

非平面グラフとリー環 $sl(N)$ のウェイトシステム

東京工業大学 情報理工学院 数理・計算科学系

今里優樹 Imasato Yuki

概要

ウェイトシステムとは有限次元のリー環を1つ固定したとき、3-正則グラフに対して値を与える関数であり、リー環 $sl(N)$ に対するウェイトシステムの値はグラフの平面性と関係がある。本講演ではまずはじめにグラフの諸定義およびグラフの平面性に重要なワグナーの定理を紹介する。その後ウェイトシステムの定義と $sl(N)$ に対するウェイトシステムの性質を紹介し、最後にいくつかのグラフに対する $sl(N)$ のウェイトシステムの計算結果を考察する。

1 グラフ

グラフを定義する。

定義 1. 有限集合 V, E と、 E から V の冪集合への写像 $\psi: E \rightarrow P(V)$ に対して、任意の $e \in E$ で $|\psi(e)|$ が1または2であるとき、これら3つの組 (V, E, ψ) をグラフという。グラフ G に対して V を頂点集合、 E を辺集合という。また V の元を頂点、 E の元を辺という。

グラフ $G = (V, E, \psi)$ の頂点 $v \in V$ と辺 $e \in E$ に対して $v \in \psi(e)$ であるとき e は v に接続するといい、 v に接続する辺の数を v の次数という。グラフとは上記のように2つの有限集合と写像の組のことであるが、頂点を点、辺を接続する頂点を結ぶ曲線として平面に描く表し方が一般的である。

例 1. $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}, E = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$,

$\psi(e_1) = \{v_1, v_2\}, \psi(e_2) = \{v_1, v_3\}, \psi(e_3) = \{v_2, v_3\}, \psi(e_4) = \{v_2, v_4\}, \psi(e_5) = \{v_3, v_4\}$

となるグラフ (V, E, ψ) は以下のように表される。

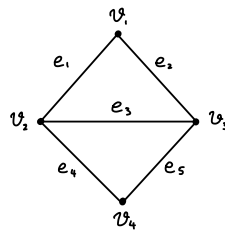


図1 グラフの例

定義 2. k を自然数とする。 G において全ての頂点の次数が k であるとき、 G は k -正則グラフという。

定義 3. G において、頂点と辺の交互列 $W = v_0 e_0 v_1 e_1 v_2 \cdots v_{n-1} e_{n-1} v_n$ を道という。ただし $\psi(e_k) =$

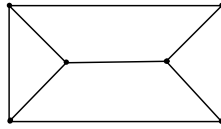


図2 3-正則グラフの例

$\{v_k, v_{k+1}\}$ とする. このとき v_0 を始点, v_n を終点という.

定義 4. G の任意の頂点 v, w において v を始点, w を終点とする道が存在するとき G は連結であるという.

定義 5. $G = (V, E, \psi)$ から辺 e を取り除いたグラフ $(V, E \setminus \{e\}, \psi_{E \setminus \{e\}})$ を辺 e の削除という. G を非連結にするのに削除しなければならない最小の辺の数を辺連結度といい, 辺連結度が k 以上のグラフを k -辺連結グラフという.

定義 6. グラフを平面に描くとき全ての頂点を異なる点として描き, 全ての辺が端点以外で他の辺と交わらないように描けるときの, グラフは平面的であるという.

例 2. 下の 2 つの図は同一のグラフを表しており, 左図は辺が交差しているが, 辺をずらすと右図のように交差なくかけるのでこのグラフは平面的である.

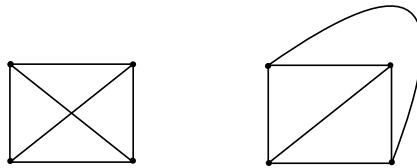


図3 平面的グラフ

例 3. 非平面的グラフの例としては $K_{3,3}$ や K_5 がある.

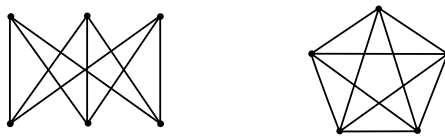


図4 非平面的グラフ $K_{3,3}$ 及び K_5

定義 7. $G = (V, E, \psi)$ の頂点 v に接続する辺の集合を E_v とする. G から v 及び v に接続する辺を全て取り除いたグラフ $(V \setminus \{v\}, E \setminus E_v, \psi_{E \setminus E_v})$ を頂点 v の削除という.

