ランダム行列とその主小行列の固有値分布について

北海道大学大学院 理学院 数学専攻
藤江克徳 (Katsunori FUJIE)

概要

ランダム行列とは成分が確率変数で与えられる行列のことである．ランダム行列理論において，その主な研究対象は確率的に定まる固有値，すなわち固有値分布である．歴史的，そして物理的な背景から，行列のサイズを大きくしていった際の固有値分布の振る舞いにとくに興味が持たれている．本講演ではユニタリ共役作用で分布が不変となるランダムエルミート行列の系列について，それらの主小行列の固有値分布がサイズが大きくなったとき，どのように決定されるかを説明する．なお本講演は長谷部高広氏（北海道大学）との共同研究に基づいている．

1 導入

ランダム行列の数理的解析が始まったのは 1920 年代の J.Wishart による統計学の研究がはじめとされる．そこから少し時間が立って 50 年代になって E.P.Wigner による核物理の研究でふたたび現れたのを皮切りに，ランダム行列はとくにその初期において主に物理学の分野で理論的な発展が進んだ．現在では素数分布との関連から数論などの純粋数学から，また無線通信理論への応用的な側面を持つため工学からも興味が持たれており，さらなる理論的な解明が望まれる分野である ([13]).

ランダム行列やその系列が定める固有値分布の理論的な解析の道具のうちの一つに自由確率論と呼ばれる研究分野がある．自由確率論とは簡単に述べると非可換な確率変数を調べる研究分野であり，その重要な具体例・応用先としてランダム行列理論がある．とくに独立なランダム行列の系列がその極限分布において自由独立性を満たすという重要な発見がこの分野の立ち上げの本格的なきっかけになった．またこの事実からとくに自由確率論はランダム行列やその極限を扱う理論的な枠組みとして自然なものであると認識されている ([16]).

この他, 自由確率論と他分野との関わりでとくに注目したいのは A.Vershik, S.Kerov らの漸近的表現論である．漸近的表現論とはよくわかっている群の帰納極限として得られる巨大な群の指標などを調べる研究分野である．例えば古典的な結果として有限対称群の帰納極限として得られる無限対称群の指標への漸近理論, そしてヤング図形の最尤形状（しばしば VKLS(Vershik–Kerov–Lagan–Shepp) 曲線と呼ばれる）の発見などがある ([12])．自由確率論がその指標の極限における振る舞いを記述するのに役立つことが 90 年代に P.Biane によって発見されるなどその本質的な関わりが示唆されている ([2])．対称群の漸近的表現論の文脈では発展していくヤング図形を扱うことが多く, ヤング図形の表示として絶対値関数を器に見立てて箱を落としていくような, いわゆる露式表示が用いられる ([8])．こうするとヤング図形は有限台を持つ測度, または関数のグラフ, あるいはその極小値・極大値として翻訳される．このとき interlace する数列が現れる．Kerov はこうして漸近的表現論の研究に

おける副産物として得られた interlace する数列やそれを一般化した Rayleigh measure に関する研究を行い, Markov–Krein 対応などについての結果を得た ([10], [11]).

とくにランダム行列の観点から述べたとき，エルミート行列とその主小行列の固有値が満たす関係として interlace する数列が現れる．Kerov はこの事実に関しても研究を行なっており，Wigner 行列を Haar Orthogonal 行列で共役をとったランダム行列とその主小行列の固有値分布の組で作られる折れ線グラフがその極限においても再び上で述べた VKLS 曲線に集中していくという結果を得ている ([9])．これに引き続いて A.Bufetov は Wigner 行列，Wishart 行列の両クラスで同様の結果が成り立つという結果を得た ([1])．上記二つの結果を受けて 2020 年に Goel–Yao は次の予想を提出した ([7]).

予想 1.1. ユニタリ共役不変なランダムエルミート行列 A_N の経験固有値分布 $\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\delta_{\lambda_i}$ がある確率測度 $\mathfrak{m}$ に確率弱収束すると仮定する．このとき，その主小行列 $\widetilde{A}_N$ の固有値分布との組で作られる符号付き確率測度 $\tau_N = \sum_{i=1}^{N}\delta_{\lambda_i} - \sum_{j=1}^{N-1}\delta_{\tilde{\eta}_i}$ は $\mathfrak{m}$ を Markov–Krein 対応で引き戻した τ に確率弱収束する．

