Laplace 方程式の Cauchy 問題に対する 反復法の安定性評価に関する深さ依存性

大阪大学大学院 情報科学研究科 情報基礎数学専攻
石田あかり (Akari ISHIDA)

概要

Laplace 方程式に対する Cauchy 問題を考える．この近似解を Bastay-Kozlov-Turesson により提案された, 対応する境界値問題を繰り返し解く, 反復法と呼ばれる方法で構成する．このとき, 境界値問題を考える領域として, より小さな領域を選んだ方が, より安定的に解を構成できることを示す．更に, この反復法は Cauchy データに誤差を含む場合にも適用できるので, この場合に対しても同様の評価を示す.

1　序

Ω_* を $\mathbb{R}^2$ の有界領域とし, その境界 $\partial\Omega_*$ は $\Gamma_0 \cup \Gamma_*$ と表せるとする (図 1)．Γ_0, Γ_* は閉で非交和とする．次の Laplace 方程式に対する Cauchy 問題を考える：

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{in } \Omega_*, \\ u = \varphi & \text{on } \Gamma_0, \\ \dfrac{\partial u}{\partial \nu} = \psi & \text{on } \Gamma_0. \end{cases} \tag{1.1}$$

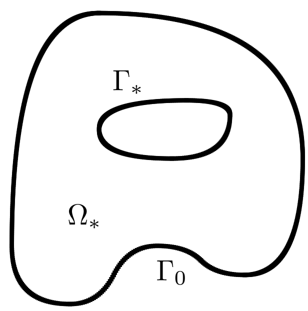

図 1　領域 Ω_*.

但し, ν は Γ_0 の外向き単位法線ベクトル．一般に, 任意に Cauchy データ φ と ψ が与えられたときに, (1.1) の解 u が Ω_* 全体で存在するとは限らない．ここで考えたい問題は, Ω_* で $\Delta u = 0$ を満たす u が存在するときに, Γ_0 上で観測したデータ φ と ψ から解 u を構成する問題である．尚, これは, 例えば, 領域の境界で電位と電流を観測して, 領域内部の電位を推定する問題に相当する.

又, (1.1) が不安定な問題, 即ち, 観測データ φ, ψ の誤差が小さくても, 対応する未知のデータ u の誤差が大きくなる問題であることはよく知られている．ところが, [1] での Bastay-Kozlov-Turesson の反復法 ([1] で 2 つの反復法が提案されているが, 以下では, 簡単のために, その 1 つの one-step stationary iterative method をこのように呼ぶことにする) を用いると, 安定的に近似解を構成できる．この反復法では, 対応する境界値問題を繰り返し解いて, 近似解を構成する．(1.1) の近似解を Ω_* 全体で構成するなら, 反復法で解く境界値問題も Ω_* 全体で考える必要がある．ところが, 観測する境界 Γ_0 に近い領域 Ω^* での情報だけが欲しいなら, 境界値問題は Ω^* を含むような領域 Ω 上でのみ考えれば十分である (図 2)．このとき, Ω としてより小さな領域を選んだ方が, より安定的に解が構成できることを示す.

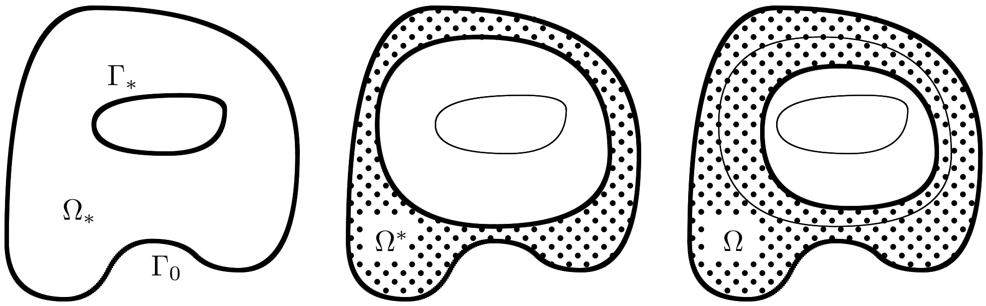

図 2　領域 Ω_*, Ω^*, Ω の関係.

Bastay-Kozlov-Turesson の反復法は, [1] で, 一般の放物型偏微分方程式に対する Cauchy 問題の近似解を構成するための反復法として提案された. 又, これは楕円型の場合にも適用できると述べられている. 他にも, Cauchy 問題を解くための反復法は幾つもある. 例えば, 楕円型に対する反復法 [5], [6] や放物型に対する反復法 [2], [7] 等がある.