定義 8. $G = (V, E, \psi)$ の辺 e_0 に対して $\psi(e_0) = \{u, w\}$ とする. このとき V に新たな頂点 v_{uw} 追加し, $V' = V \cup \{v_{uw}\} \setminus \{u, w\}$, $E' = E \setminus \{e_0\}$ とする. ここで辺 $e \in E', \psi(e) = \{v_1, v_2\}$ に対して, 写像

$\psi' : E' \rightarrow P(V')$ を

$$\psi'(e) = \begin{cases} \{v_1, v_2\} & (\{v_1, v_2\} \cap \{u, w\} = \phi) \\ \{v_1, v_{uw}\} & (v_2 = u \text{ または } v_2 = w) \\ \{v_{uw}, v_2\} & (v_1 = u \text{ または } v_1 = w) \end{cases}$$

とする。このときグラフ $G' = (V', E', \psi')$ を G の縮約といい、 e が縮約されたという。

定義 9. G から縮約と辺・頂点の削除を繰り返して得られるグラフを G のマイナーという。

定理 1 (ワグナーの定理 [2]). グラフが平面的であることの必要十分条件は、マイナーとして K_5 または $K_{3,3}$ を含まないことである。

2 ウェイトシステムの定義

定義 10. G を 3-正則グラフとする。 G の各頂点に対して、接続する 3 つの辺に巡回的な向きが決まっているとき、 G は頂点に向きのついた 3-正則グラフという。

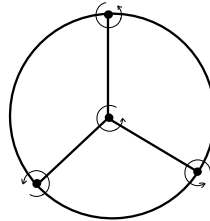


図 5 向きをついた 3-正則グラフの例

以下、頂点に向きのついた 3-正則グラフについてのみ考える。

有限次元のリー環 L に対して、以下の 3 つの性質を満たす双線形形式 $\langle \cdot, \cdot \rangle : L \times L \rightarrow \mathbb{C}$ が定まっているとする。

- 対称性をもつ。すなわち $\langle a, b \rangle = \langle b, a \rangle$ となる。
- 非退化である。すなわち任意の b に対して $\langle a, b \rangle = 0$ ならば $a = 0$ となる。
- ad-invariant 性を持つ。すなわち $\langle [c, a], b \rangle + \langle a, [c, b] \rangle = 0$ となる。

このときウェイトシステムとは、グラフ G に対して値 $W_L(G)$ を返す写像 W_L である。 $W_L(G)$ を定義するために t^{ij} 及び f_{ijk} を以下で定義する。

定義 11. L の基底を $\{L_i\}_{i=1}^{\dim L}$ とし $t_{ij} = \langle L_i, L_j \rangle$ としたとき、 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ の非退化性から行列 $(t_{ij})_{\dim L \times \dim L}$ は正則であることがいえる。そこで (t_{ij}) の逆行列を (t^{ij}) とおく。また $f_{ijk} = \langle L_i, [L_j, L_k] \rangle$ とする。

このとき $W_L(G)$ は以下の手順で定義される。

step.1 辺の半分をラベリングする。

step.2 1 つの辺に対して、その辺上のラベルを読み t^{\cdot} を割り当てる。

step.3 1 つの頂点に対して、その頂点の周りのラベルを向きづけられた順に読み f_{\dots} を割り当てる。

step.4 辺の分だけ t を, 頂点の分だけ f を掛け合わせる.

step.5 step.4 の式に対して, 各ラベルに 1 から $\dim L$ を代入したものを足し合わせる.

なお基底を変えてもウェイトシステムの値は変わらない.

例 4. 上記の手順に従って図 5 のグラフ G の $W_{sl(2)}(G)$ を計算する. ただし $sl(2)$ に対して双線形形式としては $\langle L_i, L_j \rangle = \text{tr}(L_i, L_j)$ を用いると対称性, 非退化性, ad -invariant 性を満たすのでこれを用いる.

