

有向絡み目図式の dual graph diagram

大阪大学大学院 理学研究科 数学専攻
新井克典 (Katsunori ARAI)

概要

有向絡み目は, S^3 へ埋め込まれた有限個の向き付けられた円周 S^1 の非交和である。dual graph diagram は, D. Needell 氏と S. Nelson 氏によって導入された有向絡み目図式の表示方法である。しかし, 与えられた dual graph diagram が有向絡み目図式を表さない場合がある。本研究では連結な dual graph diagram が有向絡み目図式を表すための必要十分条件を与えた。

1 導入

3次元球面 S^3 に滑らかに埋め込まれた μ 個の円周 S^1 を μ 成分の絡み目という。とくに, 1成分の絡み目を結び目という。向きが指定されている絡み目を有向絡み目という。2つの有向絡み目 L_1 と L_2 は, S^3 の向きを保つ滑らかな自己同相写像 $\varphi: S^3 \rightarrow S^3$ で, 向きを込めて $\varphi(L_1) = L_2$ を満たすものが存在するとき同じとみなす。

射影 $p: S^3 \rightarrow S^2$ であって, 絡み目 L の像 $p(L)$ の他重点が有限個で, その全てが横断的2重点になるような射影を考える。このとき, 像 $p(L)$ を絡み目 L の正則射影図という。絡み目の正則射影図において, 各2重点に上下を付けたものを絡み目図式という。

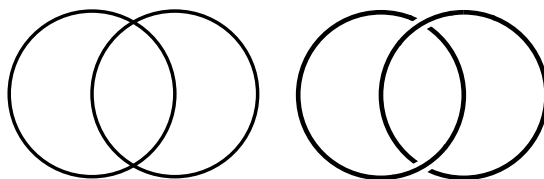


図 1: ホップ絡み目の正則射影図 (左) とホップ絡み目の絡み目図式 (右)

結び目図式にチェッカーボード彩色を施すことで, チェッカーボードグラフという S^2 上に埋め込まれたグラフを構成できる。さらにチェッカーボードグラフを1つとり, 各辺に結び目図式の各交差から定まる符号を与えると, S^2 上に埋め込まれた符号付きグラフができる。逆に, S^2 上に埋め込まれた符号付きグラフから結び目図式を構成することができる。

D. Needell 氏と S. Nelson 氏は有向絡み目図式のチェッカーボードグラフの和の各辺に, ある対応で向きまたは符号を与えたものを導入し, これを *dual graph diagram* と呼んでいる [1]。さらに [1] では S^2 上に埋め込まれたグラフとその双対グラフの和の各辺に, ある対応で向きまたは符号をつけたものから node 付き有向絡み目図式を構成する方法を与えた。

しかし、この方法は常に適用できるとは限らない。そこでどのような場合に適用できるのかについて述べる。また、この方法が適用できる場合に、有向絡み目図式を構成できるための必要十分条件も与えることができた。本文ではこれらの結果について報告する。

本文の構成は次の通りである。2章でチェッカーボードグラフの定義とその性質について述べ、3章で D. Needell 氏と S. Nelson 氏が導入した dual graph diagram [1] について述べる。最後に4章で連結な dual graph diagram が有向絡み目図式を表すための必要十分条件を与える。

2 チェッカーボードグラフ

2.1 グラフと双対グラフ

定義 2.1.1 グラフ G とは、頂点の集合 $V(G)$ と辺の集合 $E(G)$ の組をいう。

本文では、グラフは常に有限で、多重辺やループを許すものとする。また、 S^2 上に埋め込まれたグラフを単に S^2 上のグラフと呼ぶことにする。

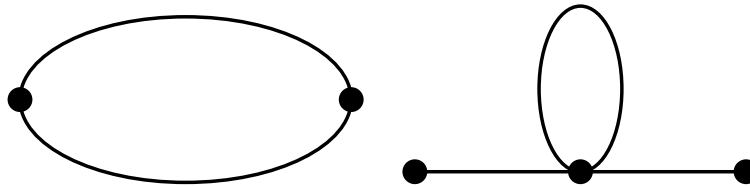


図 2: 多重辺 (左) とループ (右)

