異方的粘性項を持つ 3 次元非圧縮性 Navier-Stokes 方程式の解の長時間挙動

九州大学大学院数理学府数理学専攻 博士後期課程 2 年
藤井 幹大 (Mikihiro FUJII)

概要

本講演では，3 次元非圧縮性 Navier-Stokes 方程式で，その粘性項が水平方向の変数のみの 2 次元 Laplacian からなる方程式の初期値問題を考察し，粘性項の異方性が解の長時間挙動に与える影響について注目する．特に，速度場の水平成分の時間減衰率は 2 次元の熱核の減衰率と一致するが，速度場の鉛直成分の減衰率は 3 次元の熱核の減衰率と一致することを線形解析と積分方程式における Duhamel 項の分解を行うことにより説明する．さらに解の時刻無限大での漸近系を具体的に決定できることを報告する．

1 導入

本講演では次の 3 次元異方的 Navier-Stokes 方程式の初期値問題を考える:

$$\begin{cases}\partial_t u - \Delta_{\mathrm{h}} u + (u\cdot\nabla)u + \nabla p = 0, & t>0, x\in\mathbb{R}^3,\\ \nabla\cdot u = 0, & t\geqslant 0, x\in\mathbb{R}^3,\\ u(0,x) = u_0(x), & x\in\mathbb{R}^3.\end{cases} \tag{1}$$

ここで，$u=(u_1(t,x),u_2(t,x),u_3(t,x))$ と $p=p(t,x)$ はそれぞれ，流体の速度場および圧力を表す未知関数であり，$u_0=(u_{0,1}(x),u_{0,2}(x),u_{0,3}(x))$ は流体の初期時刻における既知の速度場である．また，$\Delta_{\mathrm{h}}=\partial_1^2+\partial_2^2$ は水平方向の 2 次元 Laplacian であり，$\nabla=(\partial_1,\partial_2,\partial_3)$ は 3 次元勾配である．以下では 3 次元数ベクトル $a=(a_1,a_2,a_3)\in\mathbb{R}^3$ に対して，その水平成分を $a_{\mathrm{h}}:=(a_1,a_2)$ と書くことにする．さらに，$\nabla_{\mathrm{h}}=(\partial_1,\partial_2)$ を 2 次元勾配とする．

1.1 種々の関数空間のノルム

まず，関数の解析的特徴を測る際に用いられる種々のノルムを定義する．以下ではノルム $\|\cdot\|_X$ を定義した際にそのノルムが有限であるような関数全体の集合を X と定義することとする．また $X(\mathbb{R}^d;Y)$ と書いた場合は定義域が $\mathbb{R}^d$，終域がノルム空間 Y の関数であって X-ノルムが有限な関数全体を表すこととする．また簡単のため $X(\mathbb{R}^d;\mathbb{R})=X(\mathbb{R}^d)$, $\|\cdot\|_{X(\mathbb{R}^d)}=\|\cdot\|_X$ と略記することがある．まず関数の特異性や無限遠方での挙動を調べる際に用いられる L^p-ノルム $(1\leqslant p\leqslant\infty)$ を

定義する：

$$\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^d;Y)} := \left\{ \int_{\mathbb{R}^d} \|f(x)\|_Y^p dx \right\}^{\frac{1}{p}}, \qquad (1 \leqslant p < \infty),$$
$$\|f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d;Y)} := \inf \left\{ B > 0 \ ; \ |\{x \in \mathbb{R}^d \ ; \ \|f(x)\|_Y > B\} = 0 \right\}, \qquad (p = \infty).$$

L^p 空間に関数の滑らかさの情報を加えた空間 $W^{s,p}(\mathbb{R}^d)$ $(s \in \mathbb{N})$ は Sobolev 空間と呼ばれ，

$$\|f\|_{W^{s,p}} := \sum_{0 \leqslant m \leqslant s} \|\nabla^m f\|_{L^p(\mathbb{R}^d)}$$

と定められる．特に $p = 2$ のときは $H^s(\mathbb{R}^d) = W^{s,p}(\mathbb{R}^d)$ などと定義される．$H^s(\mathbb{R}^d)$ は Fourier 変換を用いて非整数 $s \in \mathbb{R}$ の場合にも拡張することができ，

$$\|f\|_{H^s} := \|(1 + |\xi|^2)\widehat{f}(\xi)\|_{L^2(\mathbb{R}^d_\xi)}$$

と定義される．この Sobolev 空間の定義は簡潔に $H^s(\mathbb{R}^d) = (1 - \Delta)^{-\frac{s}{2}} L^2(\mathbb{R}^d)$ と表現することもある．さらに，$s, \sigma \in \mathbb{R}$ に対して異方的 Sobolev 空間 $H^{\sigma,s}(\mathbb{R}^3)$, $\dot{H}^{\sigma,s}(\mathbb{R}^3)$ を

$$H^{\sigma,s}(\mathbb{R}^3) := (1 - \Delta_{\mathrm{h}})^{-\frac{\sigma}{2}} (1 - \partial_3^2)^{-\frac{s}{2}} L^2(\mathbb{R}^3), \qquad \dot{H}^{\sigma,s}(\mathbb{R}^3) := (-\Delta_{\mathrm{h}})^{-\frac{\sigma}{2}} (-\partial_3^2)^{-\frac{s}{2}} L^2(\mathbb{R}^3)$$

