mathfrak{m})$ を剰余体が分離閉体である混標数の d 次元完備正則局所環，$I \subseteq R$ をイデアルとする．I の任意の極小素イデアル $\mathfrak{q}$ に対して $\dim(R/\mathfrak{q}) \geq 3$ かつ $l_R(H_{\mathfrak{m}}^2(R/pR + \mathfrak{q})) < +\infty$ が成り立つと仮定する．このとき以下は同値である．

1. $H_I^{d-1}(R) = 0$.
2. $\mathrm{Spec}^{\circ}(R/I)$ は連結である．

主定理 2 でも I が素イデアルの場合，つまり次の補題が重要である．

補題 1.8. ([1, Lemma 4.4]) $(R, \mathfrak{m})$ を剰余体が分離閉体である混標数の d 次元完備正則局所環，$\mathfrak{q}$ を $\dim(R/\mathfrak{q}) \geq 3$ である R の素イデアルとする．$J := pR + \mathfrak{q}$ とおく．このとき $l_R(H_{\mathfrak{m}}^2(R/J)) < +\infty$ と仮定すると $H_{\mathfrak{q}}^{d-1}(R) = 0$ が成り立つ．

最後に具体例を述べる．次は分岐している正則局所環の局所コホモロジーの非消滅の例である．

例 1.9. ([1, Example 4.5]) k を標数 $p > 0$ の代数閉体，$C(k)$ を剰余体が k の完備離散付値環とする．$R := C(k)[[X_1, X_2, X_3, X_4, Y_1, Y_2, Y_3, Y_4]]/(p - X_i Y_j)$，$I = (X_1, X_2, X_3, X_4) \cap (Y_1, Y_2, Y_3, Y_4)$ とおく．このとき $H_I^7(R) \neq 0$ が成り立つ．

講演では主定理 1 を用いた補題 1.8 の証明の概略や例の計算方法を紹介する．

参考文献

[1] M. Asgharzadeh, S. Ishiro, and K. Shimomoto. *Surjectivity of some local cohomology map and the second vanishing theorem*, arXiv:2107.09041 (2021).

[2] M. P. Brodmann and R. Y. Sharp, *Local cohomology: an algebraic introduction with geometric applications*, Cambridge university press (2012).

[3] R. Hartshorne, *Cohomological dimension of algebraic varieties*, Annals of Mathematics (1968) 403-450.

[4] C. Huneke and G. Lyubeznik, *On the vanishing of local cohomology modules*, Invent Math (1990) 73-93

[5] R. Hartshorne and R. Speiser, *Local cohomological dimension in characteristic p*, Annals of Mathematics (1977) 45-79.

[6] D. Hernández, L. Núñez-Betancourt, F. Perez and E. Witt, *Cohomological dimension, Lyubeznik numbers, and connectedness in mixed characteristic*, Journal of Algebra (2018).

[7] S. B. Iyengar, S. Iyengar, G. J. Leuschke, A. Leykin, E. Miller, and C. Miller, *Twenty-four*

hours of local cohomology, American Mathematical Soc (2007).

[8] A. Ogus, *Local cohomological dimension of algebraic varieties*, Annals of Mathematics (1973) 327-365.

[9] C. Peskine and L. Szpiro, *Dimension projective finie et cohomologie locale*, Publications Mathématiques de l'IHÉS (1973) 47-119.

[10] W. Zhang, *The second vanishing theorem for local cohomology modules*, arXiv : 2102.12545v2 (2021).