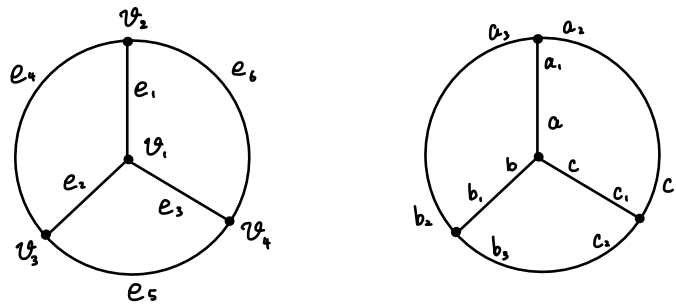
$sl(2)$ の基底として,

$$L_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, L_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, L_3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

を用いると,

$$(t^{ij}) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}, f_{ijk} = \begin{cases} 1 & ((i, j, k) = (1, 2, 3), (2, 3, 1), (3, 1, 2) \text{ のとき}) \\ -1 & ((i, j, k) = (3, 2, 1), (2, 1, 3), (1, 3, 2) \text{ のとき}) \\ 0 & \text{それ以外するとき} \end{cases}$$

となる. 次に辺の半分をラベリングすると下の右図のようになる.



次に辺に対して t を, 頂点に対して f を対応させる. 例えば e_1 に対しては t^{aa_1} , v_4 に対しては $f_{c_1 c_2 c_3}$ を対応させる. 次に全ての頂点, 辺に対応する t, f を掛け合わせ,

$$t_{aa_1} t_{bb_1} t_{cc_1} t_{a_3 b_2} t_{b_3 c_2} t_{c_3 a_2} f_{abc} f_{a_1 a_2 a_3} f_{b_1 b_2 b_3} f_{c_1 c_2 c_3}$$

を得る. 最後に各変数 a, b, c, \dots, c_3 に 1 から $\dim(sl(2)) = 3$ までを代入し足し合わせたものが $W_{sl(2)}(G)$ である. すなわち

$$W_{sl(2)}(G) = \sum_{a, b, c, \dots, c_3=1}^3 t_{aa_1} t_{bb_1} t_{cc_1} t_{a_3 b_2} t_{b_3 c_2} t_{c_3 a_2} f_{abc} f_{a_1 a_2 a_3} f_{b_1 b_2 b_3} f_{c_1 c_2 c_3}$$

となる.

3 リー環 $sl(N)$ ウェイトシステム

以下 $sl(N)$ のウェイトシステムについて考えていく. ただし双線形形式としては $\langle L_i, L_j \rangle = \text{tr}(L_i, L_j)$ を用いる. ここで以下の補題が成り立つ.

補題 1. N を変数と見なしたとき, 任意の連結グラフ G に対して $W_{sl(N)}(G)$ は N の多項式となる. また G の頂点数を v としたとき, N の多項式 $W_{sl(N)}(G)$ の次数は高々 $\frac{v}{2} + 2$ 次となる.

定義 12. 連結グラフ G に対して, $W_{sl(N)}(G)$ の $\frac{v}{2} + 2$ 次の係数を $W_{sl(N)}^{top}(G)$ と表す.

このとき次の定理が成り立つ.

定理 2 (Bar-Natan[1]). G は連結であるとする. このとき G が 2-辺連結ならば $|W_{sl(N)}^{top}(G)|$ は, G の球面への埋め込みの数と等しくなり, 辺連結度が 1 ならば $W_{sl(N)}^{top}(G) = 0$ となる.

この定理から 2-辺連結である G に限ると, G が平面的ならば $W_{sl(N)}^{top}(G) \neq 0$, 非平面的ならば $W_{sl(N)}^{top}(G) = 0$ となることが言える.

以下上記の補題と定理を示す. まずは以下の補題を示す.

補題 2. 任意のグラフ G , 自然数 N に対して $W_{sl(N)}(G) = W_{gl(N)}(G)$ となる.