注意 1.2.
1. 重要なランダム行列の二種類のクラス GUE(Gaussian Unitary Ensemble) と Wishart 行列はユニタリ共役不変である．
2. この予想はランダム行列理論における folklore—すなわち多くの研究者が主張は成り立つと認識しているがどこにその正しい証明があるのか知らない—だったようである．

本稿ではどのようにしてこの主張が成り立つのかを説明する．なお，より詳しい説明また証明については参考文献，とくに論文 [6] を参照してほしい．

2 準備

主張と主結果について詳しく述べるためこの節ではいくつか必要な定義と記号を紹介しておく．

2.1 自由確率論

定義 2.1. n を自然数とする．集合 $\{1,2,\dots,n\}$ を $[n]$ で表す．

1. $[n]$ の分割 ρ とは $[n]$ の部分集合族で, 空集合を持たず, どの共通部分も空集合で, 和集合が $[n]$ に一致するもの, すなわち:
$$\bigsqcup_{V\in\rho} V = [n], \qquad V \neq \emptyset \ \ (V\in\rho), \qquad V_1\cap V_2 = \emptyset \ \ (V_1, V_2 \in \rho,\ V_1 \neq V_2).$$
分割 $\rho \in \mathrm{P}(n)$ の要素 $V \in \rho$ をブロックという．そして $[n]$ の分割全体を $\mathrm{P}(n)$ で表す．
2. 分割 $\rho \in \mathrm{P}(n)$ が交差しているとは, あるブロック $V_1, V_2 \in \rho$ $(V_1 \neq V_2)$ が存在し, 各 V_1, V_2 に要素 $i_1, i_2 \in V_1$, $j_1, j_2 \in V_2$ があって,
$$i_1 < j_1 < i_2 < j_2,$$
となるときにいう．$\mathrm{P}(n)$ のうち, 交差していないものを非交差分割と呼び, その全体を $\mathrm{NC}(n)$

で表す.

3. $\mathrm{NC}(n)$ には次のようにして順序を定めることができる: $\rho, \nu \in \mathrm{NC}(n)$ について任意の $V \in \rho$ に対してある $V' \in \nu$ が存在して $V \subset V'$ となるとき,

$$\rho \leq \nu$$

と表す.

注意 2.2. 順序集合 $\mathrm{NC}(n)$ は以下の性質をみたす.

1. $\mathrm{NC}(n)$ には最小元 0_n と最大元 1_n が存在する:

$$0_n = \{\{1\}, \ldots, \{n\}\}, \quad 1_n = \{\{1, \ldots, n\}\}.$$

2. $\mathrm{NC}(n)$ は束となる.
3. とくに $\mathrm{NC}(n)$ は有限半順序集合であるから Möbius 関数 μ_n を持つ.

さらに $\mathrm{NC}(n)$ には Kreweras complement と呼ばれる反順序自己同型写像がある.

定義 2.3. $\mathrm{NC}(n)$ の元 ρ に対し, 新たな元 $K(\rho) \in \mathrm{NC}(n)$ を次のようにして定める:

step1: ρ は $[n] = \{1, \ldots, n\}$ の分割であった. $1, \ldots, n$ に対し, $\overline{1}, \ldots, \overline{n}$ を間に差し込む:

$$1\ \overline{1}\ 2\ \overline{2}\ \ldots\ n\ \overline{n}.$$

step2: このとき $[\overline{n}] = \{\overline{1}, \ldots, \overline{n}\}$ と表し, $[\overline{n}]$ の分割全体を $P(\overline{n})$, 非交差分割の全体を $\mathrm{NC}(\overline{n})$ と表そう. いま任意の $\nu \in P(\overline{n})$ に対し $\rho \cup \nu$ は $\{1, \overline{1}, \ldots, n, \overline{n}\}$ の分割となる. よって, とくに $\nu \in \mathrm{NC}(\overline{n})$ で $\rho \cup \nu \in \mathrm{NC}(1, \overline{1}, \ldots, n, \overline{n})$ となるもののうち最大のものをとる. これを $K(\rho) \in \mathrm{NC}(n)$ として定める.

この対応 $K\colon \mathrm{NC}(n) \longrightarrow \mathrm{NC}(n)$ を Kreweras complement と呼ぶ.

命題 2.4. [15, Exercise 9.23.] Kreweras complement について, 以下の性質が成り立つ:

1. $\gamma_n = (1, \ldots, n) \in \mathfrak{S}_n$ を巡回置換とする. このとき $\gamma_n\colon [n] \longrightarrow [n]$ より, 誘導される写像

$$\gamma_n^*\colon \mathrm{NC}(n) \longrightarrow \mathrm{NC}(n),$$

すなわち $\rho = \{V_1, \ldots, V_r\} \in \mathrm{NC}(n)$ に対し, $\gamma_n^*(\rho) = \{\gamma_n^{-1}(V_1), \ldots, \gamma_n^{-1}(V_r)\}$ が存在する. とくに Kreweras complement について $K^2(\rho) = \gamma_n^*(\rho)$ が成り立つ.