により定義する．また，$\Omega \subset \mathbb{R}$ に対して $C(\Omega; Y)$ は Ω から Y への連続写像全体の集合とする．

1.2　線形熱方程式の長時間挙動

本講演の目的は時刻無限大における方程式 (1) の解の挙動を具体的に調べた研究結果を報告することである．本研究にまつわる先行研究や主結果を述べる前に，簡単な d 次元線形熱方程式

$$\begin{cases} \partial_t u - \Delta u = 0, & t > 0, x \in \mathbb{R}^d, \\ u(0,x) = u_0(x), & x \in \mathbb{R}^d \end{cases} \tag{2}$$

の長時間挙動を考える．ここで，$\Delta = \partial_1^2 + ... + \partial_d^2$ は $\mathbb{R}^d$ における Laplacian であり，初期値 $u_0 \in L^1(\mathbb{R}^d)$ は既知であるとする．このとき，(2) の解 $u(t,x)$ は Fourier 変換を用いて計算でき，

$$u(t,x) = e^{t\Delta} u_0(x) = \int_{\mathbb{R}^d} G_d(t, x - y) u_0(y) dy, \qquad G_d(t,x) := (4\pi t)^{-\frac{d}{2}} e^{-\frac{|x|^2}{4t}}$$

と書くことができる．ここで積分核 $G(t,x)$ は d 次元熱核と呼ばれる関数である．このとき，直接的な計算により

$$\|e^{t\Delta} u_0\|_{L^1} \leqslant \|G(t)\|_{L^1} \|u_0\|_{L^1} = \|u_0\|_{L^1},$$
$$\|e^{t\Delta} u_0\|_{L^\infty} \leqslant (4\pi t)^{-\frac{d}{2}} \|u_0\|_{L^1} \leqslant t^{-\frac{d}{2}} \|u_0\|_{L^1}$$

となる．よって $\|e^{t\Delta} u_0\|_{L^p} \leqslant \|e^{t\Delta} u_0\|_{L^1}^{\frac{1}{p}} \|e^{t\Delta} u_0\|_{L^\infty}^{1 - \frac{1}{p}}$ より

$$\|e^{t\Delta} u_0\|_{L^p} \leqslant t^{-\frac{d}{2}(1 - \frac{1}{p})} \|u_0\|_{L^1}$$

である．つまり，方程式 (2) の解の L^p ノルムは時刻無限大 $t\to\infty$ において $O(t^{-\frac{d}{2}(1-\frac{1}{p})})$ のオーダーで減衰することがわかる．また，熱核 $G(t,x)$ を空間変数 x について Talyor 展開することで，解 $u(t,x)=e^{t\Delta}u_0(x)$ の時刻無限大における漸近形を得ることができる:

$$\lim_{t\to\infty} t^{\frac{d}{2}(1-\frac{1}{p})}\left\| e^{t\Delta}u_0(x)-G(t,x)\int_{\mathbb{R}^d}u_0(y)dy\right\|_{L^p}=0.$$

1.3 先行研究

初期値問題 (1) の時間大域的適切性は，Chemin-Desjardins-Gallagher-Grenier [1] により初めて考察され，異方的 Sobolev 空間 $H^{0,s}(\mathbb{R}^3)$ $(s>1/2)$ における小さい初期値に対する時間大域解が構成された．また，解の一意性は Iftimie [5] によって与えられた．ここで大域適切性の微分指数 $s>1/2$ はスケール劣臨界な指数であり，スケール臨界指数 $s=1/2$ は鉛直方向の Sobolev 埋め込み $H^s(\mathbb{R}_{x_3})\hookrightarrow L^\infty(\mathbb{R}_{x_3})$ が破綻するため除外されている．Paicu [8] はスケール臨界な枠組みでの大域適切性を考察し，$L^2(\mathbb{R}^3)$ を基礎とする異方的 Besov 空間 $\mathcal{B}^{0,\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^3)$ における小さい初期値に対する時間大域解の唯一存在を証明した．Chemin-Zhang [2] および Zhang-Fang [12] によって Paicu の結果を L^p の枠組みに拡張する研究がなされ，スケール不変な異方的 Besov 空間 $\mathcal{B}_p^{-1+\frac{2}{p},\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^3)$ $(2\leqslant p<\infty)$ における時間大域的適切性が証明された．[7, 9, 11, 13] などにおいて，(1) に関するその他の適切性に関する結果が報告されている．

一方で，方程式 (1) の解の長時間挙動は Ji-Wu-Yang [6] により，小さな初期値 $u_0\in H^4(\mathbb{R}^3)\cap H^{-\sigma,1}(\mathbb{R}^3)$ $(3/4\leqslant\sigma<1)$ に対する解がすべての $t\geqslant 0$ と $|\alpha|\leqslant 1$ をみたす多重指数 $\alpha=(\alpha_{\mathrm{h}},\alpha_3)\in(\mathbb{N}\cup\{0\})^2\times(\mathbb{N}\cup\{0\})$ に対して

$$\|u(t)\|_{H^4\cap H^{-\sigma,1}}\leqslant C\|u_0\|_{H^4\cap H^{-\sigma,1}},\qquad \|\nabla^\alpha u(t)\|_{L^2}\leqslant C(1+t)^{-\frac{\sigma+|\alpha_{\mathrm{h}}|}{2}}\|u_0\|_{H^4\cap H^{-\sigma,1}} \tag{3}$$