後述の通り, Bastay-Kozlov-Turesson の反復法は Landweber の反復法に帰着される. このため, 2 章では, Landweber の反復法について説明する. そして, 3 章で Bastay-Kozlov-Turesson の反復法の反復法を紹介する. 最後に, 4 章で主結果を述べる.

2　Landweber の反復法

Landweber の反復法 [3, Ch. 6, Sec. 1] を紹介する.

X, Y を Hilbert 空間とし, 線型コンパクト作用素 $K : X \to Y$ を単射とする. 方程式 $Kx = y$ の逆問題, 即ち, 与えられた $y \in Y$ に対して $x = K^{-1}y$ を求める問題を考える.

今, $a > 0$, $Kx = y$ とすると, $aK^*Kx = aK^*y$ なので, $x = (I - aK^*K)x + aK^*y$ が成り立つ. 但し, I は恒等作用素. そこで, 解を求めるために, 次のようにして近似列 $\{x^{(m)}\}_{m=0}^{\infty}$ を構成する :

$$x^{(0)} = z, \quad x^{(m)} = (I - aK^*K)x^{(m-1)} + aK^*y \quad (m \in \mathbb{N}). \tag{2.1}$$

このように近似列 $\{x^{(m)}\}_{m=0}^{\infty}$ を構成する方法を Landweber の反復法という. 又, (2.1) から,

$$x^{(m)} = \widetilde{R}_m y, \quad \text{但し } \widetilde{R}_m y = (I - aK^*K)^m z + a \sum_{k=0}^{m-1} (I - aK^*K)^k K^* y. \tag{2.2}$$

(2.1) で構成した $x^{(m)}$ は m を大きくすると, 真の解に近づく. 即ち, 次の定理 1 が成り立つ.
以下 $\|K\|_{\mathcal{L}}$ により K の作用素ノルムを表す.

定理 1. $0 < a < \frac{2}{\|K\|_{\mathcal{L}}^2}$ とし, $z \in X$ とする. このとき, $Kx^0 = y^0$ ならば,

$$\|\widetilde{R}_m y^0 - x^0\|_X \to 0 \quad \text{as } m \to \infty.$$

ところで, Landweber 反復法は, 誤差が入っていても適用できる. つまり, 方程式 $Kx^0 = y^0$ の右辺 y^0 そのものではなく, 誤差を含んだ y^δ が与えられた場合でも, 解 x^0 の近似解を得ることができる. 即ち, 定理 2 が成り立つ.

定理 2. $0 < a < \frac{2}{\|K\|_{\mathcal{L}}^2}$, $\delta > 0$ とし, $z \in X$ とする.

$$\lim_{\delta\to+0} \delta^2 m(\delta) = 0, \ \lim_{\delta\to+0} m(\delta) = \infty$$

となるように $m(\delta) > 0$ を選ぶ．このとき, $\|y^\delta - y^0\|_Y \le \delta$ なる y^δ に対して, $Kx^0 = y^0$ ならば,

$$\lim_{\delta\to+0} \|\widetilde{R}_{m(\delta)} y^\delta - x^0\|_X = 0.$$

この定理は

$$\|\widetilde{R}_m y^\delta - x^0\|_X \le \|\widetilde{R}_m y^\delta - \widetilde{R}_m y^0\|_X + \|\widetilde{R}_m y^0 - x^0\|_X$$

のように "観測誤差 $y^\delta - y^0$ による差" と "反復法による差" の 2 項に分けて考える．定理 1 で見たように, m を大きくすると, 反復法による差は 0 に近づく．しかし, 観測誤差による差は $m \to \infty$ とすると, 発散してしまう．そこで, m は δ に応じて上手く選ばないといけない．そのための条件が定理 2 の $m(\delta)$ に対する仮定である.

3 Bastay-Kozlov-Turesson の反復法

1 章で述べたように, [1] は, 放物型偏微分方程式の Cauchy 問題に対して, 近似解を構成するための反復法を提案し, その近似解が真の解に収束することを示した．又, この反復法は楕円型の場合にも適用できるとも述べられている．ここでは, Bastay-Kozlov-Turesson の反復法を今考えている (1.1) に対応する形で紹介する.