2. 1. より, K^{2n} は恒等写像に等しいので, とくに Kreweras complement K は全単射である.
3. Kreweras complement K は順序反転な同型写像, すなわち $\rho, \nu \in \mathrm{NC}(n)$, $\rho \leq \nu$ に対し, $K(\nu) \leq K(\rho)$ となる.
4. 任意の $\rho \in \mathrm{NC}(n)$ について

$$|\rho| + |K(\rho)| = n + 1 \tag{2.1}$$

が成り立つ.

これから NC(n) の Möbius 関数 μ_n と Kreweras complement の関わりをみよう．NC(n) の最小限 0_n と最大元 1_n を用いた μ_n の値 s_n を

$$s_n = \mu_n(0_n, 1_n), \quad n \geq 1$$

として定める．一般に次の命題が成り立つ:

命題 2.5. [15, Proposition 10.15.] $n \geq 1$ とする．このとき

$$s_n = (-1)^{n-1} C_{n-1}$$

が成り立つ．ここで, C_{n-1} は $(n-1)$ 番目の Catalan 数である．

命題 2.6. $(\rho, \nu) \in \mathrm{NC}(n)^{(2)}$ とするとき, 区間 $[\rho, \nu]$ は以下のような自然な分解を持つ:

$$[\rho, \nu] \cong \mathrm{NC}(1)^{t_1} \times \mathrm{NC}(2)^{t_2} \times \cdots \times \mathrm{NC}(n)^{t_n}.$$

したがって,

$$\mu_n(\rho, \nu) = {s_1}^{t_1} {s_2}^{t_2} \cdots {s_n}^{t_n}$$

が成り立つ．とくに $\rho = \{V_1, \ldots, V_k\} \in \mathrm{NC}(n)$ に対し, $\mu_n(\rho) = \mu_n(0_n, \rho)$ と表すことにすると

$$\mu_n(\rho) = \prod_{1 \leq i \leq k} (-1)^{|V_i|-1} C_{|V_i|-1} \tag{2.2}$$

となる．

これまでに説明してきた Möbius 関数 μ_n を用いて自由キュムラントを定めていこう．

定義 2.7. $\mathcal{A}$ を単位元 $1_{\mathcal{A}}$ を持つ $\mathbb{C}$-代数で $\varphi\colon \mathcal{A} \longrightarrow \mathbb{C}$ を $\mathbb{C}$-線型汎関数で $\varphi(1_{\mathcal{A}}) = 1$ とする．このとき $(\mathcal{A}, \varphi)$ を代数的確率空間と呼ぶ.

定義 2.8. $(\mathcal{A}, \varphi)$ を代数的確率空間とする．

1. $\mathcal{A}^n = \mathcal{A} \times \cdots \times \mathcal{A}$ に上の n 重線型汎関数 φ_n を

$$\varphi_n[a_1, \ldots, a_n] = \varphi(a_1 \cdots a_n),$$

   で定める．
2. 任意の $\rho = \{V_1, \ldots, V_l\} \in \mathrm{NC}(n)$ に対して φ_ρ を以下のように定める:

$$\varphi_\rho[a_1, \ldots, a_n] = \prod_{1 \leq j \leq l} \varphi_{|V_j|}[a_{i_1}, \ldots, a_{i_p}],$$

   ここで各 $1 \leq j \leq l$ に対し $V_j = \{i_1 < \cdots < i_p\}$ である．
3. 任意の $n \in \mathbb{N}$, $\rho \in \mathrm{NC}(n)$ に対し R_ρ を

$$\mathrm{R}_\rho[a_1, \ldots, a_n] = \sum_{\nu \leq \rho} \varphi_\nu[a_1, \ldots, a_n] \mu(\nu, \rho),$$

   として定める．

Möbius 関数の性質と上の定義 2.8 から次の定理が従う.

