

相空間のコンパクト化に基づく空間 1 次元退化放物型方程式における非負の進行波解の分類

明治大学大学院理工学研究科数学専攻
市田 優 (Yu ICHIDA)

概要

本レポートでは、相空間のコンパクト化や力学系理論により、多くのモデルを由来とする空間 1 次元退化放物型方程式におけるすべての非負の進行波解を分類し、それぞれの解の存在、形状に関する情報や漸近挙動について得られた結果を報告する。この問題は、我々の先行研究 [7, 8] でも考えられている。しかし、そこでは解析手法の都合から方程式に含まれるあるパラメータに自然数という仮定を課していた。そこで本研究ではその仮定を外すためにある変換を導入して得られる別の空間 1 次元退化放物型方程式を考え、得られる結果に対して変換を辿ることで元の問題に還元している。このレポートでは、その詳細と手法を説明しどのようなアイデアで先行研究で残された課題を克服するかという点について報告する。

1 はじめに

1.1 研究の背景：空間 1 次元退化放物型方程式

化学反応や惑星の運動のように、時間とともに変化する現象は数理学の様々なところに現れる。これらを数学の立場から考える上で力学系理論は大変有用である。講演者は特に微分方程式の定性理論を扱う連続力学系を軸にして、現象由来の微分方程式の解の特徴や性質を調べることに興味を持っている。

ここでは、退化性（簡単に言えば最高階の消滅）に由来する特異性を持つような方程式として、次のような空間 1 次元退化放物型方程式：

$$U_t = U^p(U_{xx} + \mu U) - \delta U, \quad t > 0, \quad x \in \mathbb{R} \quad (1.1)$$

を考える。ただし、 $1 < p \in \mathbb{R}$, $\mu > 0$, $\delta = 0$ or 1 とする。 $\delta = 0$ におけるこの方程式 (1.1) は多くの現象を背景に持つ方程式である。[3, 7, 8, 13] によると、例えば、燃焼熱、天文学での太陽フレア、平面曲線の時間発展問題、2つの壁の間に閉じ込められたプラズマ内の力の働かない磁場の抵抗の拡散のモデルなどが挙げられる。さらに、数学的には $\delta = 0$ でのこの方程式の爆発解に関する多くの研究がなされており、特にどのように爆発するかという問いの答えにあたる爆発レートの導出に現在も興味を持たれている（例えば、[3, 13] 参照）。

Poon [13] は x を $x \in (-L, L)$ に制限し、 $p \geq 2$ として、Dirichlet 境界条件もしくは周期境界条件のいずれかのもとで $\delta = 0$ での (1.1) の爆発レートの下界と上界を与えている。特に、 $\delta = 1$ での (1.1) は $\delta = 0$ での (1.1) の解から変換することにより得られ、この方程式の進行波解は下界の導出

において重要な役割を果たす。

1.2 先行研究 [7, 8] のレビューと本研究の動機

[13] によって調べられた進行波解についてより詳細に調べる（つまり進行波解の分類を試みる）ことによって、より精密で洗練された (1.1) の爆発レートの導出への貢献、さらには (1.1) にどのような進行波解が存在し、そしてどのような性質を持つのかという数学的な興味から、[7, 8] では $1 < p \in \mathbb{N}$ に制限し、 $\mu = 1$ として (1.1) の $\delta = 0$ と $\delta = 1$ の両方における進行波解の分類を与えている。より詳細に言えば、[7] は、力学系理論とポアンカレ・コンパクト化（次節で紹介）と特異点膨らまし (blow-up, 詳細は例えば [1, 6] を参照せよ) と呼ばれるベクトル場の特異点解消に関する幾何学的手法を応用することにより、(弱い意味も含めた) 進行波解の分類 (p が偶数の場合にのみ存在, 形状, 漸近挙動) に関する結果を示した。ここで進行波解の分類というのは、これらの手法を用いることで、進行波座標を導入して得られる 2 次元常微分方程式系の無限遠方を含めたすべてのダイナミクスを明らかにしているという事実に基づいている。つまり、進行波解の分類をこの ODE 系の接続軌道の分類の問題に帰着させている。加えて、[8] では Lambert W 関数の性質などを用いることにより、[7] で得られた漸近挙動のより精密なものを導出している。

