

Right-left equivalent maps of simplified $(2, 0)$ -trisections with different configurations of vanishing cycles

東北大学大学院 理学研究科 数学専攻
浅野喜敬 (Nobutaka ASANO)

概要

可微分写像の同値類をその特異点の情報から特徴づけるという問題を考える。近年導入された新しい 4 次元多様体から 2 次元平面への可微分写像として、トライセクション写像というものがある。トライセクション写像は 4 次元多様体の 3 つの 1-ハンドルボディによる分割を誘導するものとして Gay-Kirby により導入された。さらに Baykur-Saeki は特異値が自己交叉を持たない単純な trisection 写像を導入した。講演者は単純な $(2, 0)$ -trisection の右左同値類を図式で特徴づけるために必要と考えられる幾つかの条件を考察した。得られた結果についてその周辺と合わせて紹介する。単純な trisection の基礎的な事項についてより詳細に知りたい場合は、[4] を参照されたい。

多様体は滑らかで連結とし、 $\natural^k A$ は k 個の A を連結和した多様体を、 $\natural^k A$ は k 個の A を境界連結和した多様体を表す。

1 序

多様体に対し、その上の可微分写像の特異点が多様体の微分トポロジー的な性質と深い繋がりがあることが良く知られている。例えば、多様体に Morse 関数を与えることでその特異点の情報から多様体のハンドル分割が与えられる。これまで微分トポロジーの研究ではハンドル分解を通して多くのことが理解されている。例えば 3 次元多様体に適切な Morse 関数を与えることで、次の分割を得ることが出来る：

$$M = H_1 \cup_{\partial} H_2$$

ここで、 H_i は種数 g のハンドル体 ($\simeq \natural^g(S^1 \times D^2)$) であり (図 1 参照)、3 次元多様体 M が、2 つのハンドル体の境界での貼り合わせとして実現されている。種数 g のハンドル体の境界は種数 g の向き付け可能閉曲面である。上記の分割は 3 次元多様体の Heegaard 分解と呼ばれ、古典的な 3 次元多様体の分割として知られている。Heegaard 分解が与えられると、2 つのハンドル体の接着の様子が曲面上の曲線族として図示される (例：図 2)。この図式は Heegaard 図式と呼ばれている。Heegaard 分解は Dehn 手術と並んで 3 次元多様体の研究において大きな柱としての役割を持つ。

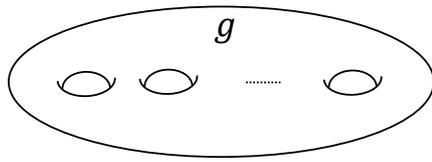


図 1: 種数 g の (3 次元) ハンドル体.

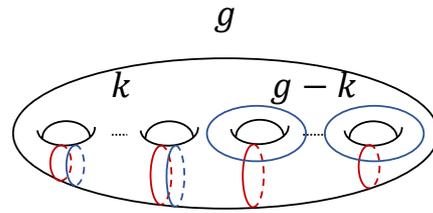


図 2: $\sharp^k(S^1 \times S^2)$ の標準的な種数 g の Heegaard 図式.

Morse 関数を一般化したものとして、安定写像がある。安定写像とは M から N への可微分写像であり、写像の空間の中で摂動しても特異点の性質が変わらないものである。可微分多様体のトポロジーと関連してこれまで多くの研究が為されている。

本稿で紹介するトライセクション写像は 4 次元多様体から実 2 次元平面への安定写像である。トライセクション写像の値域を 3 等分することで 4 次元多様体の 3 つの 1-ハンドル体の分割であるトライセクションを誘導し、貼り合わせの情報を曲面上の単純閉曲線族の 3 つ組として表すことができる。この表示はトライセクション図式という。

単純なトライセクション写像とは、特異値集合に 2 重点を持たないトライセクション写像であり、Baykur-佐伯により初めて導入されたものである。Baykur-佐伯は閉 4 次元多様体の持つ単純な特異 Lefschetz 束を変形することで、単純なトライセクション写像を得るアルゴリズムを具体的に与えている [2]。

本稿では、次の問題について考えた：

問題：単純なトライセクション写像はその図式から特徴づけられるか。

2 トライセクションの定義

トライセクションは Gay-Kirby により導入された、4 次元多様体の 1-ハンドル体による分割である。

定義 1. $0 \leq k \leq g$ を正の整数とする。組 (X, X_1, X_2, X_3) が次の (1), (2), (3) を満たすとき、この組を (g, k) -trisection という。