を満たすことを証明した．ここで，(3) における解の減衰率は線形解 $e^{t\Delta_{\mathrm{h}}}u_0$ の減衰率と一致している．さらに Xu-Zhang [10] は初期値に対する正則性の仮定を弱めた枠組みでの長時間挙動を考察しており，$s>2$, $(1+3s)/\{10(s-1)\}<\sigma<1$ のとき小さな初期値 $u_0\in(\dot{H}^{0,s}\cap\dot{H}^{-\sigma,0}\cap\dot{H}^{-\sigma,-\frac{\sigma}{2}-\frac{1}{4}}\cap\dot{H}^{-\frac{1}{2},1})(\mathbb{R}^3)$ に対する時間大域解 $u(t)$ が $t\to\infty$ において $|\alpha_{\mathrm{h}}|\leqslant 1$ である多重指数 $\alpha_{\mathrm{h}}\in(\mathbb{N}\cup\{0\})^2$ に対して

$$\begin{aligned}&\|\nabla_{\mathrm{h}}^{\alpha_{\mathrm{h}}}u(t)\|_{L^2}=O(t^{-\frac{\sigma+|\alpha_{\mathrm{h}}|}{2}}),\qquad \|\partial_3u(t)\|_{L^2}=O(t^{-\frac{1}{4}}),\\ &\|\nabla_{\mathrm{h}}^{\alpha_{\mathrm{h}}}u_3(t)\|_{L^2}=O(t^{-\frac{1}{2}(\frac{3}{2}\sigma+\frac{1}{4}+|\alpha_{\mathrm{h}}|)})\end{aligned} \tag{4}$$

を満たすことを証明した．

本研究の目的は， [6, 10] により報告されている長時間挙動に関する結果を精密化し，方程式のもつ異方性が解の長時間挙動に与える効果を，解の L^p ノルムの減衰と漸近展開の観点から明らかにすることである．

2　主結果

自然数 s に対して $X^s(\mathbb{R}^3) := H^s(\mathbb{R}^3) \cap L^1(\mathbb{R}^2_{x_\mathrm{h}}; (W^{1,1} \cap W^{1,\infty})(\mathbb{R}_{x_3}))$ とおく．また $G_\mathrm{h}(t, x_\mathrm{h})$ は水平方向に空間変数をとる 2 次元の熱核とする:

$$G_\mathrm{h}(t, x_\mathrm{h}) := (4\pi t)^{-1} e^{-\frac{|x_\mathrm{h}|^2}{4t}}, \qquad (t, x_\mathrm{h}) \in (0, \infty) \times \mathbb{R}^2.$$

本研究における主結果は以下の定理である．

定理 1 ([4])**.** 自然数 $s \geqslant 5$ に対して正定数 $\delta = \delta(s)$ が存在して次が成立する：

初期値 $u_0 \in X^s(\mathbb{R}^3)$ が $\nabla \cdot u_0 = 0$ および $\|u_0\|_{X^s} \leqslant \delta$ をみたすとき，初期値問題 (1) の一意解 $u \in C([0, \infty); X^s(\mathbb{R}^3))$ が存在する．また正定数 C が存在して任意の $1 \leqslant p \leqslant \infty$ に対して

$$\|\nabla^\alpha u_\mathrm{h}(t)\|_{L^p} \leqslant Ct^{-(1-\frac{1}{p})-\frac{|\alpha_\mathrm{h}|}{2}} \|u_0\|_{X^s}, \tag{5}$$

$$\|\nabla_\mathrm{h}^{\alpha_\mathrm{h}} u_3(t)\|_{L^p} \leqslant Ct^{-\frac{3}{2}(1-\frac{1}{p})-\frac{|\alpha_\mathrm{h}|}{2}} \|u_0\|_{X^s} \tag{6}$$

がすべての $t > 0$ と $|\alpha| \leqslant 1$ をみたす多重指数 $\alpha = (\alpha_\mathrm{h}, \alpha_3) \in (\mathbb{N} \cup \{0\})^2 \times (\mathbb{N} \cup \{0\})$ に対して成立する．

さらに $1 \leqslant p \leqslant \infty$ に対して

$$\begin{aligned} \lim_{t \to \infty} t^{1-\frac{1}{p}} \Bigg\| u_\mathrm{h}(t, x) - G_\mathrm{h}(t, x_\mathrm{h}) \int_{\mathbb{R}^2} u_{0,\mathrm{h}}(y_\mathrm{h}, x_3) dy_\mathrm{h} \\ + G_\mathrm{h}(t, x_\mathrm{h}) \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^2} \partial_3(u_3 u_\mathrm{h})(\tau, y_\mathrm{h}, x_3) dy_\mathrm{h} d\tau \Bigg\|_{L^p_x} = 0 \end{aligned} \tag{7}$$

