半線型常微分方程式系に対する解の爆発レート評価

大阪大学大学院 基礎工学研究科 システム創成専攻
曺永旻 (Youngmin CHO)

1　導入

反応拡散方程式は自然科学, 特に化学物理学, 個体群生態学, 生物医学における多くの現象を表す数理モデルである ([11]). 反応拡散方程式は主に連続的な空間領域で議論されているが, 最近の研究では離散的な空間領域上の反応拡散方程式を考えることも多くある ([8], [9], [10]). 個体群生態学に現れる, 川で繋がっている湖や島など離れている生息地に住んでいる生物の間の相互作用を考える状況では離散的な空間領域を考えることが連続的な空間領域を考えることより自然だからである. 一つの例としては, 2 つの個体群が競争してどちらの個体群の増殖率も減少し, それぞれの個体群の一部は他の離れた生息地への移住することを同時に考えることができる. Levin [5] と Slavíc [8] はこのような状況を表すモデルとしてグラフ上の Lotka-Volterra 競争モデルを考え, 定常状態が存在することや解の漸近挙動などを議論した.

上記の例でグラフ上のモデルを考えたように, 離散的な空間領域はグラフとして考えることができる. 特にグラフの頂点の数が有限個なら, グラフ上の反応拡散方程式は常微分方程式系で表すことができる. 自然現象を微分方程式で数理モデル化するとき, 多くの場合にはそのモデルの時間大域的な安定性を調べる. しかし, 一般に常微分方程式系の解が必ず時間大域的に存在するとは限らない. 実際, $p > 1$ とし, 常微分方程式の初期値問題

$$\dot{x}(t) = x(t)^p, \quad x(0) = a \in \mathbb{R} \tag{1}$$

を $t \in \mathbb{R}$ で解くと,

$$x(t) = \frac{1}{(a^{-(p-1)} - t)^{\frac{1}{p-1}}}$$

となり, t が $a^{-(p-1)}$ に近づくとき $|x(t)|$ は無限大に発散する. つまり, $x(t)$ は有限時間 $a^{-(p-1)}$ で爆発する. 単独な方程式でも必ず時間大域解が存在するとは限らないので, 常微分方程式系に対しても同様に言える. よって, 数理モデル化した微分方程式の安定性を調べるだけでなく, 有限時間爆発などの不安定性も調べることが必要である.

有限時間爆発解は, その爆発の”速さ”で特徴づけることができる. 例えば, 次の常微分方程式

$$\dot{x}(t) = -x(t) + x(t)^2, \quad x(0) = a \in \mathbb{R} \tag{2}$$

を $t \in \mathbb{R}$ で解くと, 特に $a > 1$ のときは

$$x(t) = \frac{1}{1 - (1 - a^{-1})e^t}$$

となり, $x(t)$ は有限時間 $T := \log\{1/(1-a^{-1})\}$ で爆発する．さらに,Taylor 展開により

$$\frac{1}{1-(1-a^{-1})e^t} \simeq \frac{1}{(T-t)^1}$$

となるので, その爆発の"速さ"は $T-t$ の指数 1 で決められる．この指数を有限時間爆発解に対する爆発レートという．さらに, この例での爆発レート 1 は $\dot{x}(t) = x(t)^2$ の解の爆発レートと一致する．このように, 解の爆発レートは方程式において増大に関わる項 $x(t)^2$ の指数 2 に依存する．この指数 2 を $x(t)^2$ の増大レートという．例 (1) を参考すると, 例 (2) での増大レート 2 を一般の $p > 1$ に替えたら解の爆発レートは $1/(p-1)$ であることが予想される．

以上の議論では 2 つの常微分方程式の解を直接求めた上で, 増大レートと爆発レートの関係を考察した．しかし, 常微分方程式系を考えるとき具体的な関数として解を求めることはほとんど不可能である．よって, 常微分方程式系に対して増大レートと解の爆発レートを考察するためには他の議論が必要である．さらに, 増大に関する項が必ず多項式で表されるとは限らないことから, 増大の条件をより一般化したとき, 増大項の増大レートと解の爆発レートの関係についても考察する必要である．

