長距離型ポテンシャルをもつ非線形シュレディンガー方程式の解の時間大域挙動について

埼玉大学大学院 理工学研究科
浜野 大 (Masaru HAMANO)

概要

本講演では長距離型ポテンシャルをもつ非線形シュレディンガー方程式を考える．方程式の線形部分は解に対して分散的に働き, 非線形部分は解に対して吸引的に働く．そのため, 分散性と吸引性の強弱により様々な解の時間大域挙動が存在する．分散性が強いとき, 時間無限大で非線形効果が薄まり線形方程式の解に漸近する．吸引性が強いとき, 解はあるところに集中する．分散性と吸引性が釣り合うとき, 時間に関して位相の周期的な変動しかない解が生じる．本講演では, 時間大域挙動を決定づける初期値の条件を紹介する．

1　導入

本稿では逆冪乗型ポテンシャルをもつ以下の非線形シュレディンガー方程式を考える．

$$\begin{cases} i\partial_t u(t,x) + \partial_x^2 u(t,x) - \dfrac{\gamma}{|x|^\mu} u(t,x) = -|u(t,x)|^4 u(t,x), & (t,x) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}, \\ u(0,x) = u_0(x), & x \in \mathbb{R}. \end{cases} \tag{NLS$_\gamma$}$$

ここで, 虚数単位 $i = \sqrt{-1}$, 時間微分 $\partial_t = \frac{\partial}{\partial t}$, 空間微分 $\partial_x = \frac{\partial}{\partial x}$, $\gamma > 0$, $0 < \mu < 1$, 解 $u(t,x) : \mathbb{R}\times\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ は未知関数, 初期値 $u_0(x) : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ は既知関数である．

$0 < \mu \le 1$ のとき $\frac{\gamma}{|x|^\mu}$ は長距離型ポテンシャルと呼ばれ, $1 < \mu$ のとき $\frac{\gamma}{|x|^\mu}$ は短距離型ポテンシャルと呼ばれる．

1.1　準備

非負値 X, Y に対して, ある $C > 0$ が存在して $X \le CY$ が成り立つとき $X \lesssim Y$ と表現する．$X \lesssim Y \lesssim X$ が成り立つとき $X \sim Y$ と表現する．

定義 1.1 (ルベーグ空間)**.** $p \ge 1$ において, ルベーグ空間 $L^p(\mathbb{R})$ を

$$L^p(\mathbb{R}) := \{ f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C} : \|f\|_{L^p} < \infty \}$$

で定義する．ここで, ルベーグノルム $\|\cdot\|_{L^p}$ は次である．

$$\|f\|_{L^p} := \begin{cases} \left(\displaystyle\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}, & (1 \le p < \infty), \\ \displaystyle\operatorname*{ess\,sup}_{x\in\mathbb{R}} |f(x)|, & (p = \infty). \end{cases}$$

定義 1.2 (フーリエ変換・フーリエ逆変換)**.** フーリエ変換とフーリエ逆変換を次のように定義する.

$$
\begin{aligned}
(\text{フーリエ変換}) \quad \mathcal{F}f(\xi) &:= \int_{\mathbb{R}} e^{-2\pi i x\xi} f(x)dx, \\
(\text{フーリエ逆変換}) \quad \mathcal{F}^{-1}f(\xi) &:= \int_{\mathbb{R}} e^{2\pi i x\xi} f(x)dx.
\end{aligned}
$$

定義 1.3 (ソボレフ空間)**.** 非斉次ソボレフ空間 $W^{s,p}(\mathbb{R})$ と斉次ソボレフ空間 $\dot{W}^{s,p}(\mathbb{R})$ を次で定義する.

$$
\begin{aligned}
W^{s,p}(\mathbb{R}) &:= \left\{ f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C} : \|f\|_{W^{s,p}} < \infty \right\}, \\
\dot{W}^{s,p}(\mathbb{R}) &:= \left\{ f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C} : \|f\|_{\dot{W}^{s,p}} < \infty \right\}.
\end{aligned}
$$

ここで, 非斉次ソボレフノルム $\|\cdot\|_{W^{s,p}}$ と斉次ソボレフノルム $\|\cdot\|_{\dot{W}^{s,p}}$ はそれぞれ

$$
\begin{aligned}
\|f\|_{W^{s,p}} &:= \|(1-\Delta)^{\frac{s}{2}} f\|_{L^p} = \|\mathcal{F}^{-1}(1+4\pi^2|\cdot|^2)^{\frac{s}{2}}\mathcal{F}f\|_{L^p}, \\
\|f\|_{\dot{W}^{s,p}} &:= \|(-\Delta)^{\frac{s}{2}} f\|_{L^p} = \|\mathcal{F}^{-1}(2\pi|\cdot|)^{s}\mathcal{F}f\|_{L^p}.
\end{aligned}
$$

$p=2$ のとき $H^s(\mathbb{R}) := W^{s,2}(\mathbb{R})$, $\dot{H}^s(\mathbb{R}) := \dot{W}^{s,2}(\mathbb{R})$ と表すこととする.