が成立し，$1 \leqslant p < \infty$ のときは

$$\lim_{t \to \infty} t^{\frac{3}{2}(1-\frac{1}{p})} \left\| u_3(t, x) - G_\mathrm{h}(t, x_\mathrm{h}) \int_{\mathbb{R}^2} u_{0,3}(y_\mathrm{h}, x_3) dy_\mathrm{h} \right\|_{L^p_x} = 0 \tag{8}$$

も成立する．

注意 1. (i) 解の水平成分 $u_\mathrm{h}(t)$ の L^p 減衰率 (5) は 2 次元熱核の $L^p(\mathbb{R}^2)$ ノルム $\|G_\mathrm{h}(t)\|_{L^p(\mathbb{R}^2)}$ の減衰率に一致することがわかる．特に $p = 2$ のとき，(5) は [6] における端点 $\sigma = 1$ の場合に対応する．一方で解の鉛直成分 $u_3(t)$ の減衰率 (6) は 3 次元熱核の $L^p(\mathbb{R}^3)$ 減衰率に一致する．

(ii) 等方的な Burgers 方程式や Navier-Stokes 方程式の場合と異なり，解の水平成分 $u_\mathrm{h}(t)$ の漸近展開 (7) は誤差が $o(t^{-(1-\frac{1}{p})})$ の精度でも線形解のみでは近似できず非線形性の効果が現れる．

(iii) 漸近極限 (8) における $p = \infty$ の場合は一般に不成立である．つまり，ある初期値 $u_0 \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^3)$ が存在して

$$\liminf_{t \to \infty} t^{\frac{3}{2}} \left\| u_3(t, x) - G_\mathrm{h}(t, x_\mathrm{h}) \int_{\mathbb{R}^2} u_{0,3}(y_\mathrm{h}, x_3) dy_\mathrm{h} \right\|_{L^\infty_x} > 0$$

が成立する．

(iv) 初期値が付加条件 $|x_{\mathrm{h}}|u_0(x) \in L^1(\mathbb{R}^2_{x_{\mathrm{h}}};(L^1\cap L^\infty)(\mathbb{R}_{x_3}))$ をみたし，$s \geqslant 9$ かつ $1 < p \leqslant \infty$ のときは漸近展開 (7) と (8) における誤差 $o(t^{-(1-\frac{1}{p})})$ と $o(t^{-\frac{3}{2}(1-\frac{1}{p})})$ はそれぞれ $O(t^{-(1-\frac{1}{p})-\frac{1}{2}}\log t)$ と $O(t^{-\frac{3}{2}(1-\frac{1}{p})-\frac{1}{2p}})$ に改善される．

3 線形解析

この節では線形解の時間減衰率と長時間挙動について考察する．特に，線形解の第 3 成分 $e^{t\Delta_{\mathrm{h}}}u_{0,3}$ の評価について考える．

補題 1 ([4])**.** (1) 正定数 C が存在して

$$\|e^{t\Delta_{\mathrm{h}}}u_{0,3}\|_{L^p} \leqslant Ct^{-\frac{3}{2}(1-\frac{1}{p})}\|u_0\|_{L^1} \tag{9}$$

がすべての $1 \leqslant p \leqslant \infty$, $t>0$ と $\nabla\cdot u_0 = 0$ をみたす $u_0 = (u_{0,1},u_{0,2},u_{0,3}) \in L^1(\mathbb{R}^3)$ に対して成立する．

(2) $1 \leqslant p \leqslant \infty$ と $\nabla\cdot u_0 = 0$ をみたす $u_0(x) = (u_{0,1},u_{0,2},u_{0,3}) \in L^1(\mathbb{R}^2_{x_{\mathrm{h}}};(L^1\cap L^\infty)(\mathbb{R}_{x_3}))$ に対して，$t\to\infty$ のとき 0 に収束する関数 $\mathcal{R}_p(t)$ と正定数 C が存在して

$$\left\|e^{t\Delta_{\mathrm{h}}}u_{0,3}(x) - G_{\mathrm{h}}(t,x_{\mathrm{h}})\int_{\mathbb{R}^2}u_{0,3}(y_{\mathrm{h}},x_3)dy_{\mathrm{h}}\right\|_{L^p} \leqslant Ct^{-\frac{3}{2}(1-\frac{1}{p})}\mathcal{R}_p(t)^{\frac{1}{p}}\|u_0(x)\|_{L^1}^{1-\frac{1}{p}} \tag{10}$$