命題 2.9. 任意の $n \in \mathbb{N},\ \rho = \{V_1, \ldots, V_l\} \in \mathrm{NC}(n)$ に対し, 以下が成り立つ:

$$\varphi_\rho[a_1, \ldots, a_n] = \sum_{\nu \leq \rho} \mathrm{R}_\nu[a_1, \ldots, a_n], \tag{2.3}$$

$$\mathrm{R}_\rho[a_1, \ldots, a_n] = \sum_{\nu \leq \rho} \varphi_\nu[a_1, \ldots, a_n]\mu_n(\nu, \rho), \tag{2.4}$$

$$\mathrm{R}_\rho[a_1, \ldots, a_n] = \prod_{1 \leq j \leq l} \mathrm{R}_{|V_j|}[a_{i_1}, \ldots, a_{i_p}]. \tag{2.5}$$

ここで各 $1 \leq j \leq l$ に対し $V_j = \{i_1 < \cdots < i_p\}$ である. 上記の等式 (2.3) から (2.5) をまとめて自由確率論のモーメント・キュムラント公式と呼ぶ.

最後に非交差分割全体 $\mathrm{NC}(n)$ が対称群 $\mathfrak{S}_n$ 内の単位元 e から巡回置換 γ_n への測地線集合として埋め込まれることをみよう. まず, よく知られているように対称群 $\mathfrak{S}_n$ は互換によって生成される. σ の長さ $|\sigma|$ を σ の互換の積による最小実現数として定める.

$$|\sigma| = \min\{l \mid \sigma = \pi_1 \cdots \pi_l \ (\text{ここで } \pi_j \text{ はすべて互換})\}.$$

次に対称群 $\mathfrak{S}_n$ 上に距離を定める.

定義 2.10.

1. $\sigma, \pi \in \mathfrak{S}_n$ に対し, その距離 $d(\sigma, \pi)$ を $d(\sigma, \pi) = |\sigma^{-1}\pi|$ で定める.
2. 巡回置換 $\gamma_n = (1, \ldots, n) \in \mathfrak{S}_n$ に対し, 単位元 e から γ_n までの測地線集合 $\mathfrak{S}_{\mathrm{NC}}(\gamma_n)$ を

$$\begin{aligned}\mathfrak{S}_{\mathrm{NC}}(\gamma_n) &= \{\sigma \in \mathfrak{S}_n \mid d(e, \sigma) + d(\sigma, \gamma_n) = d(e, \gamma_n)\} \\ &= \{\sigma \in \mathfrak{S}_n \mid |\sigma| + |\sigma^{-1}\gamma_n| = n - 1\}\end{aligned}$$

   として定める.
3. $\sigma, \pi \in \mathfrak{S}_{\mathrm{NC}}(\gamma_n)$, すなわち σ と π はそれぞれ単位元 e から γ_n までの測地線上にあるとする. このとき, σ が π と同一の測地線上にあり, かつ π よりも e に近い, すなわち

$$d(e, \sigma) + d(\sigma, \pi) = d(e, \pi) \iff |\sigma| + |\sigma^{-1}\pi| = |\pi|$$

   が成り立つとき, $\sigma \leq \pi$ と表すことにする. これは $\mathfrak{S}_{\mathrm{NC}}(\gamma_n)$ における順序となる.

$[n]$ の分割全体 $\mathrm{P}(n)$ から対称群 $\mathfrak{S}_n$ への対応 $\mathcal{P}$ を次のようにして与える:

step1: $\rho = \{V_1, \ldots, V_l\} \in \mathrm{P}(n)$ とする. このとき ρ の各ブロック $V_j \in \rho$ $(1 \leq j \leq l)$ に対し $V = \{i_1, \ldots, i_p\}$ を単調増加になるように表示しよう.

step2: ρ の各ブロック V_j について巡回置換 $\pi_j = (i_1, \ldots, i_p)$ を対応させ, $\mathcal{P}(\rho)$ をその積として定める:

$$\mathcal{P}_\rho = \pi_1 \cdots \pi_l.$$

対応 $\mathcal{P}\colon \mathrm{P}(n) \longrightarrow \mathfrak{S}_n$ を非交差分割 $\mathrm{NC}(n)$ 上に制限すると, 次の重要な定理が成り立つ:

定理 2.11. [15, Proposition 23.23.] 対応 $\mathcal{P}\colon \mathrm{P}(n) \longrightarrow \mathfrak{S}_n$ について $\mathrm{NC}(n)$ 上に制限したもの

$$\mathcal{P}\colon \mathrm{NC}(n) \longrightarrow \mathfrak{S}_{\mathrm{NC}}(\gamma_n)$$

は順序同型写像となる.