[7, 8] では、次のような問題が主な課題として残されている。

- [7] では、 p が奇数のときに、進行波座標から導かれる ODE 系の特異点の近傍でのダイナミクスを決定することができない問題に直面する。より詳細に言えば、この考察のもとで 2 次元 ODE 系の非双曲型平衡点に対して特異点膨らましを行うことで特異性を解消したとしても、再度の特異点膨らまし変換が適用できないような新たな特異点が発生する問題に直面する。したがって、この場合における接続軌道の存在を完全に示すことができないため、進行波解に対応する接続軌道の存在を仮定することで結論を与えた。
- そもそも一般的な $p \in \mathbb{R}$ での議論がなされていない点。これは、特異点膨らましを用いる上で、その古典的な結果 ([1, 4, 6]) から $p \in \mathbb{N}$ を仮定する必要があるためである。これらの結果を拡張し、一般の場合でも適用可能なものにするには現状では困難であると認識している。もし $p \in \mathbb{N}$ を仮定することなく接続軌道の存在が $p \in \mathbb{R}$ のときに示されれば、この問題は解決される。

1.3 問題設定

上記で述べた課題を克服するために、(1.1) を扱うのではなく、 $1 < p \in \mathbb{R}$ として変換 $u = U^p$ を施し、 $\gamma = (p-1)/p$, $k = \mu p$ とおくことで得られる

$$u_t = uu_{xx} - \gamma(u_x)^2 + ku^2 - \delta pu, \quad t > 0, \quad x \in \mathbb{R} \quad (1.2)$$

を扱う。ただし、 $0 < \gamma < 1$, $k > 0$, $1 < p \in \mathbb{R}$, $\delta = 0$ or 1 である。以下、(1.2) の非負値な進行波解に制限して考える。

この変換を導入することで、(1.1) では p が次数に現れていたのに対して、(1.2) では p が係数（例えば、 γ に含まれている）に現れるように変換されていることを強調しておく。この変換の導入こそ

が以下の解析において、 $p \in \mathbb{N}$ であることを要求することなく一般の $1 < p \in \mathbb{R}$ で非負進行波解の分類を与えることのできる重要な鍵である。この変換は [2] でも使われていることを指摘するが、進行波解の分類という意味で採用しているわけではないということを強調しておく。

さて、問題設定をまとめると、[7, 8] で解析手法の仮定から要請されていた $1 < p \in \mathbb{N}$ という仮定を外すために、(1.1) をそのまま調べるのではなく、[2] でも採用されていた上記の変換から導出される (1.2) の非負の進行波解の構造を $1 < p \in \mathbb{N}$ という仮定をすることなく調べる。そして得られる結果から、この変換を辿る（すなわち、 $U = u^{1/p}$ ）ことで $1 < p \in \mathbb{R}$ での (1.1) の非負の進行波解を分類できるかという問題を考える。

そこで、次のような進行波座標を導入する：

$$\phi(\xi) = u(t, x), \quad \xi = x - ct, \quad 0 < c \in \mathbb{R}.$$

ここで、非負の進行波解を考えているので $\phi \geq 0$ を考えていることに注意せよ。すると、(1.2) から $\phi(\xi)$ の満たす方程式は

$$\phi\phi'' = -c\phi' + \gamma(\phi')^2 - k\phi^2 + \delta p\phi, \quad \left(' = \frac{d}{d\xi}, \quad '' = \frac{d^2}{d\xi^2} \right)$$

であり、同値な方程式として次を得る：

$$\begin{cases} \phi' = \psi, \\ \psi' = -c\phi^{-1}\psi + \gamma\phi^{-1}\psi^2 - k\phi + \delta p, \end{cases} \quad \left(' = \frac{d}{d\xi} \right). \quad (1.3)$$

(1.3) は ϕ^{-1} を持つので、 $\phi = 0$ で特異性を持つことがわかり、この ODE 系のダイナミクスを調べることは容易ではない。しかしながら、[7, 11, 12] に示すように、ポアンカレ・コンパクト化（次節で簡単に紹介）や古典的な力学系理論を組み合わせた枠組みで (1.3) の無限遠方までのダイナミクスを調べることができる。ここで、[7] の場合とは異なり、この枠組みでは特異点膨らましが含まれていないことに注意せよ。

