

Einstein 方程式の拘束条件に着目した数値計算法

早稲田大学大学院 基幹理工学研究科 数学応用数理専攻
星野秀朋 (Hidetomo HOSHINO)

概要

一般相対性理論の基礎方程式である Einstein 方程式は連立非線形偏微分方程式で、拘束条件付き時間発展方程式である。その拘束条件は first class constraint と呼ばれるもので、拘束条件のエラーが指数関数的に増大し、数値計算が容易に破綻してしまうことが知られている。そこで、本講演では Einstein 方程式の拘束条件の精度がどのくらいの精度で保たれているのかということに着目した数値計算法について紹介する。

1 導入

1.1 Einstein 方程式について

一般相対性理論の基礎方程式である Einstein 方程式は

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu}, \quad (\mu\nu = 0, 1, 2, 3) \quad (1.1)$$

である。ただし、ここで $g_{\mu\nu}$ は 4 次元計量、 $R_{\mu\nu}$ は Ricci テンソル、 R はスカラー曲率、 $T_{\mu\nu}$ は物質のエネルギー・運動量テンソルを表している。また、 c と G はそれぞれ光速と Newton の重力定数である。Einstein 方程式の左辺は時空の幾何学的な情報、右辺は物質分布の情報を表している。

ブラックホールの解析や重力波の放射など、宇宙における物理現象を予測、解明するには Einstein 方程式を解く必要性が生じる。Einstein 方程式の有名な厳密解としては Schwarzschild 解や Kerr 解などが挙げられる。しかしながら Einstein 方程式は計量 $g_{\mu\nu}$ についての 2 階の非線形偏微分方程式となっていて強い対称性などを課さない限りは解析的に解くことが難しい。そのため実際に物理シミュレーションを行う際には数値計算により Einstein 方程式の数値解を得る必要がある。

1.2 Einstein 方程式の 3+1 分解

一般相対性理論では時間と空間を等価的に扱っている。また、4 次元共変性を持つ (座標変換に対して不変な) 理論であるため、Einstein 方程式の中で時間座標や空間座標は明示されていない。そのため Einstein 方程式を数値的に解く際には時間座標をこちらで指定しなければならない。しかし、そこで選んだ時間座標が必ずしも物理的な時間を表している座標になっているかどうかは分からないので注意が必要である。4 次元時空を正確に空間 3 次元と時間 1 次元に分けることを 3+1 分解と呼ぶ。Einstein 方程式 (1.1) を 3+1 分解すると以下のように 4 本の方程式を得る (以下では Einstein の規約を用いる、つまり上下に出てくる添え字はシグマ記号を付けなくても和を取ることにする)。

時間発展方程式：

$$\frac{\partial \gamma_{ij}}{\partial t} = -2\alpha K_{ij} + D_i \beta_j + D_j \beta_i, \quad (1.2)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial K_{ij}}{\partial t} = & \alpha(R_{ij} - 2K_{ik}K_j^k + KK_{ij}) - D_i D_j \alpha \\ & - \frac{8\pi G}{c^4} \alpha \left(S_{ij} - \frac{1}{2} \gamma_{ij} (S - \rho) \right) + \beta^k D_k K_{ij} + K_{kj} D_i \beta^k + K_{ik} D_j \beta^k. \end{aligned} \quad (1.3)$$

拘束条件方程式：

$$\mathcal{H} \equiv R + K^2 - K_{ij}K^{ij} - \frac{16\pi G}{c^4} \rho \approx 0 \quad (\text{Hamiltonian constraint}), \quad (1.4)$$

$$\mathcal{M}_i \equiv D_j K_i^j - D_i K - \frac{8\pi G}{c^4} J_i \approx 0 \quad (\text{momentum constraint}). \quad (1.5)$$

これらの式に出てくる文字の詳細な説明は割愛するが、大雑把にいうと、 γ_{ij} (3次元計量)が Newton 力学での位置に対応し、 K_{ij} (3次元外的曲率)が Newton 力学での速度に対応する。さらに Hamiltonian constraint や momentum constraint はエネルギー保存則や運動量保存則に対応している(あくまでも対応している、と言っているだけで Newton 力学のように保存則から運動方程式、すなわち時間発展方程式を導くことができるというわけではない)。