がすべての $t>0$ に対して成立する．

証明. まず (9) を示す．初期値の発散 0 条件から $\partial_3 u_{0,3} = -\nabla_{\mathrm{h}}\cdot u_{0,\mathrm{h}}$ であるため，

$$\begin{aligned}
\|e^{t\Delta_{\mathrm{h}}}u_{0,3}\|_{L^p} &\leqslant \|e^{t\Delta_{\mathrm{h}}}u_{0,3}\|_{L^p_{x_{\mathrm{h}}}L^1_{x_3}}^{\frac{1}{p}}\|e^{t\Delta_{\mathrm{h}}}u_{0,3}\|_{L^p_{x_{\mathrm{h}}}L^\infty_{x_3}}^{1-\frac{1}{p}} \\
&\leqslant C\left(t^{-(1-\frac{1}{p})}\|u_{0,3}\|_{L^1}\right)^{\frac{1}{p}}\|e^{t\Delta_{\mathrm{h}}}\partial_3 u_{0,3}\|_{L^p_{x_{\mathrm{h}}}L^1_{x_3}}^{1-\frac{1}{p}} \\
&= Ct^{-\frac{1}{p}(1-\frac{1}{p})}\|u_{0,3}\|_{L^1}^{\frac{1}{p}}\|e^{t\Delta_{\mathrm{h}}}\nabla_{\mathrm{h}}\cdot u_{0,\mathrm{h}}\|_{L^p_{x_{\mathrm{h}}}L^1_{x_3}}^{1-\frac{1}{p}} \\
&\leqslant Ct^{-\frac{1}{p}(1-\frac{1}{p})}\|u_{0,3}\|_{L^1}^{\frac{1}{p}}\left(t^{-(1-\frac{1}{p})-\frac{1}{2}}\|u_{0,\mathrm{h}}\|_{L^1}\right)^{1-\frac{1}{p}} \\
&\leqslant Ct^{-\frac{3}{2}(1-\frac{1}{p})}\|u_0\|_{L^1}
\end{aligned}$$

が従う．

次に (10) を示す．

$$F(t,x) := e^{t\Delta_{\mathrm{h}}}u_{0,3}(x) - G_{\mathrm{h}}(t,x_{\mathrm{h}})\int_{\mathbb{R}^2}u_{0,3}(y_{\mathrm{h}},x_3)dy_{\mathrm{h}}$$

とすると

$$\|F(t)\|_{L^p} \leqslant \|F(t)\|_{L^p_{x_{\mathrm{h}}}L^1_{x_3}}^{\frac{1}{p}}\|F(t)\|_{L^p_{x_{\mathrm{h}}}L^\infty_{x_3}}^{1-\frac{1}{p}} \leqslant \|F(t)\|_{L^p_{x_{\mathrm{h}}}L^1_{x_3}}^{\frac{1}{p}}\|\partial_3 F(t)\|_{L^p_{x_{\mathrm{h}}}L^1_{x_3}}^{1-\frac{1}{p}}$$

である．ここで $\mathcal{R}_p(t) := t^{1-\frac{1}{p}}\|F(t)\|_{L^p_{x_{\mathrm{h}}}L^1_{x_3}}$ とすると，熱核の Taylor 展開により $\mathcal{R}_p(t)$ は $t \to \infty$ において減衰する．一方で初期値の発散 0 条件と部分積分により

$$\partial_3 \int_{\mathbb{R}^2} u_{0,3}(y_{\mathrm{h}}, x_3)dy_{\mathrm{h}} = -\int_{\mathbb{R}^2} \nabla_{\mathrm{h}} \cdot u_{0,\mathrm{h}}(y_{\mathrm{h}}, x_3)dy_{\mathrm{h}} = 0,$$
$$\partial_3 e^{t\Delta_{\mathrm{h}}} u_{0,3}(x) = -\int_{\mathbb{R}^2} \nabla_{\mathrm{h}} G_{\mathrm{h}}(t, x_{\mathrm{h}} - y_{\mathrm{h}}) \cdot u_{0,\mathrm{h}}(y_{\mathrm{h}})dy_{\mathrm{h}}$$

となるので，

$$\partial_3 F_0(t,x) = -\int_{\mathbb{R}^2} (\nabla_{\mathrm{h}} G_{\mathrm{h}})(t, x_{\mathrm{h}} - y_{\mathrm{h}}) \cdot u_{0,\mathrm{h}}(y_{\mathrm{h}}, x_3)dy_{\mathrm{h}}$$

である．よって

$$\begin{aligned}\|\partial_3 F_0(t,x)\|_{L^p_{x_{\mathrm{h}}}L^1_{x_3}} &\leqslant \|\nabla_{\mathrm{h}} G_{\mathrm{h}}(t)\|_{L^p(\mathbb{R}^2)}\|u_{0,\mathrm{h}}\|_{L^1} \\ &\leqslant Ct^{-(1-\frac{1}{p})-\frac{1}{2}}\|u_0\|_{L^1}\end{aligned}$$

となる．以上から

$$\|F_0(t)\|_{L^p} \leqslant Ct^{-\frac{3}{2}(1-\frac{1}{p})}\mathcal{R}_p(t)^{\frac{1}{p}}\|u_0\|_{L^1}^{1-\frac{1}{p}}.$$

となり，証明が完了する． □

4　積分方程式の分解

本節では，方程式 (1) に対応する次の積分方程式について考察する:

$$u(t) = e^{t\Delta_{\mathrm{h}}}u_0 - \int_0^t e^{(t-\tau)\Delta_{\mathrm{h}}}\mathbb{P}\nabla \cdot (u \otimes u)(\tau)d\tau. \tag{11}$$