本講演では, 増大を制御した常微分方程式系の初期値問題を考える．この問題に対する有限時間爆発解が存在するとき, 増大制御と解の爆発レートの関係を述べる．

2　問題設定および主結果

次の半線型常微分方程式系

$$\begin{cases} \dfrac{d\vec{u}}{dt}(t) = A\vec{u}(t) + \vec{f}(\vec{u}(t)), \quad t \in (0, T_{\max}), \\ \vec{u}(0) = \vec{u}_0. \end{cases} \tag{P}$$

を考える．　ここで, A は $N\times N$ 不定値行列である. つまり, A は対称行列であり, 任意の $\vec{x} \in \mathbb{R}^N\setminus\{0\}$ に対して内積 $\vec{x}\cdot A\vec{x}$ は負の値をもつ．$\vec{u}_0 \in \mathbb{R}^N$ は与えられら初期値である．問題 (P) に対して, 解 $\vec{u}$ は古典的な意味で考える．また, $T_{\max} = T_{\max}(\vec{u}_0)$ は問題 (P) に対する解の最大存在時間とする．すなわち, 全ての $T < T_{\max}$ に対して解 $\vec{u}$ は $[0,T]$ から $\mathbb{R}^N$ への連続関数で, $(0,T]$ 上で連続的微分可能である．最大存在時間 $T_{\max}$ が無限大のとき, 問題 (P) の解は時間大域的に存在するといい, 解 $\vec{u}$ を時間大域解という．一方, 最大存在時間 $T_{\max}$ が有限ならば, 問題 (P) の解 $\vec{u}$ に対して $\lim_{t\to T_{\max}} |\vec{u}(t)| = +\infty$ が成り立つ．このとき, 問題 (P) の解 $\vec{u}$ は有限時間で爆発するといい, また $\vec{u}$ を有限時間爆発解という．

任意の $\vec{x} = (x_1, \cdots, x_N) \in \mathbb{R}^N$ に対して, $|\vec{x}| := \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_N^2}$ とかく．$\mathbb{R}^N$ 上の $\mathbb{R}^N$-値関数 $\vec{f}$ は, 以下の三条件をみたすとする．

(LL) 関数 $\vec{f}$ は局所 Lipschitz 連続である．つまり, 任意の $R > 0$ に対して, ある $\Lambda(R) \geqslant 0$ が存在して, 任意の $\vec{x}, \vec{y} \in B_R(\vec{0})$ に対して

$$|\vec{f}(\vec{x}) - \vec{f}(\vec{y})| \leqslant \Lambda(R)|\vec{x} - \vec{y}|$$

をみたす．

(G) ある $p > 2$, $K > 0$, $L > 0$ が存在して,　任意の $\vec{x} \in \mathbb{R}^N$ に対して, $|\vec{x}| \geqslant L$ ならば $|\vec{f}(\vec{x})| \leqslant K|\vec{x}|^{p-1}$ が成り立つ．

(AR) ある $\mu > 2$ およびある $F \in C^1(\mathbb{R}^N;\mathbb{R})$ が存在して, $\nabla F = \vec{f}$ かつ任意の $\vec{x} \in \mathbb{R}^N \setminus \{\vec{0}\}$ に対して $0 < \mu F(\vec{x}) \leqslant \vec{x} \cdot \vec{f}(\vec{x})$ が成り立つ.

条件 (LL) は局所解の存在と一意性を示すときの標準的な仮定である. この条件は非斉次方程式に対して標準的な条件であるが, 半線型方程式に対しても同じ条件が使われることに注意されたい. 条件 (G) は関数 $\vec{f}$ の上からの増大制御を表している. 条件 (AR) は Ambrosetti-Rabinowitz 条件と呼ばれるものである. 条件 (AR) は問題 (P) において, 関数 $\vec{f}$ の下からの増大制御を与える.

