# Non-oscillation criteria for damped half-linear dynamic equations with mixed derivatives on a time scale

広島商船高等専門学校 電子制御工学科
石橋和葵 (Kazuki ISHIBASHI)

**概要**

Hilger (1988) によって導入されたタイムスケールの概念から，近年，常微分方程式と差分方程式の統一理論に関する研究が注目を集めている．本稿では，タイムスケールを活用して，常微分方程式と差分方程式のどちらの解も終局的に正（または負）を保証する十分条件（非振動条件）を得たので報告する．その非振動条件の特徴として，常微分方程式と差分方程式が共に線形方程式ならば，類似条件となる．しかし，両者が 1 次元 $p$ ラプラス作用素を有する非線形方程式ならば，その条件には相違性が存在する．

## 1　導入

近年，常微分方程式と差分方程式を統一したダイナミック方程式（dynamic equation）の定性的理論が活発的に研究されている．この研究の土台は，Hilger [6] によって導入されたタイムスケール（time scale）$\mathbb{T}$ の定義に基づく．タイムスケール $\mathbb{T}$ とは，任意の実数直線上の閉部分集合で定義される．既に，タイムスケール上のダイナミック方程式に関する基礎理論は整備されている（[1, 2, 3, 4] を参照せよ）．タイムスケール上で扱う導関数は，通常の微分の概念を一般化し，次の 2 種類のデルタ微分とナブラ微分と呼ばれる導関数によって定義される．

$$x^{\Delta}(t) := \begin{cases} \lim_{s\to t} \dfrac{x(t)-x(s)}{t-s} & (t=\sigma(t)) \\ \dfrac{x(\sigma(t))-x(t)}{\sigma(t)-t} & (t<\sigma(t)) \end{cases} \quad \text{かつ} \quad x^{\nabla}(t) := \begin{cases} \lim_{s\to t} \dfrac{x(t)-x(s)}{t-s} & (t=\rho(t)) \\ \dfrac{x(\rho(t))-x(t)}{\rho(t)-t} & (t>\rho(t)). \end{cases}$$

ここで，$\sigma$ は $\sigma(t) := \inf\{s\in\mathbb{T} : s>t\}$ によって定義され，*forward jump operator* と呼ばれており，$\rho$ は $\rho(t) := \sup\{s\in\mathbb{T} : s<t\}$ によって定義され，*backward jump operator* と呼ばれている．また，時間 $t$ と演算子 $\sigma$ との差を $\mu(t) := \sigma(t)-t$ として，時間 $t$ と演算子 $\rho$ との差を $\nu(t) := t-\rho(t)$ とする．もし，$\mu(t)=0$ となる $t\in\mathbb{T}$ が存在すれば，その時間 $t$ を *right-dense* と呼び，$\mu(t)>0$ となる $t\in\mathbb{T}$ が存在すれば，その時間 $t$ を *right-scattered* と呼ぶ．一方，もし，$\nu(t)=0$ となる $t\in\mathbb{T}$ が存在すれば，その時間 $t$ を *left-dense* と呼び，$\nu(t)>0$ となる $t\in\mathbb{T}$ が存在すれば，その時間 $t$ を *left-scattered* と呼ぶ．また，タイムスケール $\mathbb{T}$ において，ある時刻 $m$ が left-scattered の最大値をとる場合，$\mathbb{T}^{\kappa}=\mathbb{T}-\{m\}$ とする．そうでない場合は，$\mathbb{T}^{\kappa}=\mathbb{T}$ である．また，ある時刻 $n$ が right-scattered の最小値をとる場合，$\mathbb{T}_{\kappa}=\mathbb{T}-\{n\}$ とする．そうでない場合は，$\mathbb{T}_{\kappa}=\mathbb{T}$ である．

タイムスケール $\mathbb{T}$ の選び方は様々であり，$\mathbb{T}=\mathbb{R}$ ならば，デルタ微分とナブラ微分は，$x^{\Delta}(t)=$

$x'(t) = x^{\nabla}(t)$ となるから，通常の微分と一致する．また，$\mathbb{T} = \mathbb{N}$ ならば，デルタ微分とナブラ微分は前進差分 $x^{\Delta}(t) = \Delta x(t) = x(t+1) - x(t)$ と後退差分 $x^{\nabla}(t) = \nabla x(t) = x(t) - x(t-1)$ になる．