本研究 ([9]) の大まかな概要と展開を述べる。

- (I) 上記で述べた手法を用いることで、まず、(1.3) で生成される無限遠方を含めた相空間 $\mathbb{R}^2 \cup \{(\phi, \psi) \mid \|(\phi, \psi)\| = \infty\}$ （以下、ポアンカレ・ディスク）上の $\phi \geq 0$ でのすべてのダイナミクスを $1 < p \in \mathbb{N}$ を仮定することなく調べる。
- (II) 次に、この結果から、ポアンカレ・ディスク上でのそれぞれの軌道に対応する (1.2) の非負の進行波解を分類することができる。すなわち、それぞれの進行波解の存在が明らかになり、それぞれの形状に関する情報や漸近挙動を得ることができる。
- (III) 最後に、 $u = U^p$ の変換を辿ることにより、[7, 8] で得られた (1.1) の非負の進行波解の分類を $1 < p \in \mathbb{R}$ の場合に拡張することができる。

紙面の都合から、主結果の詳細を報告することはできないが、結論から述べると上記のようなステップ (I) から (III) により [7, 8] で得られた (1.1) の非負の進行波解の分類を (1.2) を経由し、そこで得られた結果を還元することで $1 < p \in \mathbb{R}$ の場合に拡張することができた（詳細は [9]）。

本レポートの残りに構成は次の通りである。次節では、本研究の中心的な役割を果たすポアンカ

レ・コンパクト化についてその概略を説明する。そして、3章では、この手法を使うことでどのようなことが得られるかを簡単に述べ、得られる主結果の一部を紹介する。詳細は講演時に述べる。

2 ポアンカレ・コンパクト化

本節では一般的な形式で述べる。そこで次の常微分方程式：

$$\begin{cases} \dot{\phi} = P(\phi, \psi) \\ \dot{\psi} = Q(\phi, \psi) \end{cases}$$

を考える。ここで、 $\dot{}$ は d/dt とし、 P と Q は変数 ϕ と ψ による任意の次数の多項式である。

まず、 \mathbb{R}^3 内の \mathbb{R}^2 上の平面 $y = (y_1, y_2, y_3) = (\phi, \psi, 1)$ を考える。単位球面として

$$\mathbb{S}^2 = \{y \in \mathbb{R}^3 \mid y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 = 1\}$$

を定め、これを**ポアンカレ球面**と呼ぶ。この球面を次の3つの部分に分割する：

$$H_+ = \{y \in \mathbb{S}^2 \mid y_3 > 0\}, \quad H_- = \{y \in \mathbb{S}^2 \mid y_3 < 0\}, \quad \mathbb{S}^1 = \{y \in \mathbb{S}^2 \mid y_3 = 0\}.$$

そこで、平面 \mathbb{R}^2 から単位球面 (ポアンカレ球面) \mathbb{S}^2 への射影として、

$$f^+ : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{S}^2, \quad f^- : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{S}^2$$

を考える。ただし、

$$f^\pm(\phi, \psi) := \pm \left(\frac{\phi}{\Delta(\phi, \psi)}, \frac{\psi}{\Delta(\phi, \psi)}, \frac{1}{\Delta(\phi, \psi)} \right)$$

とし、 $\Delta(\phi, \psi) := \sqrt{\phi^2 + \psi^2 + 1}$ と定義する。

次に、 \mathbb{S}^2 上の6つの局所座標系 (local charts) として

$$U_k = \{y \in \mathbb{S}^2 \mid y_k > 0\}, \quad V_k = \{y \in \mathbb{S}^2 \mid y_k < 0\}$$

を定め、 $k = 1, 2, 3$ とする。また、局所的な射影 (local projection) を

$$g_k^+ : U_k \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad g_k^- : V_k \rightarrow \mathbb{R}^2$$

