準線形誘引・反発型走化性方程式系の解の有界性と漸近挙動

東京理科大学大学院 理学研究科 数学専攻
千代祐太朗 (Yutaro CHIYO)

1 導入

次の走化性方程式系の初期値境界値問題の解の有界性とその漸近挙動を考える:

$$\begin{cases} u_t = \nabla\cdot\big((u+1)^{m-1}\nabla u - \chi u(u+1)^{p-2}\nabla v + \xi u(u+1)^{q-2}\nabla w\big), & x\in\Omega,\ t>0,\\ 0 = \Delta v + \alpha u - \beta v, & x\in\Omega,\ t>0,\\ 0 = \Delta w + \gamma u - \delta w, & x\in\Omega,\ t>0,\\ \nabla u\cdot\nu = \nabla v\cdot\nu = \nabla w\cdot\nu = 0, & x\in\partial\Omega,\ t>0,\\ u(x,0)=u_0(x), & x\in\Omega. \end{cases} \tag{1}$$

ここで, $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ $(n\in\mathbb{N})$ は滑らかな境界をもつ有界領域, $m,p,q\in\mathbb{R}$, $\chi,\xi,\alpha,\beta,\gamma,\delta>0$ は定数, $u_0\in C(\overline{\Omega})\setminus\{0\}$ は非負値関数であり, ν は $\partial\Omega$ の外向き単位法線ベクトルである.

問題 (1) において $m=1$, $p=q=2$ の場合は, アルツハイマー病で観測される細胞の凝縮現象を記述するモデルである. ここで, u は細胞の密度, v は化学誘引物質の濃度, w は化学忌避物質の濃度を表す. 問題 (1) は, そのモデルを一般化したものであり, 同様の一般化は Keller–Segel 系に対しても以下のようになされている:

$$\begin{cases} u_t = \nabla\cdot\big((u+1)^{m-1}\nabla u - \chi u(u+1)^{p-2}\nabla v\big),\\ v_t = \Delta v + \alpha u - \beta v. \end{cases} \tag{2}$$

特に, (2) において $m=1$, $p=2$ の場合が古典的な Keller–Segel 系である.

本研究のテーマは次の二つである:

(I) 問題 (1) の解の有界性.
(II) 問題 (1) の有界な解の漸近挙動.

まず, **(I)** に関連する先行研究と本研究の目的を説明する. Keller–Segel 系 (2) の解挙動は, 拡散項 $\nabla\cdot\big((u+1)^{m-1}\nabla u\big)$ に現れる m, 誘引項 $-\chi\nabla\cdot\big(u(u+1)^{p-2}\nabla v\big)$ に現れる p, 次元 n に関する条件により分類される. 実際, $p<m+\frac{2}{n}$ の場合は解の有界性が示されており (Tao–Winkler [**11**], Ishida et al. [**6**]), $p>m+\frac{2}{n}$ の場合は爆発解の存在が得られている (Winkler [**12**], Cieślak–Stinner [**2, 3**]). これに対して, 反発項 $\xi\nabla\cdot\big(u(u+1)^{q-2}\nabla w\big)$ を含む問題 (1) では, 別の観点で解挙

動を分類する結果が, 特別な場合に知られている. 実際, $m=1$, $p=q=2$ のとき, $\chi\alpha-\xi\gamma<0$ の場合は解の有界性が得られており (Tao–Wang [**10**]), $\chi\alpha-\xi\gamma>0$ の場合は爆発解の存在が示されている (Fujie–Suzuki [**5**], Lankeit [**7**]). これらの結果から, 問題 (1) の解挙動について, 反発項の効果が誘引項の効果より強い, (**i**) $p<q$, または (**ii**) $p=q$ かつ $\chi\alpha-\xi\gamma<0$, の場合には, 条件 $p<m+\frac{2}{n}$ を仮定することなく (1) の解の有界性が得られると予想される. 本研究の第一の目的は, この予想を反映する結果を導くことである.