(1) $X = X_1 \cup X_2 \cup X_3$

(2) 各 $i = 1, 2, 3$ について、微分同相写像 $\phi_i : X_i \rightarrow \sharp^k(S^1 \times D^3)$ が存在する。

(3) 各 $i = 1, 2, 3$ について、3 を法として、 $Y_{k,g}^- = \phi_i(X_i \cap X_{i+1})$, $Y_{k,g}^+ = \phi_i(X_i \cap X_{i-1})$ とおいたとき、 $Y_{k,g}^+ \cup Y_{k,g}^-$ は $\sharp^k(S^1 \times S^2)$ の標準的な Heegaard 分解を与える。

任意の向き付け可能な連結閉 4 次元多様体はトライセクションを許容し、さらに各多様体に対しそのトライセクションは“安定化”と呼ばれる操作の差を除いて一意的である [3]。3 次元多様体において、2-ハンドルの接着円周を種数 g の向き付け可能閉曲面 Σ_g 上に表示したものを Heegaard 図式と呼んでいた。これと同様に、4 次元多様体に対しても、4 次元の 2-ハンドルの接着円周を曲面上に表

示したものを考えることができる。これが次に述べるトライセクション図式である。

定義 2. $\alpha = \{\alpha_1, \dots, \alpha_g\}$, $\beta = \{\beta_1, \dots, \beta_g\}$, $\gamma = \{\gamma_1, \dots, \gamma_g\}$ を, それぞれについて, Σ_g 上の非交和な単純閉曲線の族とする. 各 $(\Sigma_g, \alpha, \beta)$, $(\Sigma_g, \beta, \gamma)$, $(\Sigma_g, \gamma, \alpha)$ が $\sharp^k(S^1 \times S^2)$ の種数 g の Heegaard 図式であるとき, 組 $(\Sigma_g, \alpha, \beta, \gamma)$ をトライセクション図式という.

3 安定な特異点

以下, X を 4 次元多様体, $f: X \rightarrow \mathbf{R}^2$ を C^∞ 級写像とし, $\text{Crit}(f) = \{p \in X \mid p \text{ は } f \text{ の臨界点}\}$ とする. trisection 写像の定義を述べるために必要な特異点・及びその特異値集合の近傍における正則ファイバーの変化について紹介する.

定義 3. $p \in \text{Crit}(f)$ とする. p における局所座標 (t, x, y, z) が存在して, $f(t, x, y, z) = (t, -x^2 - y^2 + z^2)$ (resp. $f(t, x, y, z) = (t, -x^2 - y^2 - z^2)$) と表せるとき, p は不定値 (resp. 定値) 折り目特異点である.

定義 4. $p \in \text{Crit}(f)$ とする. p における局所座標 (t, x, y, z) が存在して, $f(t, x, y, z) = (t, x^3 - 3xt + y^2 - z^2)$ と表せるとき, p はカスプ特異点である.

特異値の近傍の正則値上の正則ファイバーを特異ファイバーに近づけることで, 正則ファイバーのトポロジーは変化する. その様子を以下に示す.

図 3 中図は不定値折り目特異点の近傍におけるファイバーと特異値を通り過ぎた後のファイバーの形の変化を示したものである. 図 3 左図の縦方向の座標が定義 3 における座標 t であり, 黒太実線部が f の特異値集合を表している. 図 3 中図の横方向の座標は $-x^2 - y^2 + z^2$ と与えられるため, 点線の引き戻しに沿って 3 次元 2-ハンドルの接着が行われている. したがってファイバーの曲面では手術が行われ, 図 3 中図のような変化が生じる. このときの 2-ハンドルの接着円周に対応するファイバー上の曲線 (図 3 中図で赤線で示される単純閉曲線) を不定値折り目特異点の消滅サイクルと呼び, 値域上の点線を reference path と呼ぶ. 定値折り目特異点の場合も同様にして, reference path の引き戻しに沿って 3 次元 3-ハンドルの接着が行われる. また, このとき図 3 左図の横方向の座標は $-x^2 - y^2 - z^2$ で与えられており, 特異値はこの関数の最大値である. よって赤線を通るとファイバーは空集合となり, 図 3 右図のような変化が生じる.