タイムスケール上の積分も定義されている．実際に，関数 $f : \mathbb{T} \to [0, \infty)$ に対して，それぞれの right-dense point で連続かつ任意の left-dense point で左極限値が存在すれば，関数 $f$ は *right-dense continuous* と呼ばれており，もし関数 $f$ が right-dense continuous ならば，$F^{\Delta}(t) = f(t)$ を満たすデルタ微分可能な関数 $F^{\Delta}$ が存在する．一方，関数 $g : \mathbb{T} \to [0, \infty)$ に対して，それぞれの left-dense point で連続かつ任意の right-dense point で右極限値が存在すれば，関数 $g$ は *left-dense continuous* と呼ばれており，もし関数 $g$ が left-dense continuous ならば，$G^{\nabla}(t) = g(t)$ を満たすナブラ微分可能な関数 $G^{\nabla}$ が存在する．すなわち，$a < b$ に対して，デルタ積分とナブラ積分はそれぞれ

$$\int_a^b f(t)\Delta t = F(b) - F(a) \quad \text{かつ} \quad \int_a^b g(t)\nabla t = G(b) - G(a)$$

によって定義され，もし $\mathbb{T} = \mathbb{R}$ ならば，デルタ積分とナブラ積分は通常の積分となる．一方，$\mathbb{T} = \mathbb{N}$ ならば，デルタ積分とナブラ積分は以下の通りである．

$$\int_a^b f(t)\Delta t = \sum_{t=a}^{b-1} f(t) \quad \text{かつ} \quad \int_a^b g(t)\nabla t = \sum_{t=a+1}^{b} g(t).$$

既に上述したように，タイムスケールの概念でよく使う演算子は $\sigma$ と $\rho$，$\mu$，$\nu$ であり，これらの演算子を利用して，一般化された指数関数も定義されている．その指数関数を定義する準備として，任意の $t \in \mathbb{T}^{\kappa}$ に対して，$1 + \mu(t)h(t) \neq 0$ を満たす関数 $h : \mathbb{T}^{\kappa} \to \mathbb{R}$ が存在すると仮定する．この関数 $h$ は *regressive* と呼ばれている．また，全ての regressive かつ right-dense continuous を満たす関数族の集合を $\mathcal{R}_{\mu}$ と定義する．さらに，任意の $t \in \mathbb{T}^{\kappa}$ に対して，集合 $\mathcal{R}_{\mu}^{+}$ を $\mathcal{R}_{\mu}^{+} := \{h \in \mathcal{R}_{\mu} : 1 + \mu(t)h(t) > 0\}$ によって定義する．このとき，関数 $h$ が $h \in \mathcal{R}_{\mu}$ ならば，任意の $t \in \mathbb{T}$ と $s \in \mathbb{T}^{\kappa}$ に対して，一般化された指数関数を

$$e_{\phi}(t, s) = \exp\left(\int_s^t \xi_{\mu(\tau)}(\phi(\tau))\Delta\tau\right)$$

によって定義する．ただし，$\xi_h(z)$ は

$$\xi_h(z) = \begin{cases} \dfrac{\log(1 + hz)}{h} & (h \neq 0) \\ z & (h = 0) \end{cases}$$

である．もし $h \in \mathcal{R}^{+}$ ならば，関数 $e_h(t, t_0)$ は常に正である．一方，任意の $t \in \mathbb{T}$ に対して，$1 - \nu(t)h(t) \neq 0$ を満たす関数 $h : \mathbb{T}_{\kappa} \to \mathbb{R}$ は *$\nu$-regressive* と呼ばれている．また，全ての $\nu$-regressive かつ left-dense continuous を満たす関数族の集合を $\mathcal{R}_{\nu}$ と定義する．さらに，任意の $t \in \mathbb{T}$ に対して，集合 $\mathcal{R}_{\nu}$ を $\mathcal{R}_{\nu}^{+} = \{h \in \mathcal{R}_{\nu} : 1 - \nu(t)h(t) > 0\}$ によって定義する．このとき，関数 $h$ が $h \in \mathcal{R}_{\nu}$ ならば，任意の $t \in \mathbb{T}$ と $s \in \mathbb{T}_{\kappa}$ に対して，一般化された指数関数を

$$\hat{e}_{\phi}(t, s) = \exp\left(\int_s^t \hat{\xi}_{\nu(\tau)}(\phi(\tau))\nabla\tau\right)$$

によって定義する．ただし，$\hat{\xi}_h(z)$ は

$$\hat{\xi}_h(z) = \begin{cases} -\dfrac{\log(1-hz)}{h} & (h \neq 0) \\ z & (h = 0) \end{cases}$$

である．

上述したタイムスケール上で扱う関数や定義はごく一部であるが，本稿では必要な道具となる．このタイムスケール上の関数や定義を利用して，常微分方程式と差分方程式の両解挙動に対する類似性の研究が注目を浴びている．また，類似性のみならず，常微分方程式と差分方程式の解挙動の相違性についても探求すべき課題となる．

本稿では，デルタ微分とナブラ微分を混合した減衰付き非線形ダイナミック方程式（nonlinear dynamic equation with mixed derivatives）

$$(\Phi_p(x^{\Delta}))^{\nabla} + a(t)\Phi_p(x^{\Delta}) + b(t)\Phi_p(x) = 0, \quad t \in \mathbb{T}_{t_0} \tag{1.1}$$