注意 1.4. $1 < p < \infty$, $s = 1$ のとき, 次が成り立つ.

$$
\|f\|_{W^{1,p}} \sim \|f\|_{L^p} + \|\partial_x f\|_{L^p}.
$$

2 (NLS_γ) の時間局所適切と解の時間挙動

この後の都合のため (NLS_γ) のみでなく, より一般な非線形冪をもつ方程式 :

$$
i\partial_t u + \partial_x^2 u - \frac{\gamma}{|x|^\mu} u = -|u|^{p-1}u, \qquad (t,x) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R} \tag{NLS_γ^p}
$$

に関する性質を述べていく. $(\mathrm{NLS}_\gamma) = (\mathrm{NLS}_\gamma^5)$ であることに注意する.

時間に依存した非線形偏微分方程式の研究は大きく分けると 2 つに分けられる. 1 つ目は時間局所適切の有無である. (NLS_γ^p) が時間局所適切であるとは, 次の (1)〜(4) が成り立つことである.

(1) (解の一意性) (NLS_γ^p) の解は一意である.

(2) (解の存在性) 任意の $u_0 \in H^1(\mathbb{R})$ に対して, 時間区間 $(T_{\min}, T_{\max}) = (T_{\min}(u_0), T_{\max}(u_0))$ $(\ni 0)$ 上定義される (NLS_γ^p) の解 $u \in C((T_{\min}, T_{\max}); H^1(\mathbb{R}))$ が存在して, $(T_{\min}, T_{\max})$ を超えて (NLS_γ^p) の解は存在しない.

(3) (Blow-up alternative) もし $T_{\max} < \infty$ $(T_{\min} > -\infty)$ とすると,

$$
\lim_{t\nearrow T_{\max}} \|u(t)\|_{H^1} = \infty, \qquad \left(\lim_{t\searrow T_{\min}} \|u(t)\|_{H^1} = \infty \right).
$$

(4) (初期値への連続依存性) もし $u_{0,n} \longrightarrow u_0$ in H^1 とすると, 任意の閉区間 $I \subset (T_{\min}, T_{\max})$ に対して, ある $n_0 \in \mathbb{N}$ が存在して, 任意の $n \geq n_0$ に対して $u_{0,n}$ を初期値にもつ (NLS_γ^p) の解 u_n は I 上で定義されて $u_n \longrightarrow u$ in $C(I; H^1)$ $(n \to \infty)$ をみたす.

注意 2.1. (Blow-up alternative) より, 次が成り立つ.

$$\sup_{t\in(T_{\min},T_{\max})}\|u(t)\|_{H^1}<\infty \implies (T_{\min},T_{\max})=\infty.$$

(NLS$_\gamma^p$) は時間局所適切であることが知られている.

定理 2.2 ((NLS$_\gamma^p$) の時間局所適切, [2])**.** $p>1$, $\gamma>0$, $0<\mu<1$ とする. このとき, (NLS$_\gamma^p$) は時間局所適切である.

定理 2.2 で得られた (NLS$_\gamma^p$) の解は質量とエネルギーを保存する.

定理 2.3 (保存則)**.** 定理 2.2 で得られた (NLS$_\gamma^p$) の解 u は次の質量とエネルギーを時間に関して保存する.

$$\begin{aligned} &(\text{質量}) \quad M[f]:=\|f\|_{L^2}^2,\\ &(\text{エネルギー}) \quad E_\gamma^p[f]=\frac{1}{2}\|\partial_x f\|_{L^2}^2+\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}}\frac{\gamma}{|x|^\mu}|f(x)|^2dx-\frac{1}{p+1}\|f\|_{L^{p+1}}^{p+1}. \end{aligned}$$

つまり,

$$M[u(t)]=M[u_0],\quad E_\gamma^p[u(t)]=E_\gamma^p[u_0],\qquad t\in(T_{\min},T_{\max})$$

が成り立つ. $p=5$ のとき, 簡単のため単に $E_\gamma^5=E_\gamma$ で表す.

$\gamma=0$ のとき (NLS$_0^p$) は次のスケール変換に関して不変である.