カスプ特異点の近傍の像は図 3 右図である. 黒太線部が特異値集合であり, 特異値集合の尖点部では 2 本の不定値折り目特異点の像が接している. 図 3 右図の reference path にしたがってファイバーを動かすと不定値折り目特異点の消滅サイクル a, b に沿って 3 次元 2-ハンドルの接着が行われ, ファイバーが D^2 へと変化する. このとき, a と b は幾何学的に 1 度だけ交わる.

4 右左同値・安定写像

この章では可微分写像の同値関係である右左同値と, 安定写像について紹介する. 安定写像は次節で紹介するトライセクション写像を含む写像のクラスであり, 比較的扱い易く意味のある特異点を持

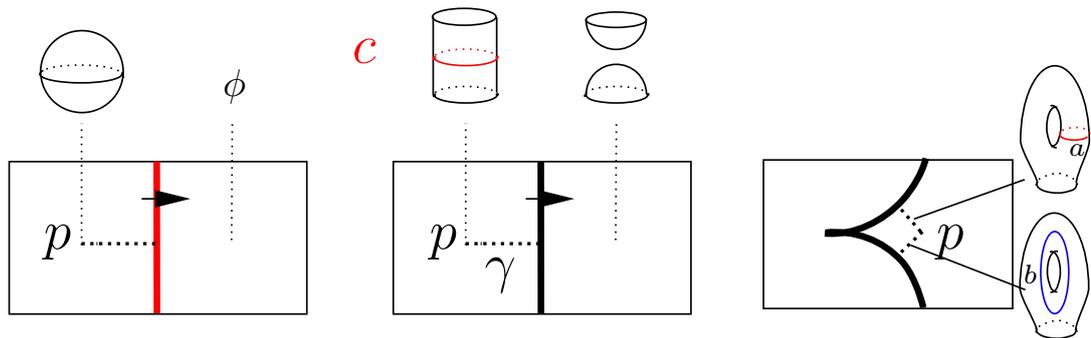


図 3: (左図) : 定値折り目特異値 (中図) : 不定値折り目特異値 (右図) : カスプ特異値

つ写像である.

定義 5. 可微分写像 $f, g : M \rightarrow N$ に対して以下の図式が可換であるとき, f と g は右左同値であるといい, $f \simeq g$ と表す:

$$\begin{array}{ccc}
 M & \xrightarrow{\phi} & M \\
 f \downarrow & & \downarrow g \\
 N & \xrightarrow{\psi} & N
 \end{array}$$

微分同相写像を定義域と値域の多様体全体における座標変換のようなものと思うと, 2つのこの同値関係の下で, 安定写像を定義する.

定義 6. $f : M \rightarrow N$ の近傍内の任意の可微分写像 g に対し $f \simeq g$ であるとき, f を安定写像であるという. 但し, 写像空間 $C^\infty(M, N)$ にはホイットニー C^∞ 位相を入れている.

例えば, 多様体上の Morse 関数で特異値がすべて異なるものは安定写像である. この意味で, 安定写像は Morse 関数の一般化である.

ホイットニー C^∞ 位相については例えば [5] を参照されたい. 大らかに述べると, $f, g \in C^\infty(M, N)$ が「近い」というのは, 多様体 M 上一様に f, g の偏微分係数がすべて「近い」ということを意味している.

安定写像についての必要十分条件を紹介する.

定理 7. X を向き付け可能な閉 4 次元多様体, Σ を 2 次元多様体, $f : X \rightarrow \Sigma$ を可微分写像で固有 (proper) であるとする. f が安定であることと, 次のすべての条件が成り立つことは同値である.

- 1 Crit(f) が折り目特異点とカスプ特異点からなる集合である.
- 2 f のカスプ特異点への制限は単射である.
- 3 f の折り目特異点への制限は, 2 重点がすべて横断的で, その像はカスプ特異値を含まない

め込みである.

また $\text{Crit}(f)$ は X の 1 次元部分多様体であることが知られている. 即ち特異値集合 $f(\text{Crit}(f))$ はいくつかの 1 次元円周のはめ込みである.

安定写像は多様体の性質を調べるために用いられる重要な写像である. 例えば曲面上の Morse 関数から得られるホモロジーの情報は曲面の位相型を決定するが, 3 次元多様体上の Morse 関数から 3 次元多様体の位相的情報を導き出すことは難しい. しかし値域の次元を高くして, 3 次元多様体から曲面への安定写像を考えることで, より詳細に多様体の情報を引き出すことが出来る.