ここで $\mathbb{P} = (\delta_{kl} + R_k R_l)_{1 \leqslant k,l \leqslant 3}$ は Helmholtz 射影であり，$\{R_k\}_{k=1}^3$ は 3 次元の Riesz 変換を表す．Riesz 変換は L^1 および L^∞ において非有界であるため，積分方程式 (11) を用いて解の L^1,L^∞ ノルムの評価をすることは困難であるように見える．しかし作用素 $e^{(t-\tau)\Delta_{\mathrm{h}}}\mathbb{P}\nabla\cdot$ を適切に分解することによりこの問題は解決できる．実際，(11) は直接的な計算により次のように Riesz 変換を含まない形に書き換えられる．

補題 2 ([4])．ベクトル場 u を積分方程式 (11) の解とする．このとき，次が成立する:

$$\begin{cases} u_{\mathrm{h}}(t) = e^{t\Delta_{\mathrm{h}}}u_{0,\mathrm{h}} + \displaystyle\sum_{m=1}^5 \mathcal{D}_m^{\mathrm{h}}[u](t), \\ u_3(t) = e^{t\Delta_{\mathrm{h}}}u_{0,3} + \displaystyle\sum_{m=1}^3 \mathcal{D}_m^{\mathrm{v}}[u](t) \end{cases} \tag{12}$$

であり，Duhamel 項の分解 $\{\mathcal{D}^{\mathrm{h}}_m[u]\}_{m=1}^5$ と $\{\mathcal{D}^{\mathrm{v}}_m[u]\}_{m=1}^3$ は

$$
\begin{aligned}
\mathcal{D}^{\mathrm{h}}_1[u](t) &:= -\int_0^t e^{(t-\tau)\Delta_{\mathrm{h}}}\partial_3(u_3u_{\mathrm{h}})(\tau)d\tau,\\
\mathcal{D}^{\mathrm{h}}_2[u](t) &:= -\int_0^t e^{(t-\tau)\Delta_{\mathrm{h}}}\nabla_{\mathrm{h}}\cdot(u_{\mathrm{h}}\otimes u_{\mathrm{h}})(\tau)d\tau,\\
\mathcal{D}^{\mathrm{h}}_3[u](t) &:= \int_0^t \nabla_{\mathrm{h}}e^{(t-\tau)\Delta_{\mathrm{h}}}(u_3(\tau)^2)d\tau,\\
\mathcal{D}^{\mathrm{h}}_4[u](t) &:= -\sum_{k,l=1}^{2}\int_0^t \nabla_{\mathrm{h}}\partial_k\partial_l K(t-\tau)*(u_ku_l)(\tau)d\tau,\\
\mathcal{D}^{\mathrm{h}}_5[u](t) &:= 2\sum_{k=1}^{2}\int_0^t \nabla_{\mathrm{h}}\partial_k(-\Delta_{\mathrm{h}})^{\frac{1}{2}}\widetilde{K}(t-\tau)*(u_3u_k)(\tau)d\tau + \int_0^t \nabla_{\mathrm{h}}\Delta_{\mathrm{h}}K(t-\tau)*(u_3(\tau)^2)d\tau
\end{aligned}
$$

および

$$
\begin{aligned}
\mathcal{D}^{\mathrm{v}}_1[u](t) &:= \int_0^t e^{(t-\tau)\Delta_{\mathrm{h}}}\nabla_{\mathrm{h}}\cdot(u_3u_{\mathrm{h}})(\tau)d\tau,\\
\mathcal{D}^{\mathrm{v}}_2[u](t) &:= \sum_{k,l=1}^{2}\int_0^t (-\Delta_{\mathrm{h}})^{\frac{1}{2}}\partial_k\partial_l\widetilde{K}(t-\tau)*(u_ku_l)(\tau)d\tau,\\
\mathcal{D}^{\mathrm{v}}_3[u](t) &:= 2\sum_{k=1}^{2}\int_0^t \partial_k\Delta_{\mathrm{h}}K(t-\tau)*(u_3u_k)(\tau)d\tau + \int_0^t (-\Delta_{\mathrm{h}})^{\frac{3}{2}}\widetilde{K}(t-\tau)*(u_3(\tau)^2)d\tau
\end{aligned}
$$

により定義される．ここで $K(t,x)$ と $\widetilde{K}(t,x)$ は

$$
K(t,x) := \int_0^\infty \frac{e^{-\frac{|x_{\mathrm{h}}|^2}{4(t+s)}}}{4\pi(t+s)}\frac{e^{-\frac{x_3^2}{4s}}}{(4\pi s)^{\frac{1}{2}}}ds, \qquad \widetilde{K}(t,x) := \mathrm{sgn}(x_3)K(t,x)
$$

により定義される積分核である．

5 主結果の証明の概略

本節では定理 1 の証明の概略を述べる．

5.1 時間減衰評価 (5),(6) の証明

時間減衰評価 (5),(6) は線形評価

$$
\begin{aligned}
&\|e^{t\Delta_{\mathrm{h}}}u_{0,\mathrm{h}}\|_{L^p} \leqslant Ct^{-(1-\frac{1}{p})}\|u_0\|_{L^1(\mathbb{R}^2_{x_{\mathrm{h}}};(L^1\cap L^\infty)(\mathbb{R}_{x_3}))},\\
&\|e^{t\Delta_{\mathrm{h}}}u_{0,3}\|_{L^p} \leqslant Ct^{-\frac{3}{2}(1-\frac{1}{p})}\|u_0\|_{L^1}
\end{aligned}
$$