とおき、 $m < n$, $m, n \neq k$ について

$$g_k^+(y_1, y_2, y_3) = -g_k^-(y_1, y_2, y_3) = \left(\frac{y_m}{y_k}, \frac{y_n}{y_k} \right)$$

と定める。局所座標 U_k と V_k からそれぞれ射影された平面上のベクトル場として $\bar{U}_k = \{y \in \mathbb{R}^3 \mid y_k = 1\}$ と $\bar{V}_k = \{y \in \mathbb{R}^3 \mid y_k = -1\}$ が得られる。そこで、任意の k に対して $g_k^\pm(y)$ の値として (x, λ) と表すとする。

例えば、 $k = 2$ として局所座標 \bar{U}_2 平面への座標変換の式は

$$(x, \lambda) := (g_2^+ \circ f^+)(\phi, \psi) = \left(\frac{\phi}{\psi}, \frac{1}{\psi} \right)$$

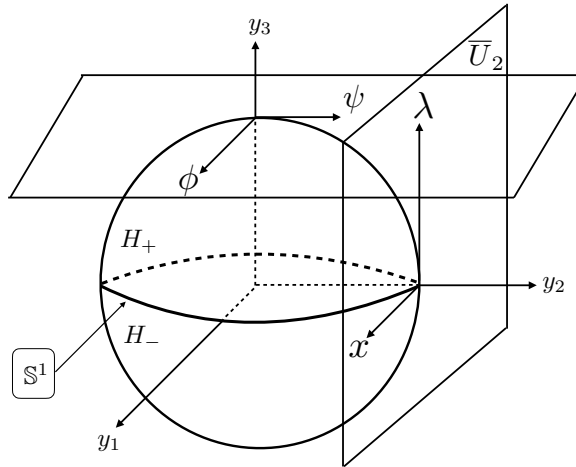


図 2.1 ポアンカレ球面と \overline{U}_2 平面の位置関係

となる。従って、座標変換 $\phi = x/\lambda$ と $\psi = 1/\lambda$ により、局所座標 \overline{U}_2 上のダイナミクスを得る。ポアンカレ球面や ϕ 平面と \overline{U}_2 平面の位置関係については次の図の通りである。

以下、ポアンカレ・コンパクト化は上記の記号を用いる。また、 $H_+ \cup S^2$ 上（もしくはそれを上からみた $\mathbb{R}^2 \cup \{(\phi, \psi) \mid \|(\phi, \psi)\| = \infty\}$ 上）のダイナミクスを考察することが重要であり、これを**ポアンカレ・ディスク (Poincaré disk)** と呼ぶ。ポアンカレ・コンパクト化、及び擬ポアンカレコンパクト化の詳細はそれぞれ [6], [11] を参照されたし。

3 Dynamics on the Poincaré disk of (1.3)

本節ではまず、(1.3) で生成される無限遠方を含めた相空間（ポアンカレ・ディスク）上の $\phi \geq 0$ でのすべてのダイナミクスを調べる。[7, 8] での解析のアイデアと基本的には同じであるが、後に登場する平衡点もしくは無限遠方での平衡点に対して特異点膨らましを適用することなく、その周りのダイナミクスを調べることができる点で異なることに注意せよ。すなわち、以下の議論は $1 < p \in \mathbb{N}$ という仮定を課すことなく、 $1 < p \in \mathbb{R}$ で議論されていることに注意せよ。

3.1 Dynamics near finite equilibria

まず、(1.3) の有限平衡点の周りでのダイナミクスを調べる。 $\delta = 1$ の場合は、 $\phi > 0$ である範囲において $E_1 : (\phi, \psi) = (\mu^{-1}, 0)$ という平衡点が存在する。この平衡点 E_1 でのヤコビ行列は

$$E_1 : \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -k & -c\mu \end{pmatrix}$$

であり、 $c > 0$ のときに漸近安定であることがわかる。さらに、この周りでのダイナミクスはこのヤコビ行列の固有値に由来する $D = \mu^2 c^2 - 4k$ の符号によって異なる。