3.1 反復法の手順

Ω を $\mathbb{R}^2$ の有界領域とし, その境界 $\partial\Omega$ は $\Gamma_0 \cup \Gamma_1$ と表せるとする (図 3)．Γ_0, Γ_1 は閉で非交和とする．反復法では, 次の境界値問題

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{in } \Omega, \\ u = \eta & \text{on } \Gamma_1, \\ \dfrac{\partial u}{\partial \nu} = \psi & \text{on } \Gamma_0, \end{cases} \tag{3.1}$$

及び, 随伴問題

$$\begin{cases} \Delta v = 0 & \text{in } \Omega, \\ v = 0 & \text{on } \Gamma_1, \\ \dfrac{\partial v}{\partial \nu} = \zeta & \text{on } \Gamma_0 \end{cases} \tag{3.2}$$

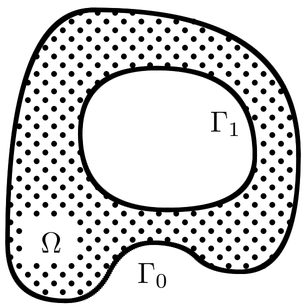

図 3 領域 Ω.

を解く．近似解を以下のように構成する ([1, Sec. 3.1.1] 参照).

- 任意の関数 $\eta^{(0)} \in L^2(\Gamma_1)$ を選ぶ.
- 解 u の第 0 近似 $u^{(0)}$ は, $\eta = \eta^{(0)}$ on Γ_1 とした問題 (3.1) を解くことで得られる.
- 随伴問題 (3.2) で $\zeta = u^{(0)} - \varphi = \zeta^{(0)}$ on Γ_0 とした解 $v^{(0)}$ が得られる.
- 解 $u^{(\ell-1)}$ と $v^{(\ell-1)}$ が構成されたとき, 第 ℓ 近似 $u^{(\ell)}$ は $\eta = \eta^{(\ell)}$ on Γ_1 とした問題 (3.1) の解.
  但し, $\eta^{(\ell)} = u^{(\ell-1)} + \gamma \frac{\partial v^{(\ell-1)}}{\partial \nu}$, γ は固定された正の定数.
- $v^{(\ell)}$ は, $\zeta = u^{(\ell)} - \varphi = \zeta^{(\ell)}$ on Γ_0 とした随伴問題 (3.2) の解.

3.2　反復法の収束性

上で構成した第 ℓ 近似 $u^{(\ell)}$ が (1.1) の解 u に収束することについて説明する ([1, Sec. 3.1.2] 参照).

作用素 $K : L^2(\Gamma_1) \to L^2(\Gamma_0)$ を, z_1 を (3.1) で $\psi = 0$ に変えた解として

$$K\eta = z_1|_{\Gamma_0} \quad \text{for } \eta \in L^2(\Gamma_1),$$

作用素 $K_1 : L^2(\Gamma_0) \to L^2(\Gamma_0)$ を, z_2 を (3.1) で $\eta = 0$ に変えた解として

$$K_1\psi = z_2|_{\Gamma_0} \quad \text{for } \psi \in L^2(\Gamma_0)$$

で定義する. このとき, 以下の 3 つが分かる.

- K と K_1 はコンパクト作用素. 更に, K は単射.
- (1.1) を解くことと次を解くことは同値:

$$K\eta = \varphi - K_1\psi. \tag{3.3}$$

$$\left(\begin{array}{l} \text{もし, } \eta \text{ が (3.3) の解なら, (3.1) の解は } u = \varphi \text{ on } \Gamma_0 \text{ を満たすので (1.1) を解く.} \\ \text{逆に, もし } u \text{ が (1.1) の解なら, } \eta = u|_{\Gamma_1} \text{ は (3.3) の解.} \end{array} \right)$$

- K の随伴作用素 $K^* : L^2(\Gamma_0) \to L^2(\Gamma_1)$ は, v を (3.2) の解として次で与えられる:

$$K^*\zeta = -\left(\frac{\partial v}{\partial \nu}\right)\bigg|_{\Gamma_1} \quad \text{for } \zeta \in L^2(\Gamma_0).$$

更に, 反復法のアルゴリズムから,

$$\begin{aligned} \eta^{(\ell)} &= u^{(\ell-1)}\Big|_{\Gamma_1} + \gamma \left(\frac{\partial v^{(\ell-1)}}{\partial \nu}\right)\bigg|_{\Gamma_1} = \eta^{(\ell-1)} + \gamma(-K^*\zeta^{(\ell-1)}) \\ &= \eta^{(\ell-1)} + \gamma\left(-K^* \left(u^{(\ell-1)} - \varphi\right)\Big|_{\Gamma_0}\right) = \eta^{(\ell-1)} - \gamma K^*(K\eta^{(\ell-1)} + K_1\psi - \varphi) \\ &= (I - \gamma K^*K)\eta^{(\ell-1)} + \gamma K^*(\varphi - K_1\psi). \end{aligned} \tag{3.4}$$