および積分核 $K(t)$ に関する評価

$$\begin{aligned}
\|\nabla_{\mathrm{h}}^3 K(t)\|_{L^p} &\leqslant \int_0^\infty \left\|\nabla_{\mathrm{h}}^3 G_{\mathrm{h}}(t+s)\right\|_{L^p(\mathbb{R}^2)} \|G_{\mathrm{v}}(s)\|_{L^p(\mathbb{R})}\, ds \\
&\leqslant C\int_0^\infty (t+s)^{-(1-\frac{1}{p})-\frac{3}{2}} s^{-\frac{1}{2}(1-\frac{1}{p})} ds \\
&\leqslant Ct^{-\frac{3}{2}(1-\frac{1}{p})-\frac{1}{2}}
\end{aligned}$$

を用いて，continuous argument を適用することで証明できる．特に Duhamel 項の減衰評価は $t\to\infty$ のとき，$|\alpha|\leqslant 1$ である多重指数 $\alpha\in(\mathbb{N}\cup\{0\})^3$ に対して

$$\begin{aligned}
\|\nabla^\alpha \mathcal{D}_1^{\mathrm{h}}[u](t)\|_{L^p} &= O((t^{-(1-\frac{1}{p})-\frac{|\alpha_{\mathrm{h}}|}{2}}), \\
\|\nabla^\alpha \mathcal{D}_2^{\mathrm{h}}[u](t)\|_{L^p} &= O(t^{-(1-\frac{1}{p})-\frac{1+|\alpha_{\mathrm{h}}|}{2}}\log t), \\
\|\nabla^\alpha \mathcal{D}_3^{\mathrm{h}}[u](t)\|_{L^p} &= O(t^{-(1-\frac{1}{p})-\frac{1+|\alpha_{\mathrm{h}}|}{2}}), \\
\|\nabla^\alpha \mathcal{D}_4^{\mathrm{h}}[u](t)\|_{L^p} &= O(t^{-\frac{9}{8}(1-\frac{1}{p})-\frac{1+|\alpha_{\mathrm{h}}|}{2}}\log t), \\
\|\nabla^\alpha \mathcal{D}_5^{\mathrm{h}}[u](t)\|_{L^p} &= O(t^{-\frac{9}{8}(1-\frac{1}{p})-\frac{1+|\alpha_{\mathrm{h}}|}{2}})
\end{aligned}$$

および

$$\begin{aligned}
\|\nabla^\alpha \mathcal{D}_1^{\mathrm{v}}[u](t)\|_{L^p} &= O(t^{-(1-\frac{1}{p})-\frac{1+|\alpha_{\mathrm{h}}|}{2}}) = O(t^{-\frac{3}{2}(1-\frac{1}{p})-\frac{1}{2p}-\frac{|\alpha_{\mathrm{h}}|}{2}}), \\
\|\nabla^\alpha \mathcal{D}_2^{\mathrm{v}}[u](t)\|_{L^p} &= O(t^{-\frac{9}{8}(1-\frac{1}{p})-\frac{1+|\alpha_{\mathrm{h}}|}{2}}\log t), \\
\|\nabla^\alpha \mathcal{D}_3^{\mathrm{v}}[u](t)\|_{L^p} &= O(t^{-\frac{9}{8}(1-\frac{1}{p})-\frac{1+|\alpha_{\mathrm{h}}|}{2}})
\end{aligned}$$

となる．

5.2 漸近展開 (7), (8) の証明

Fujigaki-Miyakawa [3] の手法を用いて計算することで，

$$\lim_{t\to\infty} t^{1-\frac{1}{p}} \left\| \mathcal{D}_1^{\mathrm{h}}[u](t,x) + G_{\mathrm{h}}(t,x_{\mathrm{h}}) \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^2} \partial_3(u_3 u_{\mathrm{h}})(\tau, y_{\mathrm{h}}, x_3)\, dy_{\mathrm{h}} d\tau \right\|_{L^p_x} = 0$$

であることがわかる．また，熱核の Taylor 展開により，

$$\lim_{t\to\infty} t^{1-\frac{1}{p}} \left\| e^{t\Delta_{\mathrm{h}}} u_{0,\mathrm{h}}(x) - G_{\mathrm{h}}(t,x_{\mathrm{h}}) \int_{\mathbb{R}^2} u_{0,\mathrm{h}}(y_{\mathrm{h}}, x_3)\, dy_{\mathrm{h}} \right\|_{L^p_x} = 0$$