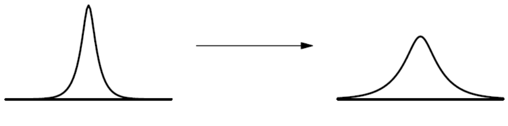
$$u(t,x)\mapsto u_{[\lambda]}(t,x):=\lambda^{\frac{2}{p-1}}u(\lambda^2t,\lambda x),\qquad (\lambda>0).$$

つまり, u が (NLS$_0^p$) の解であるならば, $\lambda>0$ に対して $u_{[\lambda]}$ もまた (NLS$_0^p$) の解である. この変換により初期値 u_0 は

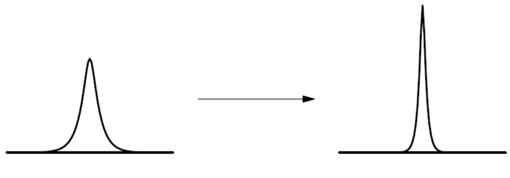
$$u_0(x)\mapsto (u_0)_{\{\lambda\}}(x):=\lambda^{\frac{2}{p-1}}u_0(\lambda x) \tag{1}$$

と移り変わる. $s_c:=\frac{1}{2}-\frac{2}{p-1}$ とすると, $\dot{H}^{s_c}$-ノルムはこの変換に関して不変である. つまり, $\|(u_0)_{\{\lambda\}}\|_{\dot{H}^{s_c}}=\|u_0\|_{\dot{H}^{s_c}}$ が成り立つ. そのため $p=5$ ($s_c=0$) のとき, (NLS$_\gamma$) は L^2-臨界もしくは質量臨界と呼ばれる.

時間局所適切が得られたとき, 解の時間発展による挙動を調べることが時間に依存した非線形偏微分方程式の研究の 2 つ目である. (NLS$_\gamma^p$) の解の時間発展を考えた際, 線形部分 ($i\partial_t u+\partial_x u-\frac{\gamma}{|x|^\mu}u$) は分散的にはたらき, 非線形部分 ($-|u|^{p-1}u$) は吸引的にはたらく. 分散性は波を散らばらせ, 吸引性は波を集中させる.



分散性



吸引性

線形部分と非線形部分の働きが逆であり, これらの兼ね合いにより様々な種類の時間挙動が存在する.

分散効果の方が吸引効果より強いとき, 解 u は空間遠方に向かっていく. そのため, 解 u 自身の相互作用が弱まり線形状態に近づく. このような挙動を散乱といい, このような解を散乱解と呼ぶ. 吸引効果の方が分散効果より強いとき, 解 u はあるところに集中していく. このような挙動を爆発といい, このような解を爆発解と呼ぶ. 爆発は有限時間爆発と無限時間爆発の 2 つに分けられる. 分散効果と吸引効果が釣り合うとき, 時間に関して位相の周期的な変動しかない解が生じる. このような解を定在波解と呼ぶ. これらの挙動を数学的に記述すると以下のようになる.

定義 2.4 (散乱解, 有限時間爆発解, 無限時間爆発解, 定在波解)**.** $u_0 \in H^1(\mathbb{R})$ とする.

- (散乱解)
  (NLS^p_γ) の解 u が正 (負) の時間で散乱するとは, $T_{\max} = +\infty$ ($T_{\min} = -\infty$) であり, さらに, ある $\psi_+ \in H^1(\mathbb{R})$ ($\psi_- \in H^1(\mathbb{R})$) が存在して

$$\lim_{t\to+\infty} \|u(t) - e^{it(\partial_x - \frac{\gamma}{|x|^\mu})}\psi_+\|_{H^1} = 0, \quad \left(\lim_{t\to-\infty} \|u(t) - e^{it(\partial_x - \frac{\gamma}{|x|^\mu})}\psi_-\|_{H^1} = 0\right)$$

  が成立することである. 時間両方向で散乱するとき, 単に散乱すると呼ぶ. ここで, $e^{it(\partial_x - \frac{\gamma}{|x|^\mu})}$ は線形シュレディンガー発展作用素であり, $e^{it(\partial_x - \frac{\gamma}{|x|^\mu})}\psi$ は ψ を初期値にもつ線形方程式

$$\begin{cases} i\partial_t u(t,x) + \partial_x^2 u(t,x) - \dfrac{\gamma}{|x|^\mu} u(t,x) = 0, & (t,x) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}, \\ u(0,x) = \psi(x), & x \in \mathbb{R} \end{cases} \tag{LS_γ}$$

  の解である.
- (有限時間爆発解)
  (NLS^p_γ) の解 u が正 (負) の時間で有限時間爆発するとは, $T_{\max} < +\infty$ ($T_{\min} > -\infty$) をみたすことである. 時間両方向で有限時間爆発するとき, 単に有限時間爆発すると呼ぶ.
- (無限時間爆発解)
  (NLS^p_γ) の解 u が正 (負) の時間で無限時間爆発するとは, $T_{\max} = +\infty$ ($T_{\min} = -\infty$) であり, さらに,

$$\limsup_{t\to+\infty} \|u(t)\|_{H^1} = \infty, \quad \left(\limsup_{t\to-\infty} \|u(t)\|_{H^1} = \infty\right)$$