次に、(1.3) の特異性 $\phi = 0$ に対して、次のようなスケール変換により特異性を解消する：

$$ds/d\xi = \phi^{-1}.$$

今、非負の解（すなわち、 $\phi \geq 0$ ）を考えているので、この時間変数の変換は時間の進む方向（軌道
の方向）を保つ。この変換に関する数学的な注意などは [10] を参照されたし。すると、次を得る：

$$\begin{cases} \phi' = \phi\psi, \\ \psi' = -c\psi + \gamma\psi^2 - k\phi^2 + \delta p\phi, \end{cases} \quad \left(' = \frac{d}{ds} \right). \quad (3.1)$$

平衡点やその安定性について、以下に述べるように $\delta = 0$ と $\delta = 1$ で異なることに注意せよ。

- $\delta = 0$ の場合、(3.1) は次のような平衡点を持つ：

$$E_0 : (\phi, \psi) = (0, 0), \quad E_2 : (\phi, \psi) = (0, c\gamma^{-1}), \quad 0 < \gamma < 1.$$

これらの平衡点でのヤコビ行列は

$$E_0 : \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -c \end{pmatrix}, \quad E_2 : \begin{pmatrix} c\gamma^{-1} & 0 \\ 0 & c \end{pmatrix}$$

である。 E_2 は source である。一方、 E_0 の周りでのダイナミクスは中心多様体定理（例えば、
[5] を参照）により調べることができる。実際、中心多様体の近似は

$$\{(\phi, \psi) \mid \psi(s) = -kc^{-1}\phi^2 + O(\phi^4)\}$$

によって与えられ、その上でのダイナミクスは次のような方程式のダイナミクスと位相同値で
ある：

$$\phi'(s) = -kc^{-1}\phi^3 + O(\phi^5).$$

- $\delta = 1$ の場合、(3.1) は次のような平衡点を持つ：

$$E_0 : (\phi, \psi) = (0, 0), \quad E_1 : (\phi, \psi) = (\mu^{-1}, 0), \quad E_2 : (\phi, \psi) = (0, c\gamma^{-1}), \quad 0 < \gamma < 1.$$

E_1 については上記で述べた通りである。 E_0 と E_2 におけるヤコビ行列は次である：

$$E_0 : \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ p & -c \end{pmatrix}, \quad E_2 : \begin{pmatrix} c\gamma^{-1} & 0 \\ p & c \end{pmatrix}.$$

E_2 は $\delta = 0$ の場合と同様に source であるが、この周りでのダイナミクスは $\delta = 0$ の場合と
異なることに注意せよ。一方、 E_0 の周りのダイナミクスは $\delta = 0$ の場合と異なり、この行列
を標準形に変換後、中心多様体定理を適用することにより調べられる。実際、中心多様体の近
似は

$$\left\{ (\phi, \psi) \mid \psi(s) = \frac{p}{c}\phi - \frac{p}{c^3}(\mu c^2 + 1)\phi^2 + O(\phi^3) \right\}$$

によって与えられ、その上でのダイナミクスは次の方程式のダイナミクスと位相同値である：

$$\phi'(s) = \frac{p}{c}\phi^2 - \frac{p}{c^3}(\mu c^2 + 1)\phi^3 + O(\phi^4).$$

ここまでの議論は $p \in 2\mathbb{N}$, $\mu = 1$ とすることで [7] と同じである。本研究では $u = U^p$ という変換
を導入し、 p が次数に出現しないように工夫した。そして非負の解に制限して (3.1) の変換を導入し
たことにより、[7] で p が奇数に場合に生じた特異点膨らましが起きないことがわかった。これによ
り、 $1 < p \in \mathbb{N}$ という仮定を課すことなく $1 < p \in \mathbb{R}$ で議論することができている。

3.2 Dynamics on the local charts

次に、(3.1)の無限遠方までのダイナミクスを調べるために、2章で紹介したポアンカレ・コンパクト化を適用する。 $\phi \geq 0$ を考えているので、局所座標 \bar{U}_j ($j = 1, 2$)と \bar{V}_2 上のダイナミクスを考えれば十分である。

まずは、局所座標 \bar{U}_2 上でのダイナミクスを調べるために、次のような変換によって座標 (λ, x) を導入する：

$$\phi(s) = x(s)/\lambda(s), \quad \psi(s) = 1/\lambda(s).$$

すると、

$$\begin{cases} \lambda' = c\lambda - \gamma + kx^2 - \delta p\lambda x, \\ x' = p^{-1}\lambda^{-1}x + cx + k\lambda^{-1}x^3 - \delta px^2 \end{cases}$$