補題 2 の証明. $sl(N)$ の定義より,

$$gl(N) = sl(N) \oplus \{cE | c \in \mathbb{C}\}$$

となるので $sl(N)$, $\{cE | c \in \mathbb{C}\}$ の基底として, $\{L_i\}_{i=1}^{N^2-1}$, $L_{N^2} = E$ をそれぞれ取ると, $\{L_i\}_{i=1}^{N^2}$ は $gl(N)$ の基底となる. ここで行列リー環の括弧積の定義より $[L_i, E] = 0$ となるので, i, j, k のいずれかが N^2 のとき $f_{ijk} = \{L_i, [L_j, L_k]\} = 0$ となる. よって,

$$\begin{aligned} W_{gl(N)}(G) &= \sum_{a,b,c,\dots=1}^{N^2} t^{aa_1} t^{bb_1} \dots f_{abc} f_{a_1 a_2 a_3} \dots \\ &= \sum_{a,b,c,\dots=1}^{N^2-1} t^{aa_1} t^{bb_1} \dots f_{abc} f_{a_1 a_2 a_3} \dots \\ &= W_{sl(N)}(G) \end{aligned}$$

となる. □

よって以下 $W_{sl(N)}(G)$ の代わりに $W_{gl(N)}(G)$ について考える.

$gl(N)$ の基底として $\{L_{ij}\}_{i,j=1}^N$ ($L_{ij} = E_{ij}$) をとる. ここで $t^{(ij)(kl)}$, $f_{(ij)(kl)(mn)}$ を定義に沿って計算すると, $t^{(ij)(kl)} = \delta_{il} \delta_{jk}$, $f_{(ij)(kl)(mn)} = \delta_{jk} \delta_{lm} \delta_{ni} - \delta_{jm} \delta_{nk} \delta_{li}$ となる. これを用いて $W_{gl(N)}(G)$ を以下の手順で計算する.

step.1 $gl(N)$ の基底は (ij) や (kl) のように 2 つの文字からなるので, グラフ G の辺を二重化し, それぞれの辺の半分にラベルをつける. 例えば図 5 のグラフは下図のようになる.

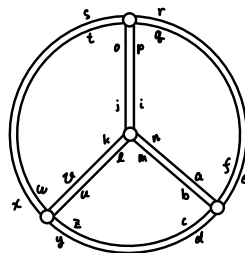
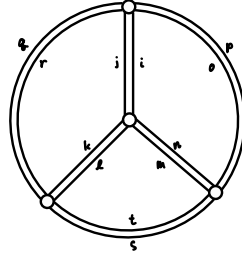
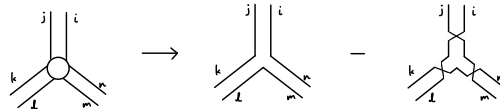


図 6 辺を 2 重化したグラフ

step.2 $t^{(ij)(kl)} = \delta_{il}\delta_{jk}$ となることから, $W_{gl(N)}(G)$ を計算する際 $i \neq l$ または $j \neq k$ となる項は考えなくて良い. よって 1 本の線に対してラベリングされた 2 つの文字をつなげ, 1 つの文字でラベリングする. このとき $t^{(ij)(kl)}$ は全て 1 になるので, $W_{gl(N)}(G) = \sum_{i,j,k,\dots=1}^N f^{(ij)(kl)(mn)} f \dots \dots$ となり, あとは f だけを考えれば良い. すなわち下図のようなラベリングを考えれば良い.



step.3 $f^{(ij)(kl)(mn)} = \delta_{jk}\delta_{lm}\delta_{ni} - \delta_{jm}\delta_{nk}\delta_{li}$ となることから各頂点に対して以下のような図を割り当てる.



step.4 上の図の第 1 項に注目すると, $j = k, l = m, n = i$ のとき 1, それ以外のときは 0 になるので i, j, k, l, m, n に 1 から N までを代入すると,

$$\sum_{i,j,\dots,n=1}^N \delta_{jk}\delta_{lm}\delta_{ni} = \#\{1 \leq i, j, \dots, n \leq N | j = k, l = m, n = i\} = N^3$$

これは N (辺の数) と思うことができる.

step.5 各頂点に対して step.3 の右辺の第 1 項または第 2 項の図を割り当て N (辺の数) を計算し, それを全通り足し合わせたものが $W_{gl(N)}(G) = W_{sl(N)}(G)$ となる. 例えば図 5 のグラフに対して $W_{sl(N)}(G)$ は以下のような式で表せる. ただし $\#(\bigcirc)$ は \bigcirc の辺の本数を表すとす.