次に, **(II)** に関連する先行研究と本研究の目的を説明する. 問題 (1) において $m=1$, $p=q=2$ の場合の解の漸近挙動は, 係数または初期値の小ささに条件を課すことで決定されている. 実際, 係数に条件を課す場合については, Tao–Wang [**10**] により $n\in\{2,3\}$ で $\chi\alpha-\xi\gamma<0$, $\beta=\delta$ の場合に漸近挙動が決定されている:

$$\begin{aligned}
u(\cdot,t)&\to\overline{u_0} &&\text{in } L^\infty(\Omega)\quad (t\to\infty),\\
v(\cdot,t)&\to\frac{\alpha}{\beta}\overline{u_0} &&\text{in } L^\infty(\Omega)\quad (t\to\infty),\\
w(\cdot,t)&\to\frac{\gamma}{\delta}\overline{u_0} &&\text{in } L^\infty(\Omega)\quad (t\to\infty).
\end{aligned}$$

その後, Lin–Mu–Zhou [**9**] により $n\ge 2$ の場合に係数 β,δ に対する条件が一般化された. 一方, 初期値の小ささに条件を課す場合については, Li–Lin–Mu [**8**] により $n=2$ で $\chi\alpha-\xi\gamma=0$ の場合に $\|u_0\|_{L^1(\Omega)}$ に対する小ささの条件の下で上の漸近挙動が得られている. 特に, [**8**] では $p=q=2$ であることを活かして, $z:=\chi v-\xi w$ と変換することで, 問題 (1) を Keller–Segel 系

$$\begin{cases}
u_t=\Delta u-\nabla\cdot(u\nabla z),\\
0=\Delta z-z+(\beta-\delta)u
\end{cases}$$

に帰着させる議論が利用されている. しかし, $p\ne q$ の場合の問題 (1) は, Keller–Segel 系には帰着できない. そこで本研究では, 準線形走化性方程式系

$$\begin{cases}
u_t=\nabla\cdot\big((u+1)^{m-1}\nabla u-\chi u(u+1)^{p-2}\nabla v\big),\\
v_t=\Delta v-v+u
\end{cases}\tag{3}$$

の解の漸近挙動を決定した Cieślak–Winkler [**4**] の手法に着目した. [**4**] では, 条件 $n\ge 2$, $p-m\in[0,\frac{2}{n})$, $\chi\|u_0\|_{L^1(\Omega)}^{p-m}<\frac{1}{C_{\langle p-m\rangle}^2}$ の下でこの方程式系の解 (u,v) の漸近挙動が

$$\begin{aligned}
u(\cdot,t)&\to\overline{u_0} &&\text{in } L^\infty(\Omega)\quad (t\to\infty),\\
v(\cdot,t)&\to\overline{u_0} &&\text{in } L^\infty(\Omega)\quad (t\to\infty)
\end{aligned}$$

と決定されることが示されている. ここで $\overline{u_0}:=\frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega u_0$ であり, $C_{\langle p-m\rangle}>0$ は次の Poincaré–Sobolev の不等式で $\theta:=p-m$ とした際に現れる定数である:

$$\|\varphi-\overline{\varphi}\|_{L^2(\Omega)}\le C_{\langle\theta\rangle}\|\nabla\varphi\|_{L^{\frac{2}{\theta+1}}(\Omega)}\quad\forall\,\theta\in\Big[0,\frac{2}{n}\Big)\quad\forall\,\varphi\in W^{1,\frac{2}{\theta+1}}(\Omega).\tag{4}$$

本研究の第二の目的は, (3) に反発項が加わり, 第 2 方程式及び第 3 方程式が楕円型である問題 (1) に対しても, [**4**] の手法が有効であることを確認することである.

2 主結果

問題 (1) の解の有界性及びその漸近挙動に関して, 以下の結果を得た.

定理 1 (解の有界性; [**1**, Theorems 3.1, 3.3])**.** 次の (**i**), (**ii**) のいずれかを仮定する:

(**i**) $p < q$;
(**ii**) $p = q$ かつ $\chi\alpha - \xi\gamma < 0$.

そのとき, 任意の非負値関数 $u_0 \in C(\overline{\Omega}) \setminus \{0\}$ に対して, 問題 (1) の時間大域的古典解 (u, v, w) が一意的に存在して, 次の意味で有界である:

$$\exists C > 0; \quad \|u(\cdot, t)\|_{L^\infty(\Omega)} \le C \quad (t > 0).$$

定理 2 (解の漸近挙動)**.** $n \ge 2$ とし, 問題 (1) の有界な解の存在を仮定する. また, m, p は $p - m \in [0, \frac{2}{n}]$ を満たし, 非負値関数 $u_0 \in C(\overline{\Omega}) \setminus \{0\}$ は

$$\chi\alpha \|u_0\|_{L^1(\Omega)}^{p-m} \le \frac{1}{2C_{\langle p-m \rangle}}$$