よって, (3.4) は, (3.3) に対する Landweber の反復法になっていることが分かるので, 定理 1 より,

$$\|\eta^{(\ell)} - \eta\|_{L^2(\Gamma_1)} \to 0 \quad \text{as } \ell \to \infty.$$

更に, (3.1) の適切性に注意すると

$$\|u^{(\ell)} - u\|_{L^2(\Omega)} \le C'\|\eta^{(\ell)} - \eta\|_{L^2(\Gamma_1)} \to 0 \quad \text{as } \ell \to \infty$$

となり, 次の定理が成り立つ.

定理 3 ([1, Theorem 3.1])**.** $u \in L^2(\Omega)$ を (1.1) の解とし,

$$0 < \gamma < \frac{2}{\|K\|^2_{L^2(\Gamma_1)\to L^2(\Gamma_0)}}$$

と仮定する. $u^{(\ell)}$ を反復法の第 ℓ 近似とする. このとき, 任意の関数 $\eta^{(0)} \in L^2(\Gamma_1)$ に対して,

$$\|u^{(\ell)} - u\|_{L^2(\Omega)} \to 0 \quad \text{as } \ell \to \infty.$$

誤差を含むデータに対しても, Landweber の反復法は適用できたので, Bastay-Kozlov-Turesson の反復法も同様に適用できることに注意する.

4　主結果

境界値問題を考える領域として, より小さな領域を選んだ方が, より安定的に解を構成できることを示す. そこで, $0 < \rho_* \le \rho \le \rho^* < 1$ とし,

$$\Omega^* = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \rho^* < |x| < 1\},\ \Omega = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \rho < |x| < 1\},\ \Omega_* = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \rho_* < |x| < 1\},$$
$$\Gamma_0 = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid |x| = 1\},\ \Gamma_1 = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid |x| = \rho\},\ \Gamma_* = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid |x| = \rho_*\}$$

と置く (図 4).

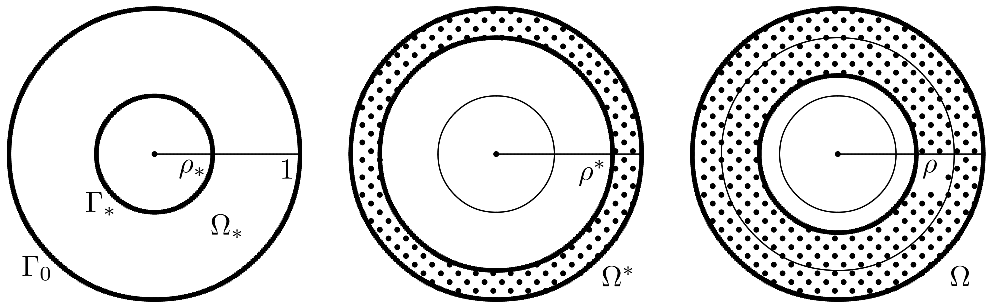

図 4　円環領域 Ω_*, Ω^*, Ω の関係.

この状況で次の定理 4 を得た.

定理 4 ([4])**.** φ, ψ を実数値関数とし, $\|\varphi\|^2_{L^2(\Gamma_0)} + \|\psi\|^2_{L^2(\Gamma_0)} \le M_0^2$ とする. (1.1) の解 u は Ω_* で存在し, $\|u\|_{L^2(\Gamma_*)} \le M$ を満たすとする. $\eta^{(0)} = 0$, $\gamma = \rho$ として, Ω に於いて反復法を用いて得られる第 ℓ 近似を $u^{(\ell)}$ とすると, $\ell \ge 2$ に対して, 次が成り立つ:

$$\|u^{(\ell)} - u\|^2_{L^2(\Omega^*)} \le C \left(\frac{\log \ell}{\ell}\right)^{\frac{\log(\rho^*/\rho_*)}{\log(1/\rho)}}. \tag{4.1}$$

但し, C は M_0, M, ρ^*, ρ_* のみに依る正の定数であり, この評価は, optimal.

ρ $(\le \rho^* < 1)$ を大きく取ると, (4.1) の右辺の冪は大きくなることに注意する. このことから, 境界値問題を解く領域 Ω として, より小さな領域を選ぶと, より安定的に解を構成できることが分かる.