の解の非振動性を考える．ただし，$t_0 \in \mathbb{T}$ であり，$\mathbb{T}_{t_0} = \mathbb{T} \cap [t_0, \infty)$ と定義する．また，$a\colon \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ と $b\colon \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ は real left-dense continuous である．また，任意の $p > 1$ に対して，実数値関数 $\Phi_p$ は

$$\Phi_p(s) = \begin{cases} |s|^{p-2}s & (s \neq 0) \\ 0 & (s = 0) \end{cases} \quad s \in \mathbb{R}$$

であり，1 次元 $p$-Laplacian で定義された関数である．特に，パラメータ $p$ の共役数 $q$ は $(p-1)(q-1) = 1$ を満たすとする．このとき，関数 $\Phi_p$ の逆関数は $\Phi_q$ であることに注意しておく．

方程式 (1.1) は非線形であるが，関数 $\Phi_p$ の定義から**半分線形**と呼ばれている．実際に，任意の実数 $s_1$ と $s_2$ に対して，$\Phi_p(s_1 s_2) = \Phi_p(s_1)\Phi_p(s_2)$ となるから，斉次性は成立する．しかしながら，一般的に $p \neq 2$ であれば，$\Phi_p(s_1 + s_2) = \Phi_p(s_1) + \Phi_p(s_2)$ は成り立たない．すなわち，加法性は満たさない．したがって，本研究で扱う方程式は，線形性のうち，半分の性質をもつことから，方程式 (1.1) は**半分線形ダイナミック方程式**（half-linear dynamic equation）と呼ばれている．半分線形ダイナミック方程式 (1.1) に対して，$\mathbb{T} = \mathbb{R}$ のとき，方程式 (1.1) は減衰付き半分線形微分方程式となる．$\mathbb{T} = \mathbb{N}$ のとき，方程式 (1.1) は前進差分と後退差分をもつ減衰付き半分線形差分方程式となる．

方程式 (1.1) は次の Sturm–Liouville 型と呼ばれる半分線形ダイナミック方程式

$$(r(t)\Phi_p(x^{\Delta}))^{\nabla} + c(t)\Phi_p(x) = 0, \quad t \in \mathbb{T}_{t_0} \tag{1.2}$$

と同値である（詳細は第 2 節を参照せよ）．方程式 (1.1) や方程式 (1.2) は自明解 $x(t) \equiv 0$ をもつから，非自明解の挙動を探求する．考察する方程式の一般解の導出は一般的に困難であるから，解の挙動を探るために必要な方法の一つとして，振動理論がよく知られている．振動理論とは，方程式の解を終局的に正（または負）となる解（非振動解）とそうでない解（振動解）の 2 つに分類することである．方程式 (1.1) や方程式 (1.2) の解が振動する（または振動しない）定義は以下の通りである．

**定義 1.1** ある時刻 $t$ に対して，方程式 (1.1) または方程式 (1.2) の解が $x(t) = 0$ または，left-scattered かつ $x(\rho(t))x(t) < 0$ を満たす $t$ が存在するとき，その時刻 $t$ を *generalized zero* と呼ぶ．

**定義 1.2** $t^* = \sup \mathbb{T}$ かつ $a \in \mathbb{T}$ とする．$t^* < \infty$ の場合，$\rho(t^*) = t^*$ と仮定する．方程式 (1.1) または方程式 (1.2) の非自明解が振動するとは，区間 $[a, t^*)$ に対して，方程式 (1.1) または方程式 (1.2) の

全ての非自明解が無限個の generalized zero をもつときである．そうでない場合は，区間 $[a, t^*)$ に対して，方程式 (1.1) または方程式 (1.2) の全ての解は振動しないという．すなわち，ある十分大きな時刻以降の $t$ に対して，方程式 (1.1) または方程式 (1.2) の解は常に正または常に負を意味する．

半分線形ダイナミック方程式 (1.2) の振動理論の基礎は，Došlý and Marek [5] によって構築され，既に，Sturm の比較定理や分離定理も存在する．Sturm の比較定理と分離定理は，方程式 (1.2) の１つの非自明解が振動すれば，方程式 (1.2) の全ての非自明解も振動することである．もちろん，方程式 (1.2) の１つの非自明解が振動しなければ，方程式 (1.2) の全ての非自明解も振動しない．すなわち，方程式 (1.2) に対して，振動する解と振動しない解は混在しない．また，方程式 (1.1) と方程式 (1.2) は同値であるから，振動する解と振動しない解が混在しない事実は方程式 (1.1) にも当てはまる．Sturm の比較定理や分離定理を利用して，著者も方程式 (1.2) の全ての非自明解が振動しないための十分条件も導出している（[7] を参照せよ）．この結果は，半分線形微分方程式と半分線形差分方程式の解挙動の類似性に関する成果となる．