1.3 拘束条件付き時間発展方程式としての Einstein 方程式

Einstein 方程式のように拘束条件が付いた時間発展方程式の例は他にもたくさんあるだろう。例としては Hamilton 系や Maxwell 方程式が挙げられる。しかしながら Einstein 方程式は上記の拘束条件付き時間発展方程式とは決定的に違う面がある。例えば Maxwell 方程式では時間発展方程式

$$\partial_t \mathbf{B} = -\text{rot } \mathbf{E}, \quad (1.6)$$

$$\partial_t \mathbf{E} = \frac{1}{\varepsilon_0 \mu_0} \text{rot } \mathbf{B} - \frac{\mathbf{j}}{\varepsilon_0}. \quad (1.7)$$

拘束条件方程式

$$C_1 \equiv \text{div } \mathbf{E} - \frac{\rho}{\varepsilon_0} = 0, \quad (1.8)$$

$$C_2 \equiv \text{div } \mathbf{B} = 0. \quad (1.9)$$

となっているが C_1, C_2 の時間微分は以下のようにちょうど 0 になる。

$$\begin{aligned} \partial_t C_1 &= \text{div}(\partial_t \mathbf{E}) - \frac{1}{\varepsilon_0} \partial_t \rho \\ &= -\frac{1}{\varepsilon_0} (\text{div } \mathbf{j} + \partial_t \rho) \\ &= 0 \quad (\because \text{連続の式から } \partial_t \rho + \text{div } \mathbf{j} = 0), \end{aligned} \quad (1.10)$$

$$\partial_t C_2 = \text{div}(\partial_t \mathbf{B}) = 0. \quad (1.11)$$

一方 Einstein 方程式の拘束条件方程式 (1.4), (1.5) において $\mathcal{H}, \mathcal{M}_i$ の時間微分を計算すると 0 にはならない。 $\mathcal{H}, \mathcal{M}_i$ の時間微分は $\mathcal{H}, \mathcal{M}_i$ およびそれらの空間微分の線形結合で表される。このような

拘束条件を first class constraint と呼ぶ。つまりある時刻において \mathcal{H} と M_i が 0 なら、その次の時刻でも \mathcal{H} と M_i は 0 である。この理由により Einstein 方程式の拘束条件方程式 (1.4), (1.5) において、"= 0"ではなく" ≈ 0 "としている。しかし実際の数値計算では誤差をきちんと 0 にするのは不可能なので \mathcal{H} や M_i のわずかな誤差により、誤差が指数関数的に増大し、数値計算が破綻しやすくなってしまふ。この点が Einstein 方程式の数値計算や離散スキームの構築、誤差の解析を困難にさせている。

2 拘束条件付き時間発展方程式の数値計算に用いる離散スキームの 2 つの評価基準

以下では常微分方程式を用いて説明するが偏微分方程式となっても同様である。

2.1 EOA(Evolution's Order of Accuracy)

常微分方程式

$$\frac{du(t)}{dt} = f(t, u) \quad (2.1)$$

を考える。このとき $u(t + \Delta t)$ と離散スキームにより求められる u_{n+1} について

$$\frac{u(t + \Delta t) - u_{n+1}}{\Delta t} = O(\Delta t^p) \quad (2.2)$$

と書けるとき、その離散スキームの EOA は p であるという。つまり EOA が高いほど数値解は正しい解に近いと言える。この観点からの離散スキームの評価は数値解析の教科書で通常扱われているものである。すなわち教科書で見かける p 次精度のスキームというのは、ここでは EOA が p であるということである。例えば Euler 法の EOA は 1, 古典的 Runge-Kutta 法の EOA は 4 である。

2.2 COA(Constraint's Order of Accuracy)

2.2.1 $\dot{C} = 0$ となる場合

$C = 0$ かつ $\dot{C} = 0$ となるような拘束条件が時間発展方程式に付随する場合は、離散スキームにより得られる C_{n+1} と C_n の差を考えて

$$\frac{C_{n+1} - C_n}{\Delta t} = O(\Delta t^q) \quad (2.3)$$

と書けるとき、その離散スキームの COA は q であるという。つまり COA が高いほど拘束条件は満たされていると言える。

2.2.2 $\dot{C} = a(t)C$ となる場合

$C = 0$ かつ $\dot{C} = a(t)C$ となるような拘束条件, つまり Einstein 方程式のように first class constraint を持つような方程式に対しては

$$\begin{aligned} \frac{C(t + \Delta t) - C(t)}{\Delta t} &= \frac{1}{\Delta t} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{C^{(k)}(t)}{k!} \Delta t^k - C(t) \right) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{C^{(k)}(t)}{k!} \Delta t^{k-1} \end{aligned} \quad (2.4)$$