$$N^{\#(\bigcirc)} - N^{\#(\bigcirc)} - N^{\#(\bigcirc)} - \dots$$

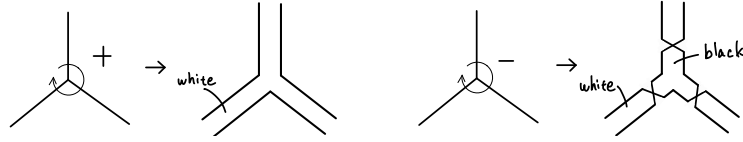
これらをまとめると,

$$W_{gl(N)}(G) = \sum_{M:G \text{ の marking}} \text{sign}(M) N^{b(T_M)} \quad (1)$$

ただし G の marking M や T_M は以下で定める.

- G の各頂点に符号 $+$ または $-$ を割り当てたものを G の marking と呼び, G の marking M の全ての頂点の符号の積を $\text{sign}(M)$ と表す.
- M から得られる境界付き向きづけ可能な平面 T_M を以下で定める.

- M で + の頂点および - の頂点にそれぞれ下図のように向き付け可能な平面片を割り当てる. ここで辺が反時計回り並んでいるように見える側から頂点を見たとき, + の頂点は表面を white で裏面を black, - の頂点は表面を black で裏面を white と名付ける.



- 平面片を辺の対応に従って繋げた境界付き向きづけ可能な平面が T_M である. ただし各平面片を繋ぐとき, white 面と white 面, black 面と black 面が繋がるようにする.

- T_M の境界の要素数を $b(T_M)$ と表す.

G の marking M に対して, T_M の全ての境界を 2 次元円盤で埋めた向きづけ可能な平面を S_M と表す. χ をオイラー数, g を種数とすると,

$$2 - 2g(S_M) = \chi(S_M) = \chi(T_M) + b(T_M) = \chi(G) + b(T_M)$$

が成り立つ. G は 3-正則であったので, $\chi(G) = v - e = v - \frac{3}{2}v = -\frac{v}{2}$ となる. よって

$$b(T_M) = -\chi(G) + 2 - 2g(S_M) = \frac{v}{2} + 2 - g(S_M)$$

を得る. この式と式 (1) から補題 1 が証明できる. さらに S_M が球面となるような marking M を spherical と呼ぶことにすると, 以下の式が得られる.

$$W_{sl(N)}^{top}(G) = W_{gl(N)}^{top}(G) = \sum_{G \text{ の spherical marking } M} \text{sign}(M)$$

よって定理 2 を示すには, G が 2-辺連結ならば \sum_G の spherical marking M $\text{sign}(M)$ の絶対値が G の球面への埋め込みの数になっていて, 2-辺連結でなければ \sum_G の spherical marking M $\text{sign}(M) = 0$ となることを示せば良い. このうち前半は, 2-辺連結グラフ G の spherical marking と G の球面への埋め込みが 1 対 1 対応すること, G の 2 つの spherical marking M, M' に対して $\text{sign}(M)$ と $\text{sign}(M')$ が打ち消し合わないことを示せば良い.

定理 2 の証明.

まずは 2-辺連結な G に対して, spherical marking と G の球面への埋め込みが 1 対 1 対応することを示す. 写像

$$\Theta : \{G \text{ の spherical marking } M\} \rightarrow \{G \text{ の球面への埋め込み}\}$$

を G の S_M への自然な埋め込みとして定義できる. また G の球面への埋め込みに対して, 球面の片側から見て頂点の向きが時計回りか反時計回りかを見ることにより頂点に + と - のどちらが割り当てられているかがわかり, spherical marking M を再現できるので, 写像 Θ は全単射である.