  が成り立つことである. 時間両方向で無限時間爆発するとき, 単に無限時間爆発すると呼ぶ.
- (定在波解)
  ある $\omega \in \mathbb{R}$ に対して

$$u(t,x) = e^{i\omega t} Q_{\omega,\gamma}(x)$$

  の形をしているとき, 解 u は定在波解であるという. ここで, $Q_{\omega,\gamma} = Q_{\omega,\gamma}(x)$ は楕円型方程式

$$-\omega Q_{\omega,\gamma} + \partial_x^2 Q_{\omega,\gamma} - \frac{\gamma}{|x|^\mu} Q_{\omega,\gamma} = -|Q_{\omega,\gamma}|^{p-1} Q_{\omega,\gamma} \tag{$\mathrm{SP}^p_{\omega,\gamma}$}$$

  の解である.

注意 2.5. $(\mathrm{SP}^p_{\omega,\gamma})$ の解は作用汎関数

$$S^p_{\omega,\gamma}(f) := \frac{\omega}{2}M[f] + E^p_\gamma[f]$$

により次のように特徴付けられる．

$$Q_{\omega,\gamma} \text{ が } (\mathrm{SP}^p_{\omega,\gamma}) \text{ の解} \iff (S^p_{\omega,\gamma})'(Q_{\omega,\gamma}) = 0.$$

3 先行結果

$\gamma = 0$ (ポテンシャルの項がない) とき：

- (定在波解の存在) $p > 1$ のとき $(\mathrm{SP}^p_{\omega,\gamma})$ は解をもつ．特に，

$$\mathcal{G}^p_{\omega,\gamma} := \{\phi \in \mathcal{A}^p_{\omega,\gamma} : S^p_{\omega,\gamma}(\phi) \leq S^p_{\omega,\gamma}(\psi) \text{ for any } \psi \in \mathcal{A}^p_{\omega,\gamma}\}$$

  に属する基底状態と呼ばれる解が存在する．ここで，

$$\mathcal{A}^p_{\omega,\gamma} := \{\phi \in H^1(\mathbb{R}) \setminus \{0\} : (S^p_{\omega,\gamma})'(\phi) = 0\}.$$

- (時間大域存在) $1 < p < 5$, $u_0 \in H^1(\mathbb{R})$ ならば, (NLS^p_0) の解 u は時間大域的に存在する．
- (散乱) $Q_{1,0}$ は $(\mathrm{SP}^p_{1,0})$ の基底状態とする．
  - $p = 5$, $u_0 \in L^2(\mathbb{R})$, $M[u_0] < M[Q_{1,0}]$ ならば, (NLS_0) の解 u は散乱する [4].
  - $p > 5$, $u_0 \in H^1(\mathbb{R})$, $s_c := \frac{1}{2} - \frac{2}{p-1}$,

$$M[u_0]^{\frac{1-s_c}{s_c}} E^p_0[u_0] < M[Q_{1,0}]^{\frac{1-s_c}{s_c}} E^p_0[Q_{1,0}], \tag{2}$$

$$\|u_0\|_{L^2}^{\frac{1-s_c}{s_c}} \|\partial_x u_0\|_{L^2} < \|Q_{1,0}\|_{L^2}^{\frac{1-s_c}{s_c}} \|\partial_x Q_{1,0}\|_{L^2} \tag{3}$$

    ならば, (NLS^p_0) の解 u は散乱する [1, 6].
- (有限時間爆発または無限時間爆発) $Q_{1,0}$ は $(\mathrm{SP}^p_{1,0})$ の基底状態とする．$p > 5$, $u_0 \in H^1(\mathbb{R})$, $s_c := \frac{1}{2} - \frac{2}{p-1}$, (2),

$$\|u_0\|_{L^2}^{\frac{1-s_c}{s_c}} \|\partial_x u_0\|_{L^2} > \|Q_{1,0}\|_{L^2}^{\frac{1-s_c}{s_c}} \|\partial_x Q_{1,0}\|_{L^2} \tag{4}$$

  ならば, (NLS^p_0) の解 u は有限時間爆発もしくは無限時間爆発する [1, 5].
- (有限時間爆発)
  - $p \geq 5$, $u_0 \in H^1(\mathbb{R}) \cap |x|^{-1}L^2(\mathbb{R})$, $E^p_0[u_0] < 0$ ならば, (NLS^p_0) の解 u は有限時間爆発する [7].
  - $Q_{1,0}$ は $(\mathrm{SP}^p_{1,0})$ の基底状態とする．$p > 5$, $u_0 \in H^1(\mathbb{R}) \cap |x|^{-1}L^2(\mathbb{R})$, (2), (4) ならば, (NLS^p_0) の解 u は有限時間爆発する [1].
  - $p = 5$ の場合には, Ogawa–Tsutsumi [10] により $u_0 \in |x|^{-1}L^2(\mathbb{R})$ の仮定が取り除かれた．

定理 3.1 (Ogawa–Tsutsumi, [10])**.** $p = 5$, $\gamma = 0$ とする．$u_0 \in H^1(\mathbb{R})$ が $E_0[u_0] < 0$ をみたすとき, (NLS_0) の解 u は有限時間爆発する．

注意 3.2. Ogawa–Tsutsumi はスケール変換 (1) を利用することで定理 3.1 を証明した.