注意 2.12. この定理から以下のことが直ちに従う: $\mathrm{NC}(n)$ と $\mathfrak{S}_{\mathrm{NC}}(\gamma_n)$ は順序同型であるから, とくに Möbius 関数が一致している. よって同一の記号 μ_n によって表そう. いま $\sigma \in \mathfrak{S}_{\mathrm{NC}}(\gamma_n)$ のサイクル分解が $\sigma = \pi_1 \cdots \pi_l$ とすると, 命題 2.6 の式 (2.2) より

$$\mu_n(\sigma) = \prod_{1 \le j \le l} (-1)^{|\pi_j|} C_{|\pi_j|} = (-1)^{|\sigma|} \prod_{1 \le j \le l} C_{|\pi_j|}. \tag{2.6}$$

2.2 ユニタリ共役不変な行列と Haar ユニタリ行列

エルミート行列の固有値について以下の命題が成り立つことが知られている.

命題 2.13 (Cauchy interlacing theorem)**.** $N \times N$ エルミート行列 $A_N = (a_{ij})_{1 \le i,j \le N}$ の固有値が

$$\lambda_1(A_N) \le \cdots \le \lambda_N(A_N)$$

であるとする. このとき, A_N の主小行列 $\widetilde{A}_N = (a_{ij})_{1 \le i,j \le N-1}$ の固有値が

$$\lambda_1(\widetilde{A}_N) \le \cdots \le \lambda_{N-1}(\widetilde{A}_N)$$

であるとき, これらの固有値列は interlace する. すなわち

$$\lambda_i(A_N) \le \lambda_i(\widetilde{A}_N) \le \lambda_{i+1}(A_N)$$

が任意の $1 \le i \le N-1$ において成り立つ.

またユニタリ共役不変なランダムエルミート行列は Haar ユニタリ行列を用いて対角化できる.

命題 2.14. [3, Proposition 6.1.] A_N はユニタリ共役不変なランダムエルミート行列とする. このとき $A_N = {U_N}^* D_N U_N$ がほとんど確実に成り立つ. ここで

- U_N は Haar ユニタリ行列.
- D_N は A_N の固有値を大きさ順に並べ対角行列にしたもの.
- U_N と D_N は独立.

定義 2.15. $k \le N$ を自然数, $U_N = (u_{ij})_{1 \le i,j \le N}$ を Haar ユニタリ行列とする. 各 $\sigma \in \mathfrak{S}_k$ について Weingarten 関数 $\mathrm{Wg}(\sigma, N)$ を次の式で定める:

$$\mathrm{Wg}(\sigma, N) = \mathbb{E}[u_{11} u_{22} \cdots u_{kk} \overline{u_{1\sigma(1)} u_{2\sigma(2)} \cdots u_{k\sigma(k)}}].$$

注意 2.16. Weingarten 関数が類関数であること, すなわち

$$\mathrm{Wg}(\pi^{-1}\sigma\pi, N) = \mathrm{Wg}(\sigma, N) \qquad \sigma, \pi \in \mathfrak{S}_k$$

は定義式から計算することで直ちにわかる.

Weingarten 関数について, 次の公式が成り立つ:

命題 2.17. [5, Proposition 2.3.] A_i, B_i $(i = 1, \ldots, k)$ を $N \times N$ 行列とする. このとき, 任意の $\sigma \in \mathfrak{S}_k$ について

$$\begin{aligned}&\mathbb{E} \circ \mathrm{Tr}_\sigma[A_1 U_N B_1 U_N{}^*, \ldots, A_k U_N B_k U_N{}^*] \\ &\quad = \sum_{\substack{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3 \in \mathfrak{S}_k \\ \sigma_1\sigma_2\sigma_3 = \sigma}} \mathrm{Tr}_{\sigma_1}[A_1, \ldots, A_k]\, \mathrm{Tr}_{\sigma_2}[B_1, \ldots, B_k]\, \mathrm{Wg}(\sigma_3, N)\end{aligned}$$

が成り立つ. とくに σ として $\gamma_k = (1, 2, \ldots, k)$ を取れば,

$$\begin{aligned}&\mathbb{E} \circ \mathrm{Tr}[(A_1 U_N B_1 U_N{}^*) \cdots (A_k U_N B_k U_N{}^*)] \\ &\quad = \sum_{\sigma, \pi \in \mathfrak{S}_k} \mathrm{Tr}_\sigma[A_1, \ldots, A_k]\, \mathrm{Tr}_\pi[B_1, \ldots, B_k]\, \mathrm{Wg}(\pi^{-1}\sigma^{-1}\gamma_k, N)\end{aligned}$$

となる.