Bastay-Kozlov-Turesson の反復法は, 誤差を含むデータに対しても適用できたので, 次のような誤差を含むデータ φ^δ, ψ^δ しか知ることができない場合を考える:

$$\|\varphi^\delta - \varphi\|_{L^2(\Gamma_0)} \le \delta, \quad \|\psi^\delta - \psi\|_{L^2(\Gamma_0)} \le \delta. \tag{4.2}$$

定理 2 の直後で述べたように, 誤差を含む場合の第 ℓ 近似を $u^{(\ell),\delta}$ とすると,

$$\begin{aligned}\|u^{(\ell),\delta} - u\|_{L^2(\Omega^*)} &\le \|u^{(\ell),\delta} - u^{(\ell)}\|_{L^2(\Omega^*)} + \|u^{(\ell)} - u\|_{L^2(\Omega^*)} \\ &\le \widetilde{C}\sqrt{\ell}\,\delta + \|u^{(\ell)} - u\|_{L^2(\Omega^*)}.\end{aligned}$$

尚, $\widetilde{C}\sqrt{\ell}\,\delta$ は, 観測誤差による差 $\|u^{(\ell),\delta} - u^{(\ell)}\|_{L^2(\Omega^*)}$ を評価することで現れる. 又, 反復法による差 $\|u^{(\ell)} - u\|_{L^2(\Omega^*)}$ は定理 4 で既に評価している. ℓ を大きくすると, 反復法による差は 0 に近づくが, $\sqrt{\ell}$ は大きくなるため, 上手く ℓ を選ぶ必要がある.

定理 5. φ, ψ を実数値関数とし, $\|\varphi\|^2_{L^2(\Gamma_0)} + \|\psi\|^2_{L^2(\Gamma_0)} \leq M_0^2$ とする. φ^δ, ψ^δ を (4.2) を満たす実数値関数とする. (1.1) の解 u は Ω_* で存在し, $\|u\|_{L^2(\Gamma_*)} \leq M$ を満たすとする. $\eta^{(0)} = 0$, $\gamma = \rho$ として, Ω に於いて反復法から得られる第 ℓ 近似を $u^{(\ell),\delta}$ とする. このとき, $0 < \delta \leq 1/e^3$ に対して, 次が成り立つ:

$$\|u^{(\ell(\delta,\rho)),\delta} - u\|^2_{L^2(\Omega^*)} \leq \widehat{C} \left(\delta^2 \log \frac{1}{\delta}\right)^{\frac{\log(\rho^*/\rho_*)}{\log(1/\rho)+\log(\rho^*/\rho_*)}}. \tag{4.3}$$

ここで, $\ell(\delta, \rho)$ は $\ell(\delta, \rho) \geq \ell_0(\delta, \rho)$ を満たす最小の整数. 但し,

$$\ell_0(\delta, \rho) = \delta^{-\frac{2\log(1/\rho)}{\log(1/\rho)+\log(\rho^*/\rho_*)}} \left(\log \frac{1}{\delta}\right)^{\frac{\log(\rho^*/\rho_*)}{\log(1/\rho)+\log(\rho^*/\rho_*)}}.$$

又, $\widehat{C}$ は M_0, M, ρ^*, ρ_* のみに依る正の定数.

参考文献

[1] G. Bastay, V. A. Kozlov, and B. O. Turesson, Iterative methods for an inverse heat conduction problem, J. Inv. Ill-Posed Problems **9**, 375-388 (2001).

[2] R. Chapko, T. Johansson and V. Vavrychuk, A projected iterative method based on integral equations for inverse heat conduction in domains with a cut, Inverse Problems **29** (2013), no.6, Article ID 065003.

[3] H. W. Engl, M. Hanke and A. Neubauer, Regularization of inverse problems (Kluwer Academic Publishers Group, 1996).

[4] A. Ishida, A depth-dependent stability estimate in an iterative method for solving a Cauchy problem for the Laplace equation, preprint.

[5] T. Johansson, An iterative procedure for solving a Cauchy problem for second order elliptic equations, Math. Nachr. **272** (2004), 46-54.

[6] T. Johansson, An iterative method for reconstruction of temperature, J. Inverse Ill-Posed Probl. **14** (2006), 267-278.

[7] T. Johansson, An iterative method for a Cauchy problem for the heat equation, IMA J. Appl. Math. **71** (2006), 262-286.