次に spherical marking M に対して $\text{sign}(M)$ が打ち消し合わないことを示す. これは, Whitney の定理から 2-辺連結な G に対して, G の球面への埋め込みは下図のような flip で移り合うことから言える. 逆に 2-辺連結でない G に対しては, spherical marking M が存在したとしても $\text{sign}(M)$ と $\text{sign}(M')$ が打ち消し合うような spherical marking M' が存在するので \sum_G の spherical marking M $\text{sign}(M) = 0$ となる. \square

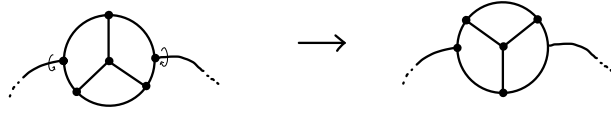
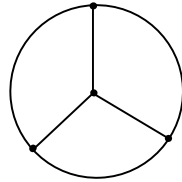


図7 flip

4 $W_{sl(N)}$ の計算結果

ここからは様々なグラフに対して $W_{sl(N)}(G)$ をコンピュータを用いて計算した結果を紹介する. なお $W_{sl(N)}(G)$ の計算は, 定理 2 の証明に用いた $W_{gl(N)}(G)$ を計算する方法, すなわち marking M に対して $b(T_M)$ を計算し, 全ての marking に対して $\text{sign}(M) \cdot N^{b(T_M)}$ を足し合わせる方法で求めた. またグラフの 1 つの頂点の向きを変えても $W_{sl(N)}(G)$ は -1 倍されるだけであるので, ウェイトシステムの -1 倍の違いは無視してグラフの頂点の向きは考えないものとする.

まずは以下のグラフのウェイトシステムについて考察する. このグラフを G_{benz} と呼ぶことにする. G_{benz}



は平面的なので, $W_{sl(N)}^{\text{top}}(G_{\text{benz}}) \neq 0$ となるはずである. G_{benz} の頂点数は 4 なので, $W_{sl(N)}^{\text{top}}(G_{\text{benz}})$ は $W_{sl(N)}(G_{\text{benz}})$ の $\frac{4}{2} + 2 = 4$ 次の係数である.

実際に計算すると $W_{sl(N)}(G_{\text{benz}}) = 2N^4 - 2N^2$ となるので, $W_{sl(N)}^{\text{top}}(G) = 2 \neq 0$ となることがわかる.

次に非平面的グラフのウェイトシステムを考察する. ワグナーの定理より, グラフ $K_{3,3}$ と K_5 は非平面的グラフの中で, マイナーに関して極小なグラフとすることができるのでまずは $K_{3,3}$ と K_5 のウェイトシステムについて考察する.

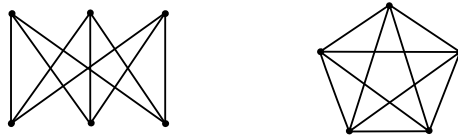


図8 $K_{3,3}$ 及び K_5

$K_{3,3}$ は非平面的グラフなので, $W_{sl(N)}^{\text{top}}(K_{3,3}) = 0$ となるはずである. $K_{3,3}$ の頂点数は 6 なので, $W_{sl(N)}^{\text{top}}(K_{3,3})$ は $W_{sl(N)}(K_{3,3})$ の $\frac{6}{2} + 2 = 5$ 次の係数である. 実際に計算すると $W_{sl(N)}(K_{3,3}) = 0$ となり, 5 次の係数だけでなく全ての係数が 0 になることが分かる.

そこで, 他の非平面的グラフ G に対しても $W_{sl(N)}(G)$ の全ての係数が 0, すなわち $W_{sl(N)}(G) = 0$ となるかどうかについて考えていく. 他の非平面的グラフとして, $K_{3,3}$ に辺と辺を繋ぐ橋をかけたグラフを考える. このとき橋の掛け方は, 1 つの辺にかける, 1 つの頂点に接続する 2 つの辺にかける, 同じ辺に接続しない 2 つの辺にかける, の 3 通りあり, それぞれ $K_{3,3}$ - bridge1, $K_{3,3}$ - bridge2, $K_{3,3}$ - bridge3 と呼ぶことにする. これら 3 つのグラフは以下のようにかける.