となる。ここで、時間スケール変換として $d\tau/ds = \lambda^{-1}$ を導入することにより、

$$\begin{cases} \lambda_\tau = c\lambda^2 - \gamma\lambda + k\lambda x^2 - \delta p\lambda^2 x, \\ x_\tau = p^{-1}x + c\lambda x + kx^3 - \delta p\lambda x^2 \end{cases} \quad (3.2)$$

を得る。ただし、 $\lambda_\tau = d\lambda/d\tau$ と $x_\tau = dx/d\tau$ である。(3.2)は平衡点 $E_3 : (\lambda, x) = (0, 0)$ を持つ。[7]では、対応する無限遠方の平衡点でのヤコビ行列の固有値がすべてゼロとなり、この特異性を解消するために特異点膨らまし変換を導入して調べていた。しかし、[7]と異なり、この無限遠方での平衡点はこのようなことにはならず、saddleであることが結論づけられる。つまり、 $p \in \mathbb{N}$ という仮定を課す必要がないことがわかる。

局所座標 \bar{V}_2 と \bar{U}_1 上のダイナミクスは上述と同様にして調べることができる。

3.3 Dynamics and connecting orbits on the Poincaré disk

以上の局所座標 \bar{U}_j ($j = 1, 2$)と \bar{V}_2 上でのダイナミクスを組み合わせることにより、ポアンカレ・ディスク上での(1.3)のダイナミクスを得ることができる。さらに、ディスク内の各接続軌道に着目することによって、対応する(1.2)の進行波解の存在、形状、漸近挙動を分類することができる(図3.1を参照せよ)。

これをみると、 $\delta = 0$ の場合は $\phi \geq 0$ の範囲では、平衡点 E_0 と E_2 を結ぶ軌道の族しかないことがわかる。言い換えれば、 $\delta = 0$ における(1.2)の非負の進行波解はこれらの軌道に対応するタイプのものであると結論づけることができる。それはつまり、対応する(1.1)の進行波解も $\delta = 0$ の場合はこのタイプに対応するものしかないということを主張することができることに注意せよ。

Remark 1. 図3.1で、 $\delta = 0$ と $\delta = 1$ において平衡点 $E_0 : (\phi, \psi) = (0, 0)$ の取り扱いについて注意する必要がある。これは[7]のRemark 1と同じであるが再度述べる。ディスク上でパラメータ s を考えると、点 E_0 は(3.1)の平衡点である。しかしながら、 E_0 はパラメータ ξ について特異性を持つ直線 $\{\phi = 0\}$ 上の点である。特異性 $\{\phi = 0\}$ を除いて、(1.3)と(3.1)によって定義されるベクトル場上で $d\phi/d\psi$ が同じ値をとることがわかる。もしパラメータ s について軌道が平衡点 E_0 から