となることを考慮する必要がある。 $\dot{C} = a(t)C$ であるから C の時間微分は何階微分であっても $A(t)C$ の形をしているので,

$$\frac{C_{n+1} - C_n}{\Delta t} - (C_n \text{が} \delta \text{入っている項}) = O(\Delta t^q) \quad (2.5)$$

となるときに COA が q であるという。

3 COA の例

COA がどのようなものなのか実感するためにの例として Einstein 方程式では煩雑になってしまうので, 単振動を取り上げることにする。単振動は時間発展方程式:

$$\begin{cases} \dot{u} = v, \\ \dot{v} = -u. \end{cases} \quad (3.1)$$

拘束条件方程式 (エネルギー保存則):

$$C = u^2 + v^2 - 1 = 0 \quad (3.2)$$

である。例えば Heun 法 (よく知られているように EOA は 2 である) を用いた場合, constraint の差分は

$$\frac{C_{n+1} - C_n}{\Delta t} = \frac{1}{4}(u_n^2 + v_n^2)\Delta t^3 + O(\Delta t^4) \quad (3.3)$$

となるので COA は 3 になっている。この例から分かるように EOA と COA は一般には一致しない。以下に単振動についていくつかのスキームでの EOA と COA を載せる

| | Euler | Heun | AB2 | AB3 | RK4 | GL1 |
|-----|-------|------|-----|-----|-----|----------|
| EOA | 1 | 2 | 2 | 3 | 4 | 2 |
| COA | 1 | 3 | 3 | 3 | 5 | ∞ |

表 1 各スキームの EOA および COA

- AB2・・・2 段 2 次の Adams–Bashforth 法

- AB3・・・3段3次の Adams-Bashforth 法
- RK4・・・古典的 Runge-Kutta 法
- GL1・・・1段2次の Gauss-Legendre 法 (陰的中点法)

GL1 で COA が ∞ となっているのは C の差分が完全に 0 になるという意味である。このような離散スキームは、連続 (微分方程式) で成り立っている性質を離散 (差分方程式) でも再現するという意味で構造保存型スキームなどと呼ばれる。Einstein 方程式に対する完全な構造保存型スキームは未だに構築されていない。

4 離散スキームにパラメータを入れて COA を向上させる

離散スキームに適切なパラメータを導入することにより、EOA はそのまま COA をさらに向上させることが出来る。例えば Einstein 方程式の数値計算でしばしば用いられている iterated Crank-Nicolson 法 (ICN) にパラメータを入れた geometric-averaging θ -iterated Crank-Nicolson 法 (GA θ -ICN) は θ_1, θ_2 をパラメータとして

$$\begin{cases} k_1 = f(t_n, u_n), \\ k_2 = f(t_n + \theta_1 \Delta t, u_n + k_1 \theta_1 \Delta t), \\ k_3 = f(t_n + 2\theta_1 \theta_2 \Delta t, u_n + 2k_2 \theta_1 \theta_2 \Delta t), \\ u_{n+1} = u_n + k_3 \Delta t \end{cases} \quad (4.1)$$

のようになっている。 $\theta_1 \theta_2 = 1/4$ のときに EOA が 2 となる。 ICN は $\theta_1 = \theta_2 = 1/2$ のときに EOA が 2 である。例えば、先程の単振動に EOA が 2 となるようにパラメータを導入した GA θ -ICN を適用すると、 C の差分は

$$\begin{aligned} \frac{C_{n+1} - C_n}{\Delta t} &= \frac{(-\theta_1^u + \theta_1^v) \Delta t^2 + \frac{1}{4}(v_n^2 - 4\theta_1^u v_n^2 + u_n^2 - 4\theta_1^v u_n^2) \Delta t^3}{\Delta t} \\ &\quad + \frac{1}{2}(\theta_1^u v_n u_n - \theta_1^v v_n u_n) \Delta t^4 + \frac{1}{4}((\theta_1^u)^2 v_n^2 + (\theta_1^v)^2 u_n^2) \Delta t^5 + O(\Delta t^6) \end{aligned} \quad (4.2)$$