注意 2.18. $\mathrm{Tr}_\sigma[A_1, \ldots, A_k]$ は定義 2.8 における φ_ρ の定め方と同様, サイクル分解 $\sigma = \pi_1 \cdots \pi_l \in \mathfrak{S}_k$ に対して

$$\mathrm{Tr}_\sigma[A_1, \ldots, A_k] = \prod_{1 \leq j \leq l} \mathrm{Tr}[A_{i_1}, \ldots, A_{i_p}],$$

と定めている. ここで各 $1 \leq j \leq l$ に対し $\pi_j = (i_1, \cdots, i_p)$ である.

とくに Weingarten 関数は以下のような漸近展開を持つことが知られている:

定理 2.19. [4, Theorem 2.7.] $k \leq N$ を自然数, $\sigma \in \mathfrak{S}_k$ とする. このとき

$$N^{k+|\sigma|}\, \mathrm{Wg}(\sigma, N) = \mu_k(\sigma) + O\left(\frac{1}{N^2}\right),$$

ここで, $\mu_k(\sigma)$ とは σ の巡回置換分解が $\sigma = \pi_1 \cdots \pi_l$ であったとき

$$\mu_k(\sigma) = \prod_{1 \leq j \leq l} (-1)^{|\pi_j|} C_{|\pi_j|}$$

として定まる値である.

注意 2.20. これは式 (2.6) における $\mu_k(\sigma)$ と完全に一致しているため, 同一の記号を用いている.

2.3 Markov–Krein 対応

この節では有限離散の場合における Markov–Krein 対応を説明する. すなわち interlace する数列と対応する折れ線図形, そして Rayleigh 測度と Kerov 推移測度という二つの測度の対応である. 参考文献は主に [8],[10], [11],[12] である.

定義 2.21. 二つの実数列 $\{x_i\}_{i=1}^N$, $\{y_j\}_{j=1}^{N-1}$ が

$$x_1 \leq y_1 \leq x_2 \leq y_2 \leq \cdots \leq y_{N-1} \leq x_N$$

となるとき interlace しているという.

Interlace する数列の組 $\{x_i\}_{i=1}^N$, $\{y_j\}_{j=1}^{N-1}$ に対しそれぞれ $\{x_i\}_{i=1}^N$ を極小値に，$\{y_j\}_{j=1}^{N-1}$ を極大値に持つ傾き ± 1 の連続関数 ω が対応する．いま折れ線図形の全体を $\mathcal{D}_0$ として表す．

折れ線図形 ω と intelace する数列 $\{x_i\}_{i=1}^N$, $\{y_j\}_{j=1}^{N-1}$ の間には一対一の対応があり, また

$$\frac{1}{2}\omega''(t)dt = \sum_{i=1}^{N}\delta_{x_i}(t)dt - \sum_{j=1}^{N-1}\delta_{y_j}(t)dt$$

という関係がある．

ここで右辺に現れている実測度を τ と書き, $\{x_i\}_{i=1}^N$, $\{y_j\}_{j=1}^{N-1}$ から定まる Rayleigh 測度と呼ぶ. すなわち

$$\tau = \sum_{i=1}^{N}\delta_{x_i} - \sum_{j=1}^{N-1}\delta_{y_j}.$$

Interlace する数列 $\{x_i\}_{i=1}^N$, $\{y_j\}_{j=1}^{N-1}$ と, 折れ線図形 ω, Rayleigh 測度 τ の間にはそれぞれ一対一の対応がある．したがって, これらを以後同一のものとみなす．

次に interlace する数列 $\omega = (\{x_i\}_{i=1}^N, \{y_j\}_{j=1}^{N-1})$ に対して有理関数

$$\frac{(z-y_1)\cdots(z-y_{N-1})}{(z-x_1)\cdots(z-x_N)}, \quad z \in \mathbb{C}$$

を定め, その部分分数分解を

$$\frac{(z-y_1)\cdots(z-y_{N-1})}{(z-x_1)\cdots(z-x_N)} = \frac{u_1}{z-x_1} + \cdots + \frac{u_N}{z-x_N}, \quad z \in \mathbb{C} \tag{2.7}$$

としよう．このとき留数 $\{u_i\}_{i=1}^N$ について次の性質が成り立つ．

$$u_i > 0, \qquad \sum_{i=1}^{N} u_i = 1.$$

この $\{u_i\}_{i=1}^N$ を用いて有限集合 $\{x_i\}_{i=1}^N$ を台に持つ確率測度 $\mathfrak{m}_\omega$ を定める:

$$\mathfrak{m}_\omega = \sum_{i=1}^{N} u_i \delta_{x_i}.$$

これを ω から定まる Kerov 推移測度と呼ぶ.