$\gamma > 0$ (ポテンシャルの項がある) とき：

- (時間大域存在) $Q_{1,0}$ は $(\mathrm{SP}^p_{1,0})$ の基底状態とする.
  - $p < 5$, $u_0 \in H^1(\mathbb{R})$ ならば, (NLS^p_γ) の解 u は時間大域的に存在する.
  - $p = 5$, $u_0 \in H^1(\mathbb{R})$, $M[u_0] < M[Q_{1,0}]$ ならば, (NLS_γ) の解 u は時間大域的に存在する.
  - $p > 5$, $u_0 \in H^1(\mathbb{R})$, $s_c := \frac{1}{2} - \frac{2}{p-1}$, (3),

$$M[u_0]^{\frac{1-s_c}{s_c}} E^p_\gamma[u_0] < M[Q_{1,0}]^{\frac{1-s_c}{s_c}} E^p_0[Q_{1,0}], \tag{5}$$

    ならば, (NLS^p_γ) の解 u は時間大域的に存在する [3].
- (有限時間爆発または無限時間爆発) $Q_{1,0}$ は $(\mathrm{SP}^p_{1,0})$ の基底状態とする. $p > 5$, $u_0 \in H^1(\mathbb{R})$, $s_c := \frac{1}{2} - \frac{2}{p-1}$, (4), (5) ならば, (NLS^p_γ) の解 u は有限時間爆発もしくは無限時間爆発する [8].
- (有限時間爆発)
  - $p \geq 5$, $u_0 \in H^1(\mathbb{R}) \cap |x|^{-1}L^2(\mathbb{R})$, $E^p_\gamma[u_0] < 0$ ならば, (NLS^p_γ) の解 u は有限時間爆発する [3, 8].
  - $Q_{1,0}$ は $(\mathrm{SP}^p_{1,0})$ の基底状態とする. $p > 5$, $u_0 \in H^1(\mathbb{R}) \cap |x|^{-1}L^2(\mathbb{R})$, (4), (5) ならば, (NLS^p_γ) の解 u は有限時間爆発する [3].

4 主定理

$\gamma = 0$ の場合と同様に $\gamma > 0$ の場合にも $p = 5$ において $u_0 \in |x|^{-1}L^2(\mathbb{R})$ の仮定を取り除けるかどうかというのは自然な疑問である. しかしながら $0 < \mu < 1$ のとき (NLS_γ) はスケール不変でないため, Ogawa–Tsutsumi [10] の議論を直接適用することはできない. そこで, 当問題における局所化されたビリアル等式 (補題 5.2) の重み関数に対するスケール変換を用いた証明方法の有効性を確認した. それを (NLS_γ) に適用することにより以下の結果を得た.

定理 4.1 (H.–Ikeda–Machihara, [9])**.** $p = 5$, $\gamma > 0$, $0 < \mu < 1$ とする. $u_0 \in H^1(\mathbb{R})$ が $E_\gamma[u_0] < 0$ をみたすとき, (NLS_γ) の解 u は有限時間爆発する.

5 証明の概略

補題 5.1 (Ogawa–Tsutsumi, [10])**.** $f \in H^1(\mathbb{R})$ とする. また $g \in W^{1,\infty}(\mathbb{R})$ は実数値関数とする. このとき, 任意の $R > 0$ に対して

$$\|fg\|_{L^\infty(|x|\geq R)} \leq \|f\|^{\frac{1}{2}}_{L^2(|x|\geq R)} \left\{2\|g^2\partial_x f\|_{L^2(|x|\geq R)} + \|f\partial_x(g^2)\|_{L^2(|x|\geq R)}\right\}^{\frac{1}{2}}$$

が成り立つ.