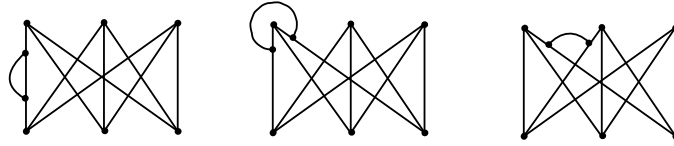


図9 $K_{3,3}$ - bridge1, $K_{3,3}$ - bridge2, $K_{3,3}$ - bridge3

ワグナーの定理からこれらは非平面的でありことが言える。これらのウェイトシステムを計算すると、

$$\begin{aligned} W_{sl(N)}(K_{3,3} - \text{bridge1}) &= 0 \\ W_{sl(N)}(K_{3,3} - \text{bridge2}) &= 0 \\ W_{sl(N)}(K_{3,3} - \text{bridge3}) &= 24N^4 - 24N^2 \end{aligned}$$

となる。 $K_{3,3} - \text{bridge3}$ のウェイトシステムに注目すると $W_{sl(N)}(K_{3,3} - \text{bridge3})$ の6次の係数が0すなわち $W_{sl(N)}^{\text{top}}(K_{3,3} - \text{bridge3}) = 0$ になっているが、 $W_{sl(N)}(K_{3,3} - \text{bridge3}) \neq 0$ すなわち全ての項が0になる訳ではないことが分かった。次に $K_{3,3} - \text{bridge1}$ と $K_{3,3} - \text{bridge2}$ を組み合わせたグラフを $K_{3,3} - \text{bridge12}$, $K_{3,3} - \text{bridge2}$ と $K_{3,3} - \text{bridge3}$ を組み合わせたグラフを $K_{3,3} - \text{bridge23}$, $K_{3,3} - \text{bridge1}$ と $K_{3,3} - \text{bridge3}$ を組み合わせたグラフを $K_{3,3} - \text{bridge13}$ と呼ぶことにする。

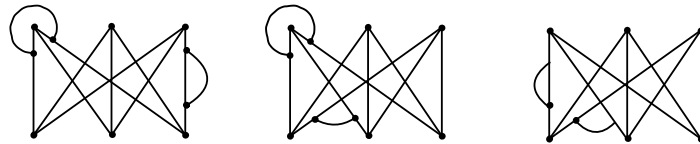


図10 $K_{3,3} - \text{bridge12}$, $K_{3,3} - \text{bridge23}$, $K_{3,3} - \text{bridge13}$

これらも非平面的グラフである。これらのウェイトシステムを計算すると、

$$\begin{aligned} W_{sl(N)}(K_{3,3} - \text{bridge12}) &= 0 \\ W_{sl(N)}(K_{3,3} - \text{bridge23}) &= 24N^5 - 24N^3 \\ W_{sl(N)}(K_{3,3} - \text{bridge13}) &= 48N^5 - 48N^3 \end{aligned}$$

となる。

最後の K_5 のウェイトシステムについて考える。 K_5 は3-正則グラフではないので、そのままウェイトシステムを計算することはできない。よって、縮約をすると K_5 になる3-正則グラフのウェイトシステムを考える。以下の2つのグラフは共に5回縮約をすると K_5 になる3-正則グラフである。これら2つのグラフをそれぞれ $K_5 - \text{vertical}$, $K_5 - \text{horizontal}$ と呼ぶことにする。

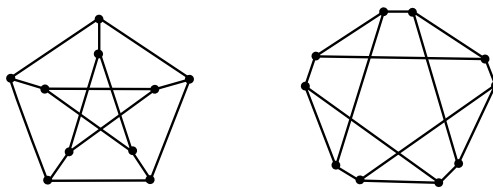


図11 $K_5 - \text{vertical}$ 及び $K_5 - \text{horizontal}$

これらのウェイトシステムを計算すると,

$$\begin{aligned}W_{sl(N)}(K_5 - \text{vertical}) &= 0 \\W_{sl(N)}(K_5 - \text{horizontal}) &= 32N^5 - 32N^3\end{aligned}$$

となり, こちらも $K_{3,3}$ をマイナーに持つグラフのウェイトシステムと同様に全体が 0 になるものとそうでないものが出てきた.

参考文献

- [1] D.Bar-Natan, *Lie Algebras and the Four Color Theorem*, *Combinatorica*, **17** (1997) 43–52.
- [2] K.Wagner, *Über eine Eigenschaft der ebenen Komplexe*, *Math. Ann.*, **114** (1937) 570–590
- [3] J.A.Bondy, U.S.R.Murty, *グラフ理論への入門* (立花俊一・奈良知恵・田澤新成訳) 共立出版株式会社 (1991).
- [4] R.J. ウィルソン, *グラフ理論入門 原著第 4 版* (西関隆夫・西関裕子訳) 近代科学社 (2001).