最近では，常微分方程式の解の性質を探る手法が差分方程式にも適用できるようにカスタマイズされるようになり，タイムスケールの概念を利用して，連続型の方程式（線形または非線形微分方程式）と離散型の方程式（線形または非線形差分方程式）の解の性質（振動性や安定性）を統一した類似条件が数多く導出されている．このままでは，常微分方程式と差分方程式の解の相違性は消失してしまうのではないのか？と疑問が生じてもおかしくはない．そこで，本稿では，方程式 (1.1) の全ての非自明解が振動しないための十分条件を導出するとともに，その十分条件から，常微分方程式と差分方程式の解の相違性を発見することを主目的とする．

目的を達成するためには，振動理論でよく利用する，方程式 (1.1) に対応したリッカチダイナミック方程式（Riccati dynamic equation）の導入が必要となる．実際に，方程式 (1.1) の非自明解が振動しないと仮定して，同値変換を利用すれば，1 階非線形ダイナミック方程式（リッカチダイナミック方程式）が導出できる．もし，リッカチダイナミック方程式を満たす大域解が１つでも存在すれば，方程式 (1.1) の全ての非自明解は振動しないことがわかる．これまで，方程式 (1.1) に対応したリッカチダイナミック方程式はこれまでに与えられていないため，本研究では，このリッカチ手法を確立して，目的を達成させる．

本稿の構成は以下の通りである．

第２節では，方程式 (1.1) に対応する一般化された新しいリッカチダイナミック方程式を与える．第３節では，第２節で紹介したリッカチダイナミック方程式を利用して，方程式 (1.1) の全ての非自明解が振動しないことを保証する十分条件とその証明を紹介する．また，導出した非振動定理から，具体例として，減衰付き半分線形 Euler 型方程式の非振動条件を与える．最後の第４節では，第３節で紹介した非振動条件から，$p \neq 2$ ならば，半分線形微分方程式と半分線形差分方程式の両者の解の非振動条件に相違性があることを紹介する．

## 2　一般化されたリッカチダイナミック方程式

方程式 (1.1) に対応するリッカチダイナミック方程式を導出するために，以下の命題を利用する．

**命題 2.1**　もし $-a \in \mathcal{R}_\nu^+$ ならば，方程式 (1.1) は次の Strum–Liouville 型半分線形ダイナミック方程

式 (1.2) と同値である．ただし，関数 $r$ と $c$ は

$$r(t)=\hat{e}_{\frac{a}{1+\nu a}}(t,t_0)\quad \text{かつ}\quad c(t)=\frac{b(t)}{1+\nu(t)a(t)}\hat{e}_{\frac{a}{1+\nu a}}(t,t_0)$$

である．

**命題 2.1 の証明** 方程式 (1.1) の両辺に $\hat{e}_{\frac{a}{1+\nu a}}(t,t_0)$ を掛け算すれば，

$$\hat{e}_{\frac{a}{1+\nu a}}(t,t_0)(\Phi_p(x^{\Delta}))^{\nabla}+\hat{e}_{\frac{a}{1+\nu a}}(t,t_0)a(t)\Phi_p(x^{\Delta})+\hat{e}_{\frac{a}{1+\nu a}}(t,t_0)b(t)\Phi_p(x)=0$$

となる．また，関数 $\Phi_p(x^{\Delta})$ に対して，

$$\Phi_p(x^{\Delta})=\Phi_p(x^{\Delta}(\rho(t)))+\nu(t)(\Phi_p(x^{\Delta}))^{\nabla}$$

を利用すれば，

$$\begin{aligned}(1+\nu(t)a(t))\hat{e}_{\frac{a}{1+\nu a}}(t,t_0)(\Phi_p(x^{\Delta}))^{\nabla}&+a(t)\hat{e}_{\frac{a}{1+\nu a}}(t,t_0)\Phi_p(x^{\Delta}(\rho(t)))\\&+b(t)\hat{e}_{\frac{a}{1+\nu a}}(t,t_0)\Phi_p(x)=0\end{aligned}$$

を得る．ここで，$1+\nu(t)a(t)>0$ であるから，

$$\begin{aligned}\hat{e}_{\frac{a}{1+\nu a}}(t,t_0)(\Phi_p(x^{\Delta}))^{\nabla}&+\frac{a(t)}{1+\nu(t)a(t)}\hat{e}_{\frac{a}{1+\nu a}}(t,t_0)\Phi_p(x^{\Delta}(\rho(t)))\\&+\frac{b(t)}{1+\nu(t)a(t)}\hat{e}_{\frac{a}{1+\nu a}}(t,t_0)\Phi_p(x)=0\end{aligned}$$