5 トライセクション写像

Gay-Kirby は, 閉 4 次元多様体から \mathbf{R}^2 への安定写像 (トライセクション写像) を構成することで, 任意の閉 4 次元多様体がトライセクションを許容することを証明した. この節では, トライセクション写像の定義について述べる.

定義 8. 安定写像 $f: X \rightarrow D^2$ の特異値集合が図 4 で与えられるとき, f は自然に (g, k) -トライセクションの構造をもつ. また, このとき X は (g, k) -トライセクション写像を許容するという.

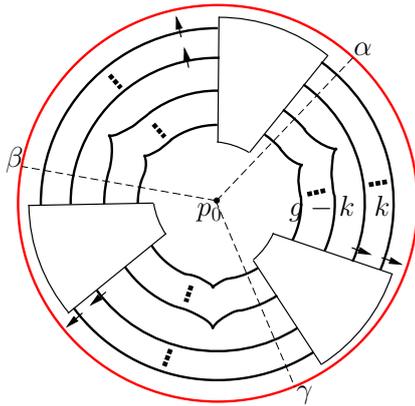


図 4: (g, k) -トライセクション写像の特異値集合.

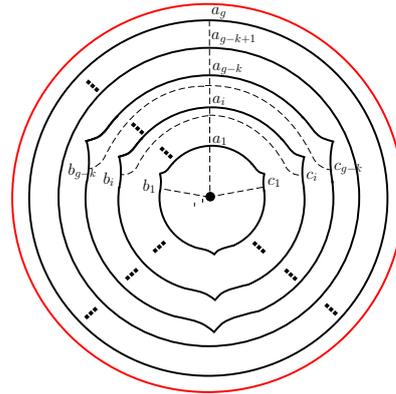


図 5: 単純な (g, k) -トライセクション写像の特異値集合.

図 4 の一番外側にある赤い円周は定値折り目特異点の像を表し, 内側には不定値折り目特異点やカスプ特異点の像が描かれている. 3 つの白い箱の内部には, 各々 g 本の不定値折り目特異値のはめ込みが存在し, 白い箱の不定値折り目特異値の単点同士を繋いでいる. ただし, これらの多重点はすべて 2 重点であり, 折り目特異値は p_0 を中心とした円周に直行する接ベクトルを持たない. 白い箱の間では, 外側には不定値折り目特異値が k 本あり, 内側には 1 つのカスプ特異値が 1 つついた不定値折り目特異値が $g - k$ 本ある. また, 各白い箱の間に存在する特異値は互いに交わらない.

さらに, $f^{-1}(p_0) \simeq \Sigma_g$ である. これは半径方向のレファレンスパスに沿って外から内に動いたときの正則ファイバーの変化を調べると, 外側から順に, 空集合, $S^2, T^2, \dots, \Sigma_g$ と変化することから従う.

定義 8 における (g, k) -トライセクション写像 f から X の (g, k) -トライセクション (X, X_1, X_2, X_3) とトライセクション関式 $(\Sigma_g, \alpha, \beta, \gamma)$ は次のようにして構成される. まず, 図 4 のレファレンスパス α, β, γ に沿って値域の D^2 を 3 つの扇形に分割する. 各扇形の引き戻しは $\natural^k(S^1 \times D^3)$ と微分同相である. さらに, レファレンスパス α, β に沿って p_0 から半径方向に向かって中心ファイバー $f^{-1}(p_0)$ を動かす. このときレファレンスパスと特異値集合の各交点で, 不定値折り目特異点の消滅サイクルが現われ, 消滅サイクルに沿って中心ファイバー $f^{-1}(p_0)$ は退化する. 特異値集合とレファレンスパスの g 個の交点から, ある消滅サイクルの族 $\alpha = \{\alpha_1, \dots, \alpha_g\}$, $\beta = \{\beta_1, \dots, \beta_g\}$ を得る. これらは Σ_g 上のカットシステムであり, $f^{-1}(\alpha \cup \beta) \simeq \natural^k(S^1 \times S^2)$ であることから $(\Sigma_g, \alpha, \beta)$ は $\natural^k(S^1 \times S^2)$ の Heegaard 関式を与える. レファレンスパス β, γ , γ, α についても同様に $(\Sigma_g, \beta, \gamma)$, $(\Sigma_g, \gamma, \alpha)$ が $\natural^k(S^1 \times S^2)$ の Heegaard 関式を与える. 以上から, トライセクション関式 $(\Sigma_g, \alpha, \beta, \gamma)$ が f より得られる. またこれらのことから各セクターの共通部分が定義 1(3) を満たすこともしたがう. 逆に, 定義 1 から図 4 を特異値集合とする安定写像を構成することもできる [3]. トライセクション写像をより単純化したものとして, Baykur-Saeki は特異値が図 5 で与えられる単純なトライセクション写像を導入し, 任意の閉 4 次元多様体が単純な trisection 写像をもつことを証明した [1]. また, Hayano は単純なトライセクション写像に付随するトライセクション関式の研究を閉曲面の写像類群の観点から進め, モノドロミーの表記などを精密化した [4].