補題 5.2 (局所化されたビリアル等式, [3, 11])**.** $p = 5$, $\gamma > 0$, $0 < \mu < 1$ とする. $\varphi \in W^{3,\infty}(\mathbb{R})$ は

コンパクトな台をもつとする. $w := \int_0^x \varphi(y)dy$ と (NLS_γ) の解 $u(t)$ に対して

$$I_{\gamma,w}(t) := \int_{\mathbb{R}} w(x)|u(t,x)|^2 dx$$

を定義する. このとき,

$$\begin{aligned}
I'_{\gamma,w}(t) &= 2\mathrm{Im}\int_{\mathbb{R}} w'(x)\overline{u(t,x)}\partial_x u(t,x)dx,\\
I''_{\gamma,w}(t) &= 4\int_{\mathbb{R}} w''(x)|\partial_x u(t,x)|^2 dx - \frac{4}{3}\int_{\mathbb{R}} w''(x)|u(t,x)|^6 dx\\
&\qquad - \int_{\mathbb{R}} w^{(4)}(x)|u(t,x)|^2 dx + 2\mu\int_{\mathbb{R}} \frac{w'(x)}{x}\cdot\frac{\gamma}{|x|^\mu}|u(t,x)|^2 dx
\end{aligned}$$

が成り立つ.

ここで, いくつかの関数を定義する. ζ は奇関数であり次をみたすとする.

$$\zeta(s) := \begin{cases} 2s & (0 \le |s| \le 1),\\ 2[s-(s-1)^3] & (1 \le s \le 1+1/\sqrt{3}),\\ 2[s-(s+1)^3] & (-1-1/\sqrt{3} \le s \le -1),\\ \zeta'(s) < 0 & (1+1/\sqrt{3} < |s| < 2),\\ 0 & (2 \le |s|). \end{cases}$$

さらに, 関数 ζ を用いて

$$\mathscr{X}(x) := \int_0^x \zeta(s)ds, \qquad \mathscr{X}_R(x) := R^2\mathscr{X}\left(\frac{x}{R}\right) \tag{6}$$

を定義する.

命題 5.3. $p=5$, $\gamma>0$, $0<\mu<1$, $u_0 \in H^1(\mathbb{R})$ とする. もし $R>0$, (NLS_γ) の解 $u \in C_t([0,T_{\max});H^1_x(\mathbb{R}))$, $0 \le t < T_{\max}$ が

$$\|u(t)\|_{L^2(|x|\ge R)} \le \left(\frac{3}{8}\right)^{\frac{1}{4}} =: a_0, \tag{7}$$

をみたすならば $I''_{\gamma,\mathscr{X}_R}(t) \le -2\widetilde{\eta} := 16E_\gamma[u_0] - 2\eta$ が成り立つ. ここで,

$$\eta := -\frac{4}{3R^2}\left(\sqrt{6} + \frac{\|\zeta''\|_{L^\infty(1+1/\sqrt{3}\le|x|\le 2)}}{2}\right)^2\|u_0\|_{L^2}^6 - \frac{\|\zeta^{(3)}\|_{L^\infty(1\le|x|\le 2)}}{2R^2}\|u_0\|_{L^2}^2.$$

証明. 補題 5.2 を用いると

$$I''_{\gamma,\mathscr{X}_R}(t) = 16E_0[u_0] - \int_{\mathbb{R}} g_R(x)^4\left[4|\partial_x u(t,x)|^2 - \frac{4}{3}|u(t,x)|^6\right]dx - \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{R^2}\mathscr{X}^{(4)}\left(\frac{x}{R}\right)|u(t,x)|^2 dx$$

が成り立つ. ここで g_R は

$$g_R(x) := \left\{2 - \mathscr{X}''\left(\frac{x}{R}\right)\right\}^{\frac{1}{4}}$$

である．補題 5.1 より

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} g_R(x)^4|u(t,x)|^6dx &= \int_{|x|\ge R} g_R(x)^4|u(t,x)|^6dx\\ &\le \|u\|^2_{L^2(|x|\ge R)}\|g_R u\|^4_{L^\infty(|x|\ge R)}\\ &\le \|u\|^4_{L^2(|x|\ge R)}\left\{2\|g_R^2\partial_x u\|_{L^2(|x|\ge R)}+\|u\partial_x(g_R^2)\|_{L^2(|x|\ge R)}\right\}^2\\ &\le 8\|u\|^4_{L^2(|x|\ge R)}\|g_R^2\partial_x u\|^2_{L^2(|x|\ge R)}+2\|u\|^6_{L^2(|x|\ge R)}\|\partial_x(g_R^2)\|^2_{L^\infty(|x|\ge R)}.\end{aligned}$$

単純な計算から

$$|\partial_x(g_R(x)^2)|\begin{cases}=0, & (0\le|x/R|\le 1,\ 2\le|x/R|),\\ \le\sqrt{6}/R, & (1\le|x/R|\le 1+1/\sqrt{3}),\\ \le\dfrac{1}{2R}\|\zeta''\|_{L^\infty(1+1/\sqrt{3}\le|x|\le 2)}, & (1+1/\sqrt{3}<|x/R|<2).\end{cases}$$