がわかる．したがって，タイムスケール上の積の微分公式から，

$$(\hat{e}_{\frac{a}{1+\nu a}}(t,t_0)\Phi_p(x^{\Delta}))^{\nabla}+\frac{b(t)}{1+\nu(t)a(t)}\hat{e}_{\frac{a}{1+\nu a}}(t,t_0)\Phi_p(x)=0 \tag{2.1}$$

を得る． □

命題 2.1 を利用して，以下の必要十分条件を証明する．

**定理 2.1** 以下は同値である．

(i) 方程式 (1.1) の全ての非自明解が振動しない．

(ii) $\Phi_q(w(\rho))\in\mathcal{R}_{\nu}^{+}$ かつ $\mathcal{W}[w]\geq 0$ を満たすナブラ微分可能な関数 $w$ が存在する．ただし，$\mathcal{W}[w]$ は

$$\mathcal{W}[w]:=\begin{cases}w^{\nabla}(t)-b(t)+a(t)w(t)-(p-1)|w(t)|^{q} & (\rho(t)=t),\\ w^{\nabla}(t)-b(t)+a(t)w(t)+\frac{w(\rho(t))}{\nu(t)}\left(1-\frac{1}{\Phi_p(1-\nu(t)\Phi_q(w(\rho(t))))}\right) & (\rho(t)<t)\end{cases}$$

である．

**定理 2.1 の証明** まず，十分条件を示していく．方程式 (1.1) の 1 つの解 $x$ が振動しないと仮定する．このとき，一般性を失うことなく，$x(t)>0$ と仮定してもよい．ここで，関数 $w$ を

$$w(t):=-\frac{\Phi_p(x^{\Delta}(t))}{\Phi_p(x(t))}$$

と定義する．関数 $w$ はナブラ微分可能であるから，

$$\Phi_p(x(t))=\Phi_p(x(\rho(t)))+\nu(t)(\Phi_p(x(t)))^{\nabla}$$

かつ

$$\Phi_p(x^{\Delta}(t)) = \Phi_p(x^{\Delta}(\rho(t))) + \nu(t)(\Phi_p(x^{\Delta}(t)))^{\nabla}$$

に注意すれば，

$$\begin{aligned}
w^{\nabla}(t) =& - \frac{(\Phi_p(x^{\Delta}(t)))^{\nabla}\Phi_p(x(t)) - \Phi_p(x^{\Delta}(t))(\Phi_p(x(t)))^{\nabla}}{\Phi_p(x(t))\Phi_p(x(\rho(t)))} \\
=& - \frac{(\Phi_p(x^{\Delta}(t)))^{\nabla}\big(\Phi_p(x(\rho(t))) + \nu(t)(\Phi_p(x(t)))^{\nabla}\big) - \Phi_p(x^{\Delta}(t))(\Phi_p(x(t)))^{\nabla}}{\Phi_p(x(t))\Phi_p(x(\rho(t)))} \\
=& - \frac{(\Phi_p(x^{\Delta}(t)))^{\nabla}}{\Phi_p(x(t))} + \frac{\big(\Phi_p(x^{\Delta}(t)) - \nu(t)(\Phi_p(x^{\Delta}(t)))^{\nabla}\big)(\Phi_p(x(t)))^{\nabla}}{\Phi_p(x(t))\Phi_p(x(\rho(t)))} \\
=& \frac{a(t)\Phi_p(x^{\Delta}(t)) + b(t)\Phi_p(x(t))}{\Phi_p(x(t))} + \frac{\Phi_p(x^{\Delta}(t))(\Phi_p(x(t)))^{\nabla}}{\Phi_p(x(t))\Phi_p(x(\rho(t)))} \\
=& b(t) - a(t)w(t) - w(\rho(t))\frac{(\Phi_p(x(t)))^{\nabla}}{\Phi_p(x(t))}
\end{aligned}$$

を得る．また，簡単のために，

$$(\Phi_p(x(t)))^{\nabla} = \frac{1}{\nu(t)}\big(\Phi_p(x(t)) - \Phi_p(x(\rho(t)))\big)$$

であることに注意して，$(\Phi_p(x(t)))^{\nabla}/\Phi_p(x(t))$ を計算すれば，

$$\begin{aligned}
\frac{(\Phi_p(x(t)))^{\nabla}}{\Phi_p(x(t))} =& \frac{\Phi_p(x(t)) - \Phi_p(x(\rho(t)))}{\nu(t)\Phi_p(x(t))} \\
=& \frac{1}{\nu(t)}\left(1 - \frac{\Phi_p(x(\rho(t)))}{\Phi_p(x(t))}\right) \\
=& \frac{1}{\nu(t)}\left(1 - \frac{\Phi_p(x(\rho(t)))}{\Phi_p\big(x(\rho(t)) + \nu(t)x^{\Delta}(\rho(t))\big)}\right) \\
=& \frac{1}{\nu(t)}\left(1 - \frac{1}{\Phi_p\left(1 + \nu(t)\frac{x^{\Delta}(\rho(t))}{x(\rho(t))}\right)}\right)
\end{aligned}$$