6 単純なトライセクションのモノドロミー

Baykur-Saeki は閉 4 次元多様体の単純なトライセクションを, 単純特異 Lefschetz 束に対して特異点論の技法を用いたアルゴリズムを構成することで証明した.

定理 9 (Baykur-Saeki [1]). Z_f を f の Lefschetz 特異点の集合とする. このとき次が成り立つ.

- (1) 閉 4 次元多様体 X に対し, $f: X \rightarrow S^2$ を, $\#Z_f = k$ かつ C_f の連結成分数は $l \in \{0, 1\}$ である単純特異 Lefschetz 束とする. このとき, X は単純な $(2g + k - l + 2, 2g - l)$ -トライセクションを許容する.
- (2) X が単純な (g, k) -トライセクションを持つとする. このとき, ファイバー連結である directed 特異 Lefschetz 束で種数が $g + 2$, かつ, $\natural Z_f = 3g - 3k + 4$ であるものが存在する.

トライセクション写像から 4 次元多様体の関式を得るためには, 不定値折り目特異点の消滅サイクルを一方単純な trisection 写像は, 消滅サイクルらに Lefschetz 特異点のモノドロミーに由来する関係式がある. Hayano は次の定理を示した. 定理において, $\Sigma_{a_1, \dots, a_{i-1}}$ は中心にある正則ファイバーに対し, 消滅サイクル a_1, \dots, a_{i-1} に沿って曲面を切り開き, 各境界成分に円板を貼ることで得られる曲面を表し, $\text{Mod}(\Sigma_{a_1, \dots, a_{i-1}}; a_i)$ はその曲面上の曲線 a_i を固定する自己微分同相写像のなす群を表す. また, Φ_{a_i} は $\text{Mod}(\Sigma_{a_1, \dots, a_{i-1}}; a_i)$ から $\text{Mod}(\Sigma_{a_1, \dots, a_{i-1}, a_i})$ への, a_i に沿った変形により定まる自然な写像とする.

定理 10 (Hayano [4]). $f: X \rightarrow \mathbf{R}^2$ を単純 (g, k) -trisection とし, 図 5 のように reference path を与える. $a_1, \dots, a_h, b_1, \dots, b_{g-k}, c_1, \dots, c_{g-k}$ を中心にある正則ファイバー上の消滅サイクルとす

る。このとき、次が成り立つ。

(1) 各 $i = 0, \dots, g - k - 1$ に対し, $\mu_i \in \text{Mod}(\Sigma_{a_1, \dots, a_{i-1}}; a_i)$ を帰納的に

$$\mu_i = \begin{cases} id_{\Sigma} & i = 0 \\ \Phi_{a_i}(t_{t_{c_i}(a_i)} \circ \mu_{i-1} \circ t_{t_{b_i}(c'_i)} \circ t_{t_{a_i}(b_i)}) & i > 0 \end{cases}$$

で定義する。ただし $c'_{i+1} = \mu^{-1}(c_{i+1})$ である。このとき, μ_i は特異値集合の内側から図 6 のように i 番目の円の少し内側にそれと平行に描いた円に沿ったモノドロミーを表す。

(2) $(a_i, b_i), (a_i, c_i), (b_i, c'_{i+1})$ はそれぞれただ一度だけ交わる。

(3) 各 $j = g - k, \dots, g - 1$ について, $\Phi_{a_j} \circ \dots \circ \Phi_{a_{g-k+1}}(\mu_{g-k})$ は a_{j+1} を保つ。

逆に, これらの条件を満たす $a_1, \dots, a_g, b_1, \dots, b_{g-k}, c_1, \dots, c_{g-k}$ が与えられたとき, それを実現する単純な trisection $f' : X' \rightarrow \mathbf{R}^2$ が存在する。