S^2 上のグラフ G に対して、 G を埋め込みの像とみるとき $|G|$ と書くことにする。 $S^2 - |G|$ の連結成分を G の領域という。

定義 2.1.2 G^d が G の双対グラフであるとは、次の方法で構成される S^2 上のグラフをいう：

1. G の各領域から 1 点を取り、それらを G^d の頂点とする。
2. 任意の $e \in E(G)$ に対し、 e の両側にある G の領域に対応する G^d の頂点を、 e の端点以外とちょうど 1 点で交わるように結ぶ曲線を G^d の辺とする。

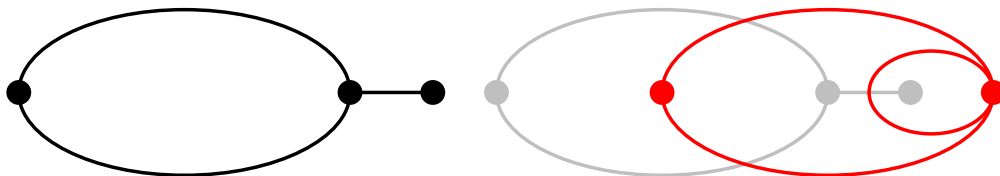
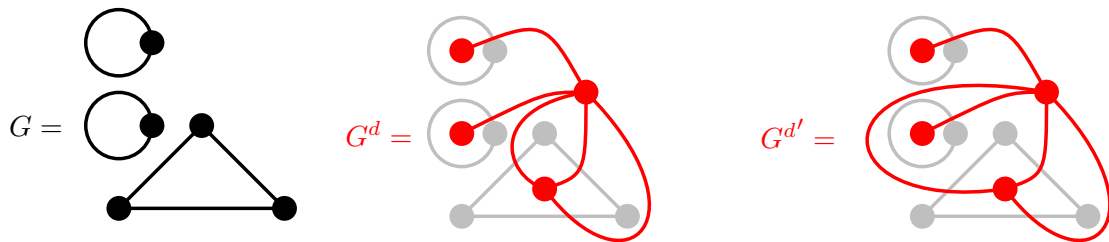


図 3: S^2 上のグラフ G (左) と G の双対グラフ G^d (右)

双対グラフは常に連結である。また、双対グラフは S^2 上のアイソトピーの差を除いて一意的に定まるとは限らない。

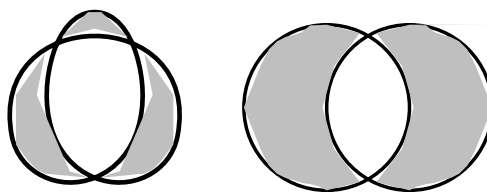
次の例では G^d と $G^{d'}$ はどちらも G の双対グラフであるが、 S^2 上のアイソトピーで移り合わない。



2.2 チェッカーボードグラフ

絡み目の正則射影図 U に対して、 $S^2 - U$ の連結成分を U の領域と呼ぶ。

定義 2.2.1 U のチェッカーボード彩色とは、 U の各領域を白黒で塗る彩色で、隣接領域を異なる色で塗るものである。



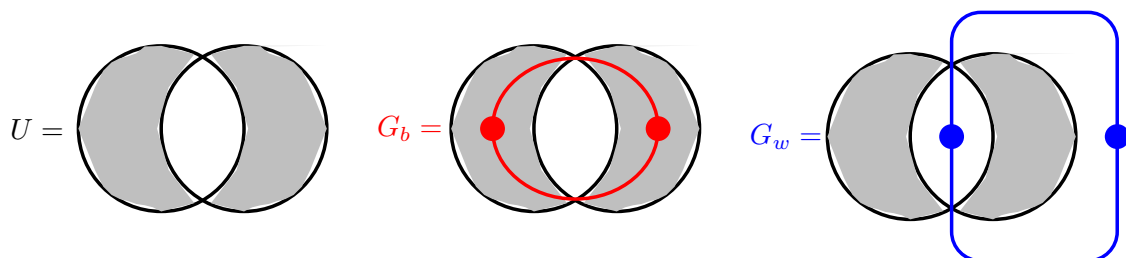
命題 2.2.2 S^2 上の任意の絡み目正則射影図はチェッカーボード彩色可能である。