となる．また，

$$\frac{x^{\Delta}(t)}{x(\rho(t))} = -\Phi_p(w(\rho(t)))$$

から，

$$\frac{(\Phi_p(x(t)))^{\nabla}}{\Phi_p(x(t))} = \frac{1}{\nu(t)}\left(1 - \frac{1}{\Phi_p\left(1 - \nu(t)\Phi_q(w(\rho(t)))\right)}\right)$$

を得る．もし $\rho(t) < t$ ならば，関数 $w$ のナブラ微分は

$$w^{\nabla}(t) = b(t) - a(t)w(t) - \frac{w(\rho(t))}{\nu(t)}\left(1 - \frac{1}{\Phi_p\left(1 - \nu(t)\Phi_q(w(\rho(t)))\right)}\right)$$

となる．また，方程式 (1.1) の解が非振動解であるから，

$$x(t)x(\rho(t)) > 0$$

によって，

$$\begin{aligned}1-\nu(t)\varPhi_q(w(\rho(t))) &= 1+\nu(t)\frac{x^{\Delta}(\rho(t))}{x((\rho(t)))} = \frac{x(\rho(t))+\nu(t)x^{\Delta}(\rho(t))}{x(\rho(t))} \\ &= \frac{x(\rho(t))+\nu(t)x^{\nabla}(t)}{x(\rho(t))} \\ &= \frac{x(t)}{x(\rho(t))} = \frac{x(t)x(\rho(t))}{x^2(\rho(t))} > 0\end{aligned}$$

を満足する．

一方，もし $\rho(t)=t$ ならば，関数 $w$ のナブラ微分は

$$\begin{aligned}w^{\nabla}(t) &= b(t)-w(t)a(t)-w(\rho(t))\frac{(\varPhi_p(x(t)))'}{\varPhi_p(x(t))} \\ &= b(t)-a(t)w(t)-(p-1)w(\rho(t))\frac{x'(t)}{x(t)} \\ &= b(t)-a(t)w(t)+(p-1)w(\rho(t))|w(t)|^q\end{aligned}$$

となる．

次に必要条件を示していく．新しい正の関数 $d$ を

$$d(t) := w^{\nabla}(t)-b(t)+a(t)w(t)+\frac{w(\rho(t))}{\nu(t)}\left(1-\frac{1}{\varPhi_p(1-\nu(t)\varPhi_q(w(\rho(t)))}\right) \geq 0$$

とする．このとき，関数 $d$ をもつ半分線形ダイナミック方程式

$$(\varPhi_p(x^{\Delta}))^{\nabla}+a(t)\varPhi_p(x^{\Delta})+(b(t)+d(t))\varPhi_p(x)=0 \tag{2.2}$$

を考える．このとき，方程式 (2.2) は非振動解

$$x(t)=e_{-\varPhi_q(w)}(t,t_0)$$

をもつことは容易にわかる．したがって，命題 2.1 を利用すれば，方程式 (2.2) は

$$(\hat{e}_{\frac{a}{1+\nu a}}(t,t_0)\varPhi_p(x^{\Delta}))^{\nabla}+\frac{b(t)+d(t)}{1+\nu(t)a(t)}\hat{e}_{\frac{a}{1+\nu a}}(t,t_0)\varPhi_p(x)=0 \tag{2.3}$$

となる．また，方程式 (1.1) と方程式 (2.1) は同値である．したがって，方程式 (2.1) と方程式 (2.3) に対して，Sturm の比較定理を利用すれば，

$$b(t)+d(t) \geq b(t)$$

であるから，方程式 (2.1) のすべての非自明解は振動しない．すなわち，方程式 (1.1) のすべての非自明解も振動しないことがわかる． □

## 3　半分線形ダイナミック方程式 (1.1) の非振動定理

方程式 (1.1) に対して，新しい非振動定理を与える．

**定理 3.1** ナブラ微分可能な関数 $B$ は，$B^{\nabla}(t) = b(t)$ かつ $\Phi_q(B(\rho)) \in \mathcal{R}_\nu^+$ を満たすと仮定する．もし

$$\begin{cases} \big((p-1)\Phi_q(B(t)) - a(t)\big)B(t) \le 0 \quad (\rho(t) = t), \\ B(\rho(t)) - \big(B(t)a(t)\nu(t) + B(\rho(t))\big)\Phi_p\big(1 - \nu(t)\Phi_q(B(\rho(t)))\big) \le 0 \quad (\rho(t) < t) \end{cases} \tag{3.1}$$