を満たすと仮定する. ここで, $C_{\langle p-m \rangle} > 0$ は不等式 (4) で $\theta := p - m$ としたときに現れる定数である. そのとき, 問題 (1) の解 (u, v, w) に対して, 次が成立する:

$$u(\cdot, t) \to \overline{u_0} \qquad \text{in } L^\infty(\Omega) \quad (t \to \infty),$$

$$v(\cdot, t) \to \frac{\alpha}{\beta}\overline{u_0} \quad \text{in } L^\infty(\Omega) \quad (t \to \infty),$$

$$w(\cdot, t) \to \frac{\gamma}{\delta}\overline{u_0} \quad \text{in } L^\infty(\Omega) \quad (t \to \infty).$$

ここで, $\overline{u_0} := \frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega u_0$ である.

証明の鍵. 定理 1 の証明における鍵は, 問題 (1) の解 (u, v, w) に対して, 次が成り立つことを示すことである: 任意の $\varepsilon > 0$ と $\ell > 1$ に対して定数 $c(\varepsilon, \ell) > 0$ が存在して,

$$\int_\Omega w^\ell \le \varepsilon \int_\Omega u^\ell + c(\varepsilon, \ell).$$

また, 定理 2 の証明の方針は,

$$\int_0^\infty \int_\Omega (u - \overline{u_0})^2 \le c_1 \quad (c_1 > 0)$$

の導出である. この評価が得られると, u の一様評価 $\|u\|_{C^{2,1}(\overline{\Omega} \times [0,\infty))} \le c_2$ $(c_2 > 0)$ と Gagliardo–Nirenberg の不等式の援用により, u が $\overline{u_0}$ に $L^\infty(\Omega)$ の位相で収束することを示すことができる.

参考文献

[1] Y. Chiyo and T. Yokota. Boundedness and finite-time blow-up in a quasilinear parabolic–elliptic–elliptic attraction-repulsion chemotaxis system. *arXiv: 2107.10445 [math.AP].*

[2] T. Cieślak and C. Stinner. Finite-time blowup and global-in-time unbounded solutions to a parabolic–parabolic quasilinear Keller–Segel system in higher dimensions. *J. Differential Equations*, **252**(10):5832–5851, 2012.

[3] T. Cieślak and C. Stinner. Finite-time blowup in a supercritical quasilinear parabolic–parabolic Keller–Segel system in dimension 2. *Acta Appl. Math.*, **129**:135–146, 2014.

[4] T. Cieślak and M. Winkler. Stabilization in a higher-dimensional quasilinear Keller–Segel system with exponentially decaying diffusivity and subcritical sensitivity. *Nonlinear Anal.*, **159**:129–144, 2017.

[5] K. Fujie and T. Suzuki. Global existence and boundedness in a fully parabolic 2D attraction-repulsion system: chemotaxis-dominant case. *Adv. Math. Sci. Appl.*, **28**:1–9, 2019.

[6] S. Ishida, K. Seki, and T. Yokota. Boundedness in quasilinear Keller–Segel systems of parabolic–parabolic type on non-convex bounded domains. *J. Differential Equations*, **256**(8):2993–3010, 2014.

[7] J. Lankeit. Finite-time blow-up in the three-dimensional fully parabolic attraction-dominated attraction-repulsion chemotaxis system. *J. Math. Anal. Appl.*, **504**(2):Paper No. 125409, 16pp., 2021.

[8] Y. Li, K. Lin, and C. Mu. Asymptotic behavior for small mass in an attraction-repulsion chemotaxis system. *Electron. J. Differential Equations*, pages No. 146, 13, 2015.

[9] K. Lin, C. Mu, and D. Zhou. Stabilization in a higher-dimensional attraction-repulsion chemotaxis system if repulsion dominates over attraction. *Math. Models Methods Appl. Sci.*, **28**(6):1105–1134, 2018.

[10] Y. Tao and Z-A. Wang. Competing effects of attraction vs. repulsion in chemotaxis. *Math. Models Methods Appl. Sci.*, **23**(1):1–36, 2013.

[11] Y. Tao and M. Winkler. Boundedness in a quasilinear parabolic–parabolic Keller–Segel system with subcritical sensitivity. *J. Differential Equations*, **252**(1):692–715, 2012.

[12] M. Winkler. Finite-time blow-up in the higher-dimensional parabolic–parabolic Keller–Segel system. *J. Math. Pures Appl.* (9), **100**(5):748–767, 2013.