となる。下線部分が 0 となるようにパラメータ θ_1^u, θ_1^v の値を決めると $\theta_1^u = \theta_1^v = 1/4$ となる。このとき COA は 5 になる (Δt^4 の項は意図して消したものではない)。それに対し、従来の手法である ICN では $\theta_1^u = \theta_1^v = 1/2$ なので COA は 3 となる。このようにして EOA は同じであっても、適切にパラメータを選ぶことによって COA を向上させることが出来る。以下に数値実験の結果を示す。

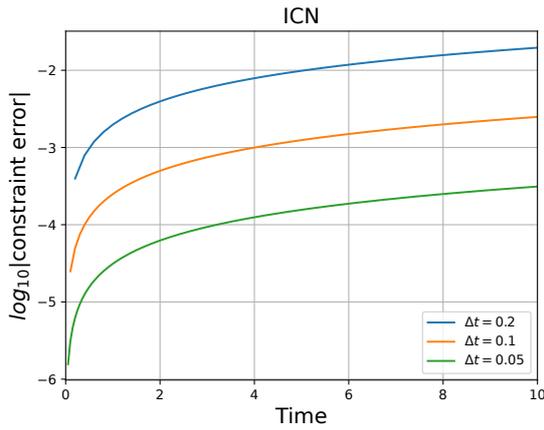


図1 ICN($\theta_1^u = \theta_1^v = 1/2$)での拘束条件のエラー

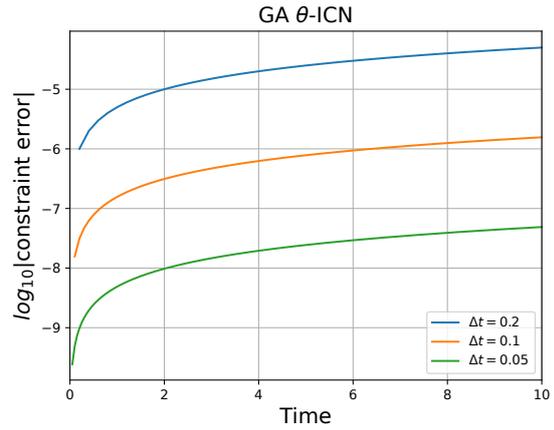


図2 GA θ -ICN($\theta_1^u = \theta_1^v = 1/4$)での拘束条件のエラー

図1では Δt を半分になるとエラーの常用対数が $3 \log_{10} 2 \simeq 0.9$ 程度下がっているので3次精度, 図2では $5 \log_{10} 2 \simeq 1.5$ 程度下がっているので5次精度であると確認できる.

ここでは簡単のため単振動の例を通してCOAを向上させることについて議論したが, Einstein方程式に対しても同様のことができる.

参考文献

- [1] H. Hoshino, K. Sato and G. Yoneda, Parametrized numerical scheme for the Einstein equations, *JSIAM Lett.*, **13** (2021), 13–16.
- [2] M. Shibata, Collapse of Rotating Supramassive Neutron Stars to Black Holes: Fully General Relativistic Simulations, *Astrophys. J.*, **595** (2003), 992–999.
- [3] B. P. Abbott *et al.* (LIGO Scientific Collaboration), Observation of Gravitational Waves from a Binary Black Hole Merger, *Phys. Rev. Lett.*, **116** (2016), 061102.
- [4] R. Arnowitt, S. Deser and C.W. Misner, Republication of: The dynamics of general relativity, *Gen. Relativ. Gravit.*, **40** (2008), 1997–2027.
- [5] S. A. Teukolsky, Stability of the iterated Crank–Nicholson method in numerical relativity, *Phys. Rev. D*, **61** (2000), 087501.
- [6] Q. Tran and J. Liu, arXiv:1608.01344, (2016).
- [7] T. Tsuchiya and G. Yoneda, Constructing of constraint preserving scheme for Einstein equations, *JSIAM Lett.*, **9** (2017), 57–60.