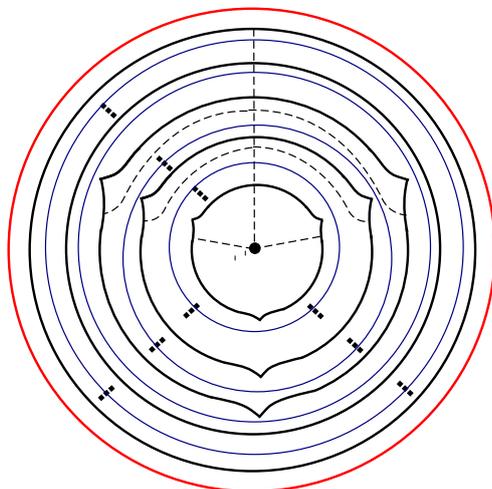


図 6: μ_i を誘導する円周の族。

また, Hayano は論文 [4] において, 定理 10 のモノドロミーの表記と安定写像のホモトピー変形を用いることで, 種数 2 の単純な trisection を持つ 4 次元多様体の分類を行った。この結果は Meier-Zupan による種数 2 の trisection を許容する 4 次元多様体の分類の系としてすでに知られていたが, 論文 [4] では単純な trisection を持つ 4 次元多様体の分類問題を線形代数の問題に帰着させることで, より簡明な証明を与えている。

7 主結果

可微分写像の右左同値類を特異点から与えられる図式より決定することは基本的な問題である。本稿では, 次の問題を考える: 単純なトライセクションの同値類全体の集合と単純なトライセクション図式全体の集合の間に一対一の対応は存在するか? 一般に, 単純なトライセクション写像が与えられると, そこから得られる単純なトライセクション図式は一意的ではない。そこで, 単純なトライセクション図式全体の集合を自然な同値関係で同一視することを考える。

定義 11. $(\Sigma, \{a_1, a_2\}, \{b_1, b_2\}, \{c_1, c_2\}), (\Sigma', \{a'_1, a'_2\}, \{b'_1, b'_2\}, \{c'_1, c'_2\})$ を単純な $(2, 0)$ -トライセクション図式とする.

- 図式の曲線のラベルを保つ Σ から Σ' への同相写像,
- 上三角ハンドルスライド,
- レファレンスパスの取り換え

の有限列で $(\Sigma, \{a_1, a_2\}, \{b_1, b_2\}, \{c_1, c_2\})$ が $(\Sigma', \{a'_1, a'_2\}, \{b'_1, b'_2\}, \{c'_1, c'_2\})$ に移るとき, これらの単純なトライセクション図式は同値であるといい, $(\Sigma, \{a_1, a_2\}, \{b_1, b_2\}, \{c_1, c_2\}) \sim (\Sigma', \{a'_1, a'_2\}, \{b'_1, b'_2\}, \{c'_1, c'_2\})$ と表す.

講演者は単純な $(2, 0)$ -トライセクションの右左同値類に着目し, その図式全体の集合をレファレンスパスの取り換えで生じる図式の変化, 上三角ハンドルスライド, 曲面の同相写像により同一視したものについて考察した.

定理 12. $f : X \rightarrow \mathbf{R}^2$ をモノドロミーが非自明である単純な $(2, 0)$ -トライセクションとする. 中心ファイバー上の消滅サイクルのイソトピー類の配置が例外的な場合を除いて, 少なくとも 2 つの単純な $(2, 0)$ -トライセクション f' と f'' が存在し, 以下を満たす:

- f, f', f'' は互いに右左同値だが, f, f', f'' の単純なトライセクション図式は相異なる. 即ち, 同相写像と上三角ハンドルスライドでは移り合わない.

参考文献

- [1] N. Asano Right-left equivalent maps of simplified $(2, 0)$ -trisections with different configurations of vanishing cycles, preprint, available at arXiv:2109.13533.
- [2] R. I. Baykur and O. Saeki, Simplified indefinite fibrations on 4-manifolds, *Trans. AMS*, <https://doi.org/10.1090/tran/8325>.
- [3] D. Gay and R. Kirby, Trisecting 4-manifolds, *Geom. Topol.* **20** (2016), no. 6, 3097–3132.
- [4] K. Hayano, On diagrams of simplified trisections and mapping class groups, available at arXiv:1711.02790, to appear in *Osaka J. Math.*
- [5] 泉屋秀一, 佐野貴志, 佐伯修, 佐久間一浩, 特異点の数理 1 幾何学と特異点, 共立出版, 2001.