命題 2.1. 条件 (AR) のもとで, 任意の $\varepsilon > 0$ に対して C_ε が存在して, 任意の $\vec{x} \in \mathbb{R}^N$ が $|\vec{x}| > \varepsilon$ をみたすとき,

$$|\vec{f}(\vec{x})| \geqslant \mu C_\varepsilon |\vec{x}|^{\mu-1}$$

が成り立つ. ■

条件 (G) と (AR) により, 原点から十分離れた $\vec{x} \in \mathbb{R}^N$ に対して

$$C|\vec{x}|^{\mu-1} \leqslant |\vec{f}(\vec{x})| \leqslant K|\vec{x}|^{p-1}$$

と書くことができる. 右辺の $p-1$ を $\vec{f}$ の上からの増大レートという. 同様に, 左辺の $\mu-1$ を $\vec{f}$ の下からの増大レートという.

主定理を述べる.

定理 2.2 (有限時間爆発解に対する爆発レート評価)**.** $T_{\max} < +\infty$ とし, $\vec{u}$ を問題 (P) の解とする. 条件 (G), (AR) のもとで, ある定数 C_1, $C_2 > 0$ が存在して任意の $t \in [0, T_{\max})$ に対して

$$\frac{C_1}{(T_{\max}-t)^{\frac{1}{p-2}}} \leqslant |\vec{u}(t)| \leqslant \frac{C_2}{(T_{\max}-t)^{\frac{1}{\mu-2}}}$$

が成り立つ. ■

左の評価に現れる $1/(p-2)$ を $\vec{u}$ の下からの爆発レートといい, 右の評価に現れる $1/(\mu-2)$ を $\vec{u}$ の上からの爆発レートという. 主定理において, 解に対する下からの評価は非線型項を定める $\vec{f}$ に対する上からの増大レートが解の下からの爆発レートを決めることを意味し, また解に対する上からの評価は非線型項を定める $\vec{f}$ に対する下からの増大レートが解の上からの爆発レートを決めることを意味する.

下からの爆発レート評価は微分方程式論の標準的な議論である局所解の存在時間評価により簡単に得られるため, 本講演では上からの爆発レート評価のみを取り扱う.

参考文献

[1] A. Ambrosetti, P. H. Rabinowitz, *Dual variational methods in critical point theory and applications*, J. Funct. Anal. 14(1973), 349–381.

[2] A. Friedman, B. McLeod, *Blow-up of positive solutions of semilinear heat equations*, Indiana Univ. J. 34(1985), no. 2, 425–447.

[3] Y. Giga, R. V. Kohn, *Characterizing blow-up using similarity variables*, Indiana Univ. Math. J. 36(1987), no.1, 1–40.

[4] Y. Giga, R. V. Kohn, *Nondegeneracy of blow-up for semilinear heat equations*, Comm. Pure Appl. Math. 42(1989), no. 6, 845–884.

[5] S. Levin, *Dispersion and Population Interactions*, The American Naturalist, 108(1974), 207-228.

[6] H. A. Levine, *Some nonexistence and instability theorems of formally parabolic equations of the form* $Pu_t = -Au + F(u)$, Arch. Rat. Mech. Anal. 51(1973), 371–386.

[7] L. E. Payne, D. H. Sattinger, *Saddle points and instability of nonlinear hyperbolic equations*, Israel J. Math. 22(1975), no. 3-4, 273–303.

[8] A. Slavík, *Lotka-Volterra competition model on graphs*, SIAM J. Appl. Dyn. Syst., Vol.19, No. 2, pp. 725–762.

[9] A. Slavík, *Reaction-diffusion equations on graphs: stationary states and Lyapunov functions*, Nonlinearity. 34(2021). 1854—1879.

[10] P. Stehlík, *Exponential number of stationary solutions for Nagumo equations on graphs*, J. Math. Anal. Appl. 455(2017) 1749–1764.

[11] V. Volpert, *Elliptic Partial Differential Equations: Vol. 2: Reaction-Diffusion Equations*, Monographs in Mathematics vol 104, Birkhäuser.

[12] F. B. Weissler, *An* L^∞ *blow-up estimate for a nonlinear heat equation*, Comm. Pure Appl. Math. 38(1985), no. 3, 291–295.