有限集合を台に持つ確率測度の全体を $\mathcal{M}_0$ とすると, 上記の対応 $\omega \longrightarrow \mathfrak{m}_\omega$ は $\mathcal{D}_0$ から $\mathcal{M}_0$ への全単射対応となっている．これを有限離散の場合における Markov–Krein 対応と呼ぼう．

とくにモーメントについて注目すべき性質があることに注意したい．いま, $\mathfrak{m} = \sum_{i=1}^N u_i\delta_{x_i}$ と $\tau = \sum_{i=1}^N \delta_{x_i} - \sum_{j=1}^{N-1}\delta_{y_j}$ が Markov–Krein 対応によって結ばれているとする．このとき有理関数の等式 (2.7) が成り立っている．これを exp や log, そしてその級数展開を用いて式変形することにより, 母関数の関係式

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\mathrm{M}_n(\mathfrak{m})}{z^n} = \exp\left(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\mathrm{M}_k(\tau)}{k}\frac{1}{z^k}\right), \qquad |z| \gg 1 \tag{2.8}$$

が成り立つことがわかる．したがって, $\mathfrak{m}$ と τ のそれぞれのモーメント $\{\mathrm{M}_n(\mathfrak{m})\}_{n\in\mathbb{N}}$ と $\{\mathrm{M}_k(\tau)\}_{k\in\mathbb{N}}$ の関係は完全対称関数とべき和対称関数の間の関係と同一である．

なおここで述べた結果は連続に拡張することができる ([11]).

3　詳しい問題設定と主結果

ユニタリ共役不変なランダム行列 A_N の固有値分布を $\Lambda_N = (\lambda_1^{(N)} \le \cdots \le \lambda_N^{(N)})$，経験固有値分布を $\mathfrak{m}_N = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^N \delta_{\lambda_i^{(N)}}$ とおく．いま $N \to \infty$ において $\mathfrak{m}_N$ がある確率測度 $\mathfrak{m}$ にモーメント確率収束し, k 次モーメントもそれぞれ期待値が有界であるという仮定する．すなわち

$$\sup_{N\ge 1} \mathbb{E}[\mathrm{M}_k(\mathfrak{m}_N)] < \infty \quad \text{and} \quad \mathrm{M}_k(\mathfrak{m}) < \infty, \qquad k \in 2\mathbb{N}$$

$$\lim_{N\to\infty} \mathbb{P}[|\mathrm{M}_k(\mathfrak{m}_N) - \mathrm{M}_k(\mathfrak{m})| \ge \epsilon] = 0, \qquad k \in \mathbb{N},\ \epsilon > 0.$$

いま Markov–Krein 対応によって $\mathfrak{m}$（resp.$\mathfrak{m}_N$）には τ（resp.τ_N）がその Rayleigh 測度として対応しているとしよう．とくにここで $\tau_N = \sum_{i=1}^N \delta_{\lambda_i^{(N)}} - \sum_{j=1}^N \delta_{\eta_j^{(N)}}$ であり, 各 $H_N = (\eta_1^{(N)} \le \cdots \le \eta_{N-1}^{(N)})$ は Λ_N に対し interlace している:

$$\lambda_1^{(N)} \le \eta_1^{(N)} \le \lambda_2^{(N)} \le \eta_2^{(N)} \le \cdots \le \lambda_{N-1}^{(N)} \le \eta_{N-1}^{(N)} \le \lambda_N^{(N)}.$$

またそれぞれモーメント $\{\mathrm{M}_n(\mathfrak{m})\}_{n\in\mathbb{N}}$ (resp.$\{\mathrm{M}_n(\mathfrak{m}_N)\}_{n\in\mathbb{N}}$) と $\{\mathrm{M}_k(\tau_N)\}_{k\in\mathbb{N}}$ (resp.$\{\mathrm{M}_k(\tau)\}_{k\in\mathbb{N}}$) の間には完全対称関数とべき和対称関数の対応があることから $\mathfrak{m}_N$ が $\mathfrak{m}$ にモーメント確率収束することと, τ_N が τ にモーメント確率収束することは同値である．