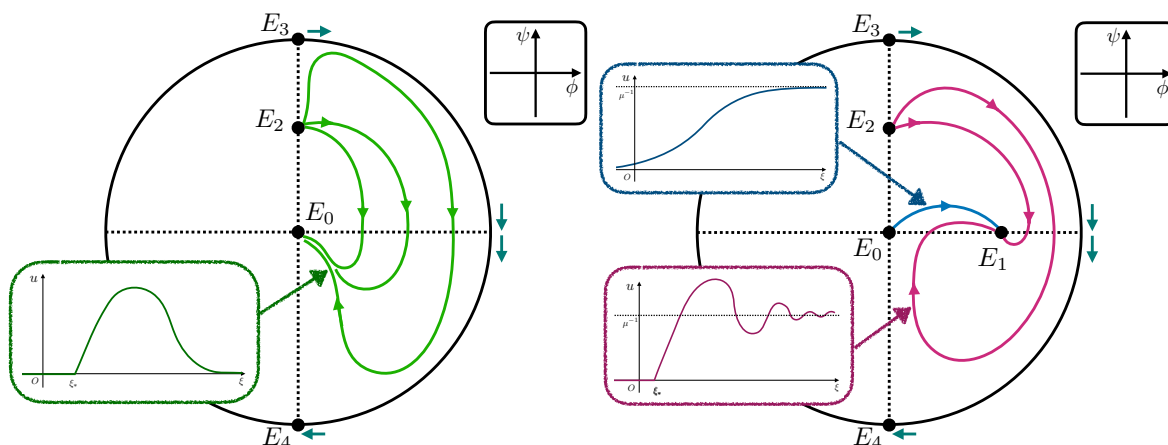


図 3.1 ポアンカレ・ディスク上の接続軌道と対応する (1.2) の進行波解の形状の概略図 (左図が $\delta = 0$, 右図が $\delta = 1$). $u(\xi) \rightarrow 0$, $u_\xi \rightarrow C$ ($\xi \searrow \xi_* + 0$) となるような点 ξ_* の位置は便宜的. 図中の円周上は $\{(\phi, \psi) \mid \|(\phi, \psi)\| = \infty\}$ に相当することに注意せよ.

出発する (入ってくる) ならば, 軌道は ξ について平衡点 E_0 から出発する (入ってくる). これについては E_2 についても同様である.

ポアンカレ・ディスクにおける接続軌道の存在証明, 一般の $1 < p \in \mathbb{R}$ での各接続軌道に対応する (1.2) の非負の進行波解の分類 (存在, 形状, 漸近挙動の提示), $u = U^p$ の変換を辿ることで得られる (1.1) の非負の進行波解の分類に関する主結果 ([7, 8] の結果の一般化) の詳細は講演時に述べる.

謝辞

本研究は科研費 (課題番号: 21J20035) の助成を受けたものである.

参考文献

- [1] Álvarez, M.J., Ferragut, A., Jarque, X.: A survey on the blow up technique, *Int. J. Bifurc. Chaos*, **21**, 3108–3118 (2011).
- [2] Anada, K., Fukuda, I., Tsutsumi, M.: Regional blow-up and decay of solutions to the initial-boundary value problem for $u_t = uu_{xx} - \gamma(u_x)^2 + ku^2$, *Funkc. Ekvacioj, Ser. Int.*, **39**, No. 3, 367–387 (1996).
- [3] Anada, K., Ishiwata, T.: Blow-up rates of solutions of initial-boundary value problems for a quasi-linear parabolic equation, *J. Differential Equations*, **262**, 181–271 (2017).
- [4] Brunella, M., Miari, M.: Topological equivalence of a plane vector field with its principal part defined through Newton polyhedra, *J. Differential Equations*, **85**, 338–366 (1990).
- [5] Carr, J.: *Applications of Center Manifold Theory*, Springer, Berlin (1981).
- [6] Dumortier, F., Llibre, J., Artés, C.J.: *Qualitative Theory of Planar Differential Systems*, Springer (2006).

- [7] Ichida, Y., Sakamoto, T. O.: Traveling wave solutions for degenerate nonlinear parabolic equations, *J. Elliptic and Parabolic Equations*, **6**, 795–832 (2020).
- [8] Ichida, Y., Matsue, K., Sakamoto, T.O.: A refined asymptotic behavior of traveling wave solutions for degenerate nonlinear parabolic equations, *JSIAM Lett.*, **12**, 65–68 (2020).
- [9] Ichida, Y.: Classification of nonnegative traveling wave solutions for the 1D degenerate parabolic equations, submitted.
- [10] Kuehn, C.: *Multiple Time Scale Dynamics*, Springer (2015).
- [11] Matsue, K.: On blow-up solutions of differential equations with Poincaré type compactifications, *SIAM J. Appl. Dyn. Syst.*, **17**, 2249–2288 (2018).
- [12] Matsue, K.: Geometric treatments and a common mechanism in finite-time singularities for autonomous ODEs, *J. Differential Equations*, **267**, 7313–7368 (2019).
- [13] Poon, C.C.: Blowup rate of solutions of a degenerate nonlinear parabolic equation, *Discrete Contin. Dyn. System. Ser. B*, **24**, 5317–5336 (2019).