が得られる．それゆえ

$$\begin{aligned}I''_{\gamma,\mathscr{X}_R}(t)\le 16E_0[u_0]-4\left\{1-\frac{8}{3}\|u\|^4_{L^2(|x|\ge R)}\right\}\int_{|x|\ge R}\left\{2-\mathscr{X}''\left(\frac{x}{R}\right)\right\}|\partial_x u(t,x)|^2dx\\ +\frac{8}{3R^2}\left(\sqrt{6}+\frac{\|\zeta''\|_{L^\infty(1+1/\sqrt{3}\le|x|\le 2)}}{2}\right)^2\|u\|^6_{L^2(|x|\ge R)}+\frac{\|\zeta^{(3)}\|_{L^\infty(1\le|x|\le 2)}}{R^2}\|u\|^2_{L^2(|x|\ge R)}\end{aligned}$$

が従う．質量保存 (定理 2.3) を用いると証明を終える． □

定理 4.1 の証明． 時間正方向のみ考える．背理法のため (NLS_γ) の解 u が時間大域的に存在すると仮定する．

次をみたすように $R>0$ を固定する．

$$\widetilde{\eta}>0,$$
$$\frac{1}{R}\left(\int_{\mathbb{R}}\mathscr{X}_R(x)|u_0(x)|^2dx\right)^{\frac{1}{2}}\left(1+\frac{4}{\widetilde{\eta}}\|\partial_x u_0\|^2_{L^2}\right)^{\frac{1}{2}}\le\frac{1}{2}a_0, \tag{8}$$

ここで $\widetilde{\eta}$ と a_0 は命題 5.3 で定義されたものである．$\widetilde{\eta}\longrightarrow -8E_0[u_0]>0$ $(R\to\infty)$ そして，ルベーグの収束定理により

$$\frac{1}{R^2}\int_{\mathbb{R}}\mathscr{X}_R(x)|u_0(x)|^2dx=\int_{\mathbb{R}}\mathscr{X}\left(\frac{x}{R}\right)|u_0(x)|^2dx=\int_{\mathbb{R}}\int_0^{x/R}\zeta(s)ds|u_0(x)|^2dx\longrightarrow 0\quad(R\to\infty)$$

であることに注意する．これより，任意の $0\le t<\infty$ に対して $u(t)$ は (7) をみたすことを示す．(8), $\widetilde{\eta}>0$, $\mathscr{X}_R\ge R^2$ $(|x|\ge R)$ から

$$\|u_0\|_{L^2(|x|\ge R)}\le\frac{1}{2}a_0 \tag{9}$$

が成り立つ．ここで

$$t_0:=\sup\{t>0:\|u(s)\|_{L^2(|x|\ge R)}\le a_0\ \ \text{for any}\ \ 0\le s<t\}$$

を定義する．(9) と $\|u(t)\|_{L^2}$ の連続性により $t_0 > 0$ である．$t_0 = \infty$ のときには, 望んだ結果が得られる．$0 < t_0 < \infty$ のとき, $\|u(t)\|_{L^2}$ の連続性により $\|u(t_0)\|_{L^2(|x|\geq R)} = a_0$ が従う．このとき, 解 $u(t)$ は任意の $0 \leq t \leq t_0$ に対して (7) が成り立つので, 命題 5.3 から

$$I''_{\gamma,\mathscr{X}_R}(\tau) \leq -2\widetilde{\eta} \quad (0 \leq \tau \leq t_0).$$

この不等式を $\tau \in [0, s]$ で積分し, さらに $s \in [0, t]$ で積分すると

$$I_{\gamma,\mathscr{X}_R}(t) \leq I_{\gamma,\mathscr{X}_R}(0) + I'_{\gamma,\mathscr{X}_R}(0)t - \widetilde{\eta}t^2. \tag{10}$$

(10) と $\widetilde{\eta} > 0$ を合わせると, 任意の $0 \leq t \leq t_0$ に対して

$$\begin{aligned} I_{\gamma,\mathscr{X}_R}(t) &\leq I_{\gamma,\mathscr{X}_R}(0) - \widetilde{\eta}\left\{t - \frac{1}{2\widetilde{\eta}}I'_{\gamma,\mathscr{X}_R}(0)\right\}^2 + \frac{1}{4\widetilde{\eta}}I'_{\gamma,\mathscr{X}_R}(0)^2 \\ &\leq I_{\gamma,\mathscr{X}_R}(0) + \frac{1}{\widetilde{\eta}}\|u_0\mathscr{X}'_R\|_{L^2}^2\|\partial_x u_0\|_{L^2}^2. \end{aligned} \tag{11}$$

$\mathscr{X}_R \geq R^2$ $(|x| \geq R)$, (11), $(\mathscr{X}'_R)^2 \leq 4\mathscr{X}_R$, (8) より, 任意の $0 \leq t \leq t_0$ に対して

$$\|u(t)\|_{L^2(|x|\geq R)} \leq \frac{1}{R}I_{\gamma,\mathscr{X}_R}(t)^{\frac{1}{2}} \leq \frac{1}{R}I_{\gamma,\mathscr{X}_R}(0)^{\frac{1}{2}}\left(1 + \frac{4}{\widetilde{\eta}}\|\partial_x u_0\|_{L^2}^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq \frac{1}{2}a_0.$$