定義 2.2.3 U を絡み目の正則射影図で、チェッカーボード彩色されたものとする。

G_b (resp. G_w) が U のチェッカーボードグラフであるとは、 G_b (resp. G_w) が次の方法により構成される S^2 上のグラフであることをいう：

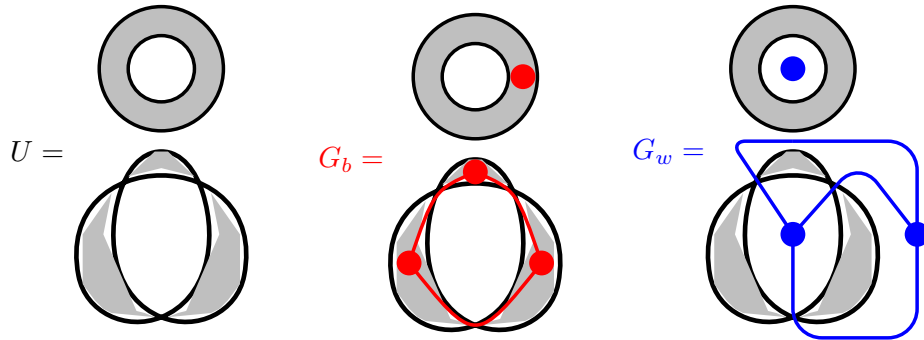
1. 各黒色 (resp. 白色) 領域から 1 点を取り、 G_b (resp. G_w) の頂点とする。
2. U の各交差において、向かい合う黒色 (resp. 白色) 領域を結び、 G_b (resp. G_w) の辺とする。

本文では、 $\{G_b, G_w\}$ をチェッカーボードグラフペアと呼ぶことにする。

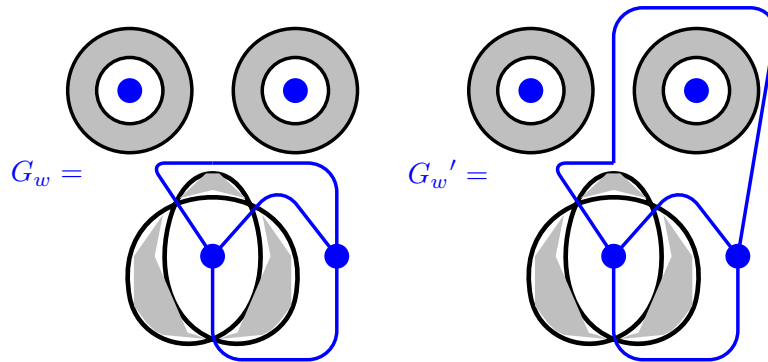


一般に G_b と G_w は互いに双対なグラフではない。

次の例では, G_b と G_w はともに非連結であるので, 互いに双対なグラフではない.



また, 一般にチェッカーボードグラフは一意的に定まるとは限らない. 次の例では, G_w と G_w' が S^2 上のアイソトピーで移り合わない.



チェッカーボードグラフが互いに双対なグラフになる十分条件をとして次が成り立つ.

命題 2.2.4 (known) U を S^2 上の絡み目正則射影図で, チェッカーボード彩色されたものとし, $\{G_b, G_w\}$ を U のチェッカーボードグラフペアとする. このとき, U が連結で交点を少なくとも 1 つ持つならば G_b と G_w は互いに双対なグラフになる.

系 2.2.5 U を S^2 上の絡み目正則射影図で, チェッカーボード彩色されたものとし, $\{G_b, G_w\}$ を U のチェッカーボードグラフペアとする. このとき, G_b と G_w がともに連結かつ孤立頂点を持たないならば G_b と G_w は互いに双対なグラフになる.

注意 2.2.6 G_b と G_w がともに連結かつ孤立頂点を持たないならば U が連結で交点を少なくとも 1 つ持つ.

双対グラフがある絡み目正則射影図のチェッカーボードグラフになる条件を述べるために, 必要な準備を行う.

G を S^2 上のグラフとし, G^d を G の双対グラフとする.

G の辺は G^d のある 1 つの辺と 1 点で交わる. この点を辺交差と呼ぶ.