である．したがって，以上のことと前小節で述べた非線形項の減衰評価を用いることで

$$
\begin{aligned}
t^{1-\frac{1}{p}} \Bigg\| u_{\mathrm{h}}(t,x) - G_{\mathrm{h}}(t,x_{\mathrm{h}}) \int_{\mathbb{R}^2} u_{0,\mathrm{h}}(y_{\mathrm{h}},x_3)dy_{\mathrm{h}} \\
+ G_{\mathrm{h}}(t,x_{\mathrm{h}}) \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^2} \partial_3(u_3u_{\mathrm{h}})(\tau,y_{\mathrm{h}},x_3)dy_{\mathrm{h}}d\tau \Bigg\|_{L^p_x} \\
&\leqslant t^{1-\frac{1}{p}} \left\| e^{t\Delta_{\mathrm{h}}} u_{0,\mathrm{h}}(x) - G_{\mathrm{h}}(t,x_{\mathrm{h}}) \int_{\mathbb{R}^2} u_{0,\mathrm{h}}(y_{\mathrm{h}},x_3)dy_{\mathrm{h}} \right\|_{L^p_x} \\
&\quad + t^{1-\frac{1}{p}} \left\| \mathcal{D}^{\mathrm{h}}_1[u](t) + G_{\mathrm{h}}(t,x_{\mathrm{h}}) \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^2} \partial_3(u_3u_{\mathrm{h}})(\tau,y_{\mathrm{h}},x_3)dy_{\mathrm{h}}d\tau \right\|_{L^p_x} + \sum_{m=2}^{5} t^{1-\frac{1}{p}} \|\mathcal{D}^{\mathrm{h}}_m[u](t)\|_{L^p_x} \\
&\leqslant t^{1-\frac{1}{p}} \left\| e^{t\Delta_{\mathrm{h}}} u_{0,\mathrm{h}}(x) - G_{\mathrm{h}}(t,x_{\mathrm{h}}) \int_{\mathbb{R}^2} u_{0,\mathrm{h}}(y_{\mathrm{h}},x_3)dy_{\mathrm{h}} \right\|_{L^p_x} \\
&\quad + t^{1-\frac{1}{p}} \left\| \mathcal{D}^{\mathrm{h}}_1[u](t) + G_{\mathrm{h}}(t,x_{\mathrm{h}}) \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^2} \partial_3(u_3u_{\mathrm{h}})(\tau,y_{\mathrm{h}},x_3)dy_{\mathrm{h}}d\tau \right\|_{L^p_x} + Ct^{-\frac{1}{2}}\log t \\
&\to 0 \qquad \text{as } t \to \infty
\end{aligned}
$$

となり，(7) を得る．

次に (8) を示す．補題 1 と前小節で述べた非線形項の減衰評価から．

$$
\begin{aligned}
t^{\frac{3}{2}(1-\frac{1}{p})} \left\| u_3(t,x) - G_{\mathrm{h}}(t,x_{\mathrm{h}}) \int_{\mathbb{R}^2} u_{0,3}(y_{\mathrm{h}},x_3)dy_{\mathrm{h}} \right\|_{L^p_x} \\
&\leqslant t^{\frac{3}{2}(1-\frac{1}{p})} \left\| e^{t\Delta_{\mathrm{h}}} u_{0,3}(x) - G_{\mathrm{h}}(t,x_{\mathrm{h}}) \int_{\mathbb{R}^2} u_{0,3}(y_{\mathrm{h}},x_3)dy_{\mathrm{h}} \right\|_{L^p_x} + \sum_{m=1}^{3} t^{\frac{3}{2}(1-\frac{1}{p})} \|\mathcal{D}^{\mathrm{v}}_m[u](t)\|_{L^p_x} \\
&\leqslant C\mathcal{R}_p(t)^{\frac{1}{p}} \|u_0\|_{L^1}^{1-\frac{1}{p}} + Ct^{-\frac{1}{2p}} + Ct^{-\frac{1}{2}+\frac{3}{8}(1-\frac{1}{p})}\log t.
\end{aligned}
$$

上式の最右辺は，$p < \infty$ であれば，$t \to \infty$ のとき 0 に収束する．以上によって証明が完了した．

参考文献

[1] J.-Y. Chemin, B. Desjardins, I. Gallagher, and E. Grenier, M2AN Math. Model. Numer. Anal. 34 (2000), 315-335.

[2] J.-Y. Chemin and P. Zhang, Comm. Math. Phys. 272 (2007), 529-566.

[3] Y. Fujigaki and T. Miyakawa, SIAM J. Math. Anal. 33 (2001), 523-544.

[4] M. Fujii, *Large time behavior of solutions to the 3D anisotropic Navier-Stokes equation*, arXiv:2108.11940v2.

[5] D. Iftimie, SIAM J.Math. Anal. 33 (2002), 1483-1493.

[6] R. Ji, J. Wu, and W. Yang, J. Differential Equations 290 (2021), 57-77.

[7] Y. Liu, M. Paicu, and P. Zhang, Arch. Ration. Mech. Anal. 238 (2020), 805-843.

[8] M. Paicu, Rev. Mat. Iberoamericana 21 (2005), 179-235.

[9] M. Paicu and P. Zhang, Comm. Math. Phys. 307 (2011), 713-759.

[10] L. Xu and P. Zhang, arXiv:2107.06453.

[11] K. Yan and Z. Yin, Nonlinear Anal. Real World Appl. 32 (2016), 52-73.

[12] T. Zhang and D. Fang, J. Math. Pures Appl. (9) 90 (2008), 413-449.

[13] T. Zhang, Comm. Math. Phys. 287 (2009), 211-224.