一方, A_N はエルミート行列であるから命題 2.13(Cauchy interlacing theorem) より, その主小行列 $\widetilde{A}_N$ の固有値分布 $\widetilde{H}_N = (\tilde{\eta}_1^{(N)} \le \cdots \le \tilde{\eta}_{N-1}^{(N)})$ も同様に Λ_N に対し interelace している:

$$\lambda_1^{(N)} \le \tilde{\eta}_1^{(N)} \le \lambda_2^{(N)} \le \tilde{\eta}_2^{(N)} \le \cdots \le \lambda_{N-1}^{(N)} \le \tilde{\eta}_{N-1}^{(N)} \le \lambda_N^{(N)}.$$

この interlace している固有値分布 $\Lambda_N, \widetilde{H}_N$ を用いて Rayleigh 測度 $\tilde{\tau}_N = \sum_{i=1}^N \delta_{\lambda_i^{(N)}} - \sum_{j=1}^{N-1} \delta_{\tilde{\eta}_j^{(N)}}$ を定める．

このとき, 以下の結果が成り立つ:

定理 3.1. $\tilde{\tau}_N$ は τ にモーメント確率収束する．

証明の鍵は節 2.2 で紹介した命題 2.17 である．とくに $\mathrm{M}_k(\tau_N)$ を公式を用いて展開し，自由確率論的な式変形を使いながら計算を進めていくと, 次の定理が示唆される．

定理 3.2. $\mathfrak{m}$ を確率測度, τ をその Rayleigh 測度とする．このとき

$$\mathrm{M}_k(\tau) = \sum_{\rho\in\mathrm{NC}(k)} (k+1-|\rho|)\,\mathrm{R}_\rho(\mathfrak{m}) \tag{3.1}$$

が成り立つ．ここで, $\mathrm{NC}(k)$ は $\{1,\ldots,k\}$ の非交差分割で $\mathrm{R}_\rho(\mathfrak{m})$ は, $\mathfrak{m}$ の自由キュムラントである．

この等式は M.Lassalle が 2009 年に得ていた公式を非交差分割を用いて書き直すことによって得られる ([14])．論文 ([6]) の中では非交差分割の組み合わせ的構造に注目した別証明を与えた．

参考文献

[1] A. Bufetov, “*Kerov’s interlacing sequences and random matrices*”, Journal of Mathematical Physics, Volume 54, 2013.

[2] P. Biane, “*Representations of symmetric groups and free probability*”, Advances in Mathematics, Volume 138, 126-181, 1998.

[3] B. Collins, and C. Male, “*The strong asymptotic freeness of Haar and deterministic matrices*”, Annales scientifiques de l’École normale supérieure, Volume 47, 147-163, 2014.

[4] B. Collins, and S. Matsumoto, “*Weingarten calculus via orthogonality relations: new applications*”, Latin American Journal of Probability and Mathematical Statistics. Volume 14, 631-656, 2017.

[5] B. Collins, and P. Śniady, “*Integration with respect to the Haar measure on unitary, orthogonal and symplectic group*”, Communications in Mathematical Physics, Volume 264, 773-795, 2006.

[6] K. Fujie and T. Hasebe, The spectra of principal submatrices in rotationally invariant hermitian random matrices and the Markov–Krein correspondence, Latin American Journal of Probability and Mathematical Statistics, to appear. arXiv:2103.09025

[7] G. Goel and A. Yao, “*A quantized analogue of the Markov–Krein correspondence*”, arXiv preprint arXiv:2011.10724, 2020

[8] 洞彰人, “対称群の表現とヤング図形集団の解析学”, 数学書房, 2017.

[9] S. Kerov, “*Asymptotics of the separation of roots of orthogonal polynomials*”, St. Petersburg Mathematical Journal, Volume 5, 925-941, 1994.

[10] S. Kerov, “*Transition probabilities for continual Young diagrams and the Markov moment problem*”, Functional Analysis and its Applications, Volume 27, 104-117, 1993.

[11] S. Kerov, “*Interlacing measures*”, American Mathematical Society Translations, 35-84, 1998.

[12] S. Kerov, “*Asymptotic representation theory of the symmetric group and its applications in analysis*”, Translations of Mathematical Monographs, American Mathematical Society, 2003.

[13] 木村太郎, “ランダム行列の数理”, 森北出版, 2021.

[14] M. Lassalle, “*Jack polynomials and free cumulants*”, Advances in Mathematics, Volume 222, 2227–2269, 2009.

[15] A. Nica and R. Speicher, “*Lectures on the combinatorics of free probability*”, Cambridge University Press, 2006.

[16] D. Voiculescu, K. Dykema and A. Nica, “*Free Random Variables*”, American Mathematical Society, 1992.