しかしながら, これは矛盾である．

$t_0 = \infty$ のとき, (10) は有限時間で $I_{\gamma,\mathscr{X}_R}(t) < 0$ となることを導くが, これは矛盾である．それゆえ, (NLS_γ) の解 u は有限時間爆発する． □

6 付録

定理 4.1 の証明はより一般的なポテンシャルをもつ

$$i\partial_t u(t,x) + \partial_x^2 u(t,x) - V(x)u(t,x) = -|u(t,x)|^4 u(t,x), \qquad (t,x) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R} \tag{NLS_V}$$

に対する以下の系を与える．

系 6.1. $u_0 \in H^1(\mathbb{R})$ とする．V は次の (1) $\sim$ (3) をみたすとする．

1. (NLS_V) は時間局所適切である．
2. $\varphi \in W^{3,\infty}(\mathbb{R})$ とする．$w(x) := \int_0^x \varphi(s)ds$ と (NLS_V) の解 u に対して次が成り立つ．

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dt^2}\int_{\mathbb{R}} w(x)|u(t,x)|^2dx &= 4\int_{\mathbb{R}} w''(x)|\partial_x u(t,x)|^2dx - \frac{4}{3}\int_{\mathbb{R}} w''(x)|u(t,x)|^6dx \\ &\quad - \int_{\mathbb{R}} w^{(4)}(x)|u(t,x)|^2dx - 2\int_{\mathbb{R}} w'(x)V'(x)|u(t,x)|^2dx. \end{aligned} \tag{12}$$

3. 任意の $R > 0$ と任意の $x \in \mathbb{R}$ に対して

$$-R\mathscr{X}'\left(\frac{x}{R}\right)V'(x) - 4V(x) \leq 0 \tag{13}$$

が成り立つ．ここで, $\mathscr{X}$ は (6) で定義される．

このとき, もし

$$E_V[u_0] := \frac{1}{2}\|\partial_x u_0\|_{L^2}^2 + \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} V(x)|u_0(x)|^2 dx - \frac{1}{6}\|u_0\|_{L^6}^6 < 0$$

ならば (NLS_V) の解 u は有限時間爆発する.

参考文献

[1] T. Akahori and H. Nawa, Blowup and scattering problems for the nonlinear Schrödinger equations. Kyoto J. Math. **53** (2013), no. 3, 629–672. MR3102564

[2] T. Cazenave, *Semilinear Schrödinger equations*, Courant Lecture Notes in Mathematics, 10. New York University, Courant Institute of Mathematical Sciences, New York; American Mathematical Society, Providence, RI, 2003. xiv+323 pp. MR2002047

[3] V. D. Dinh, *On nonlinear Schrödinger equations with repulsive inverse-power potentials*, Acta Appl. Math. **171** (2021), Paper No. 14, 52 pp. MR4198524

[4] B. Dodson, *Global well-posedness and scattering for the mass critical nonlinear Schrödinger equation with mass below the mass of the ground state*, Adv. Math. **285** (2015), 1589–1618. MR3406535

[5] D. Du, Y. Wu, and K. Zhang, On blow-up criterion for the nonlinear Schrödinger equation. Discrete Contin. Dyn. Syst. **36** (2016), no. 7, 3639–3650. MR3485846

[6] D. Fang, J. Xie, and T. Cazenave, Scattering for the focusing energy-subcritical nonlinear Schrödinger equation. Sci. China Math. **54** (2011), no. 10, 2037–2062. MR2838120

[7] R. T. Glassey, *On the blowing up of solutions to the Cauchy problem for nonlinear Schrödinger equations*, J. Math. Phys. **18** (1977), no. 9, 1794–1797. MR0460850

[8] M. Hamano and M. Ikeda, *Equivalence of conditions on initial data below the ground state to NLS with a repulsive inverse power potential*, preprint, arXiv:2004.08788.

[9] M. Hamano, M. Ikeda, and S. Machihara, *Blow-up solutions for non-scale-invariant nonlinear Schrödinger equation in one dimension*, preprint

[10] T. Ogawa and Y. Tsutsumi, *Blow-up of H^1 solutions for the one-dimensional nonlinear Schrödinger equation with critical power nonlinearity*, Proc. Amer. Math. Soc. **111** (1991), no. 2, 487–496. MR1045145

[11] T. Tao, M. Visan, and X. Zhang, *The nonlinear Schrödinger equation with combined power-type nonlinearities*, Comm. Partial Differential Equations **32** (2007), no. 7-9, 1281–1343. MR2354495