ならば，方程式 (1.1) の全ての非自明解は振動しない．

**定理 3.1 の証明** $\rho(t) < t$ の場合のみ証明する．$\rho(t) = t$ の場合は Sugie and Matsumura [8] を参照せよ．$\nu > 0$ かつ $1 - \nu\Phi_q(B(\rho)) > 0$ であることに注意して，(3.1) の両辺を $\nu\Phi_p\big(1 - \nu\Phi_q(B(\rho))\big)$ で割れば，

$$\begin{aligned} 0 &\ge -B(t)a(t) - \frac{B(\rho(t))}{\nu(t)} + \frac{B(\rho(t))}{\nu(t)\Phi_p\big(1 - \nu(t)\Phi_q(B(\rho(t)))\big)} \\ &= -B(t)a(t) - \frac{B(\rho(t))}{\nu(t)}\left(1 - \frac{1}{\Phi_p\big(1 - \nu(t)\Phi_q(B(\rho(t)))\big)}\right) \end{aligned}$$

を得る．ここで，両辺に $B^{\nabla}$ を加えれば，

$$B^{\nabla}(t) \ge b(t) - B(t)a(t) - \frac{B(\rho(t))}{\nu(t)}\left(1 - \frac{1}{\Phi_p\big(1 - \nu(t)\Phi_q(B(\rho(t)))\big)}\right)$$

となる．したがって，$B$ は定理 2.1 のリッカチ不等式を満たす． □

定理 3.1 の例として，次の減衰付き Euler 型半分線形ダイナミック方程式

$$(\Phi_p(x^{\Delta}))^{\nabla} + a(t)\Phi_p(x^{\Delta}) + \frac{1}{t\sigma(t)}\Phi_p(x) = 0, \quad t \in \mathbb{T}_{t_0} \tag{3.2}$$

を考える．もし $\mathbb{T} = \mathbb{R}$ ならば，$\sigma(t) = t$ であるから，方程式 (3.2) は半分線形微分方程式

$$(\Phi_p(x'))' + a(t)\Phi_p(x') + \frac{1}{t^2}\Phi_p(x) = 0, \quad t \ge 1 \tag{3.3}$$

となる．一方，$\mathbb{T} = \mathbb{N}$ ならば，$\sigma(t) = t + 1$ であるから，方程式 (3.2) は半分線形差分方程式

$$\nabla(\Phi_p(\Delta x(t))) + a(t)\Phi_p(\Delta x(t)) + \frac{1}{t(t+1)}\Phi_p(x(t)) = 0, \quad t \ge 1 \tag{3.4}$$

となる．方程式 (3.3) と方程式 (3.4) をそれぞれ定理 3.1 に適用すれば，以下の結果がわかる．

**例 3.1** もし

$$a(t) \le \frac{1-p}{t^{q-1}} \tag{3.6}$$

ならば，方程式 (3.3) の全ての非自明解は振動しない．

**例 3.2** もし

$$a(t) \le \frac{t+1}{t\Phi_p\left(1 + \Phi_q(t^{-1})\right)} - \frac{t+1}{t} \tag{3.7}$$

ならば，方程式 (3.4) の全ての非自明解は振動しない．

**例 3.1 の証明** 関数 $B(t)=-t^{-1}$ とおけば，$B'(t)=t^{-2}$ となる．また，$\rho(t)=t$ の場合の定理 3.1 の条件 (3.1) に対して，条件 (3.6) を利用すれば，

$$\big((p-1)\varPhi_p(-t^{-1})-a(t)\big)(-t^{-1})=\frac{p-1}{t^q}+\frac{a(t)}{t}\le 0$$

となる．したがって，条件 (3.1) を満たす． □

**例 3.2 の証明** 関数 $B(t)=-(t+1)^{-1}$ とおく．このとき，$B(\rho(t))=B(t-1)=-t^{-1}$ かつ $\nu(t)=1$ であるから，

$$\nabla B(t)=B(t)-B(t-1)=\frac{1}{t(t+1)}$$

かつ

$$1-\nu(t)\varPhi_q\big(B(\rho(t))\big)=1+\varPhi_q(t^{-1})>0$$

となる．また，$\rho(t)<t$ の場合の定理 3.1 の条件 (3.1) に対して，条件 (3.7) を利用すれば，

$$\begin{aligned}
&B(\rho(t))-\big(B(t)a(t)\nu(t)+B(\rho(t))\big)\varPhi_p\big(1-\nu(t)\varPhi_q(B(\rho(t)))\big)\\
&=-\frac{1}{t}-\left(-\frac{a(t)}{t+1}-\frac{1}{t}\right)\varPhi_p(1+\varPhi_q(t^{-1}))\\
&\le-\frac{1}{t}+\left(\frac{t+1}{t\varPhi_p\left(1+\varPhi_q(t^{-1})\right)}-\frac{t+1}{t}\right)\frac{\varPhi_p(1+\varPhi_q(t^{-1}))}{t+1}+\frac{\varPhi_p(1+\varPhi_q(t^{-1}))}{t}\\
&=0
\end{aligned}$$

となる．したがって，条件 (3.1) を満たす． □

**注意 3.1** $p=2$ の場合，条件 (3.6) と条件 (3.7) は共に

$$a(t)\le-\frac{1}{t}$$

となる．したがって，線形微分方程式 (3.2) と線形差分方程式 (3.3) の解が振動しないための条件は一致する．

# 4 解の非振動性に関する常微分方程式と差分方程式の相違性

本節では，常微分方程式と差分方程式の解の非振動性に関する相違条件を議論する．第 3 節の注意 3.1 で紹介したように，$p=2$ の場合は，方程式 (3.3) と方程式 (3.4) の解の非振動条件は同じとなる．しかしながら，$p\neq 2$ かつ $p>1$ の場合は，半分線形微分方程式 (3.3) と半分線形差分方程式 (3.4) の全ての非自明解が振動しない条件は異なる．実際に，ここで問題となるのは，半分線形微分方程式 (3.3) の解が振動しない条件 (3.6) のもとで，半分線形差分方程式 (3.4) の解は振動しないのか？それとも振動するのか？もし，半分線形差分方程式 (3.4) の 1 つの解でも振動解を見つけることができれば，相違性を発見できる．実際に，例 3.1 の条件 (3.6) のもとで，半分線形差分方程式 (3.4) の非自明解が振動していることを数値シミュレーションにより可視化する．

方程式 (3.4) の解軌道を描くために，パラメータを $p=3.8$ かつ $q=p/(p-1)\approx 1.35714\cdots$ とする．また，方程式 (3.4) の係数関数 $a$ を $a(t)=(1-p)/t^{q-1}$ とすれば，条件 (3.6) は満足している．

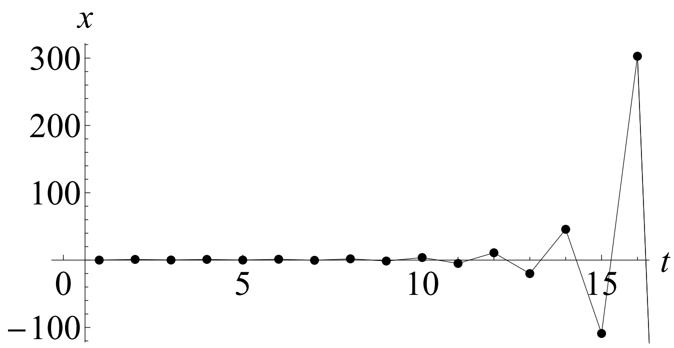


図 1　$p = 3.8$ かつ $q = p/(p-1) \approx 1.35714\cdots$ のときの条件 (3.6) を満足する方程式 (3.4) の振動する解

このとき，方程式 (3.4) の $x(1) = 0$ かつ $x(2) = 1$ から出発する解は振幅がどんどん大きくなる振動解であることがわかる（図 1 を参照せよ）．

結論として，$p \neq 2$ かつ $p > 1$ の場合は，半分線形微分方程式 (3.3) と半分線形差分方程式 (3.4) の解の振動性にはそれぞれ相違性があることがわかる．一般的に，タイムスケールの概念は常微分方程式と差分方程式を統一する道具として活用されるが，本稿では，類似性のみならず相違性について発見することができた．

## 参考文献


[1] R. P. Agarwal, D. O'Regan, S. H. Saker, *Dynamic Inequalities On Time Scales*, Springer, New York, 2014.

[2] M. Bohner, A. C. Peterson, *Dynamic equations on time scales: An introduction with applications*, Birkhäuser, Boston, 2001.

[3] M. Bohner, A. Peterson, *Advances in Dynamic Equations on Time Scales*, Birkhäuser, Boston, 2003.

[4] M. Bohner, S. G. Georgiev, *Multivariable dynamic calculus on time scales*, Springer-Verlag: Springer-Verlag Berlin, Heidelberg, 2016.

[5] O. Došlý, D. Marek, Half-linear dynamic equations with mixed derivatives, E. J. Diff. Eq., **2005** (2005), pp.1–18.

[6] S. Hilger, Ein Maßkettenkalkül mit Anwendung auf Zentrumsmannigfaltigkeiten, PhD thesis, Universität Würzburg, 1988.

[7] K. Ishibashi, Hille–Nehari type non-oscillation criteria for half-linear dynamic equations with mixed derivatives on a time scale, E. J. Diff. Eq., **2021** (2021), no. 78, pp.1–15.

[8] J. Sugie, K. Matsumura, A nonoscillation theorem for half-linear differential equations with periodic coefficients, Appl. Math. Comput., **199** (2008), 447–455.