$G \cup G^d$ から得られる S^2 上のグラフ \tilde{G} とは, $G \cup G^d$ の辺交差も頂点とする S^2 上のグラフをいう.

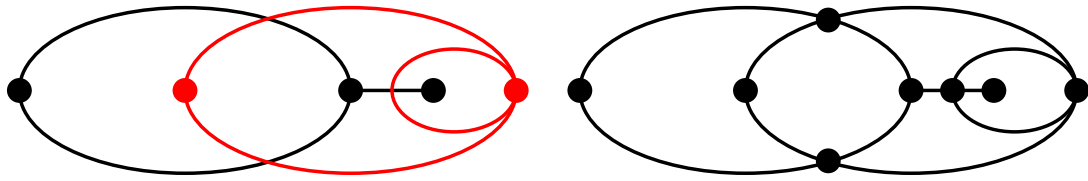


図 4: $G \cup G^d$ (左) と \tilde{G} (右)

$G \cup G^d$ の領域を \tilde{G} の領域として定める.

$G \cup G^d$ の 4 辺形領域とは, 領域の周りに 4 つの辺があるような領域のことをいう. $G \cup G^d$ の 4 辺形領域は次の場合に限られる:

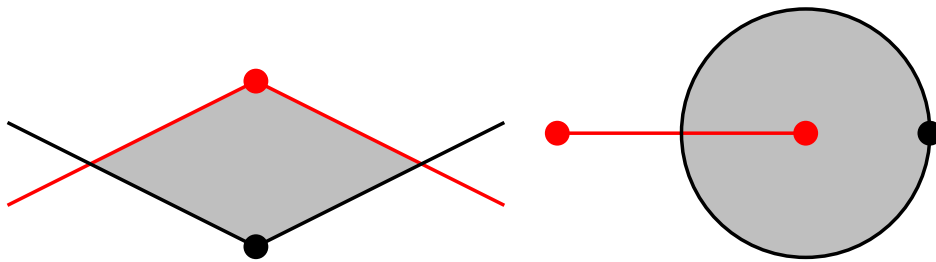


図 5: $G \cup G^d$ の 4 辺形領域

補題 2.2.7 G を S^2 上のグラフとし, G^d を G の双対グラフとする. このとき, 次は同値である: G は連結かつ孤立頂点を持たないならば $G \cup G^d$ の各領域が 4 辺形である.

命題 2.2.8 G を S^2 上のグラフとし, G^d を G の双対グラフとする. このとき, G が連結かつ孤立頂点を持たないならばある絡み目正則射影図 U が存在して, $\{G, G^d\}$ は U のチェッカーボードグラフペアになる.

3 Dual graph diagram

3.1 Dual graph diagram

定義 3.1.1 (Needell-Nelson [1]). D を S^2 上の有向絡み目図式, $\{G_b, G_w\}$ を D のチェッカーボードグラフペア, そして $\mathcal{O}(E(G_b)), \mathcal{O}(E(G_w))$ を G_b, G_w の辺の向きの集合とする.

$(\{G_b, G_w\}, f)$ が D の *dual graph diagram* であるとは, G_b, G_w の和 $G_b \cup G_w$ と次を満たす写像

$$f : E(G_b) \cup E(G_w) \rightarrow \{\pm\} \cup \mathcal{O}(E(G_b)) \cup \mathcal{O}(E(G_w))$$

の組をいう:

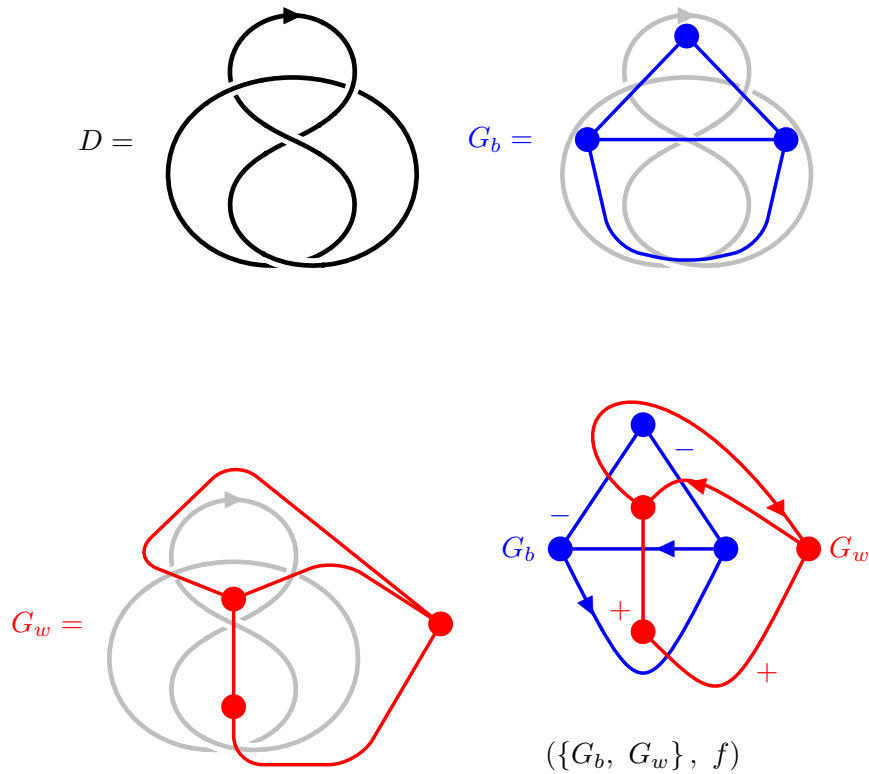
- f は D の各交差において,



を満たす.

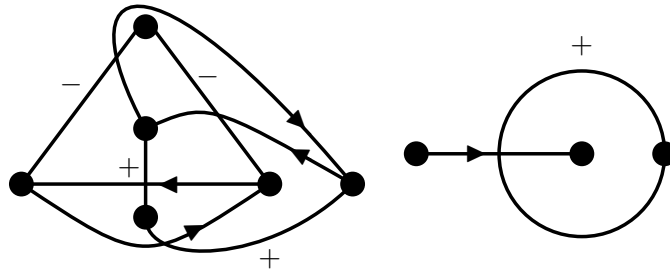
注意 3.1.2 Dual graph diagram は有向絡み目図式のみからは定まらない. 実際, チェッカーボードグラフが一意的に定まらないような有向絡み目図式からは, 複数通りの dual graph diagram が考えられる.

次の例は八の字結び目の図式 D から, dual graph diagram を構成するものである. D のチェッカーボードグラフ G_b と G_w の和 $G_b \cup G_w$ において, 各辺に D の各交差から対応 f によって定まる向きまたは符号を与えて D の dual graph diagram $(\{G_b, G_w\}, f)$ になる.



定義 3.1.3 $(\{G, G^d\}, f)$ が (一般の) connected dual graph diagram であるとは, S^2 上の連結かつ孤立頂点を持たないグラフ G とその双対グラフ G^d の和 $G \cup G^d$ と次を満たす写像 $f : E(G) \cup E(G^d) \rightarrow \{\pm\} \cup \mathcal{O}(E(G)) \cup \mathcal{O}(E(G^d))$ の組をいう:

$$e \in E(G), e' \in E(G^d), e \cap e' \neq \emptyset \Rightarrow (f(e), f(e')) \in \{\pm\} \times \mathcal{O}(E(G^d)) \cup \mathcal{O}(E(G)) \times \{\pm\}$$

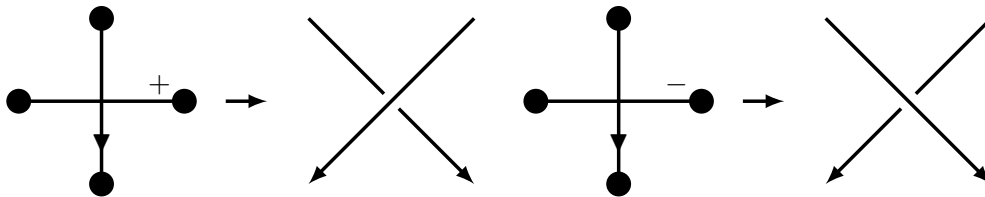


(一般の) connected dual graph diagram から node 付き有向絡み目図式を対応させる方法を述べる.
 但し node 付き有向絡み目図式とは次の 2 価頂点を許した有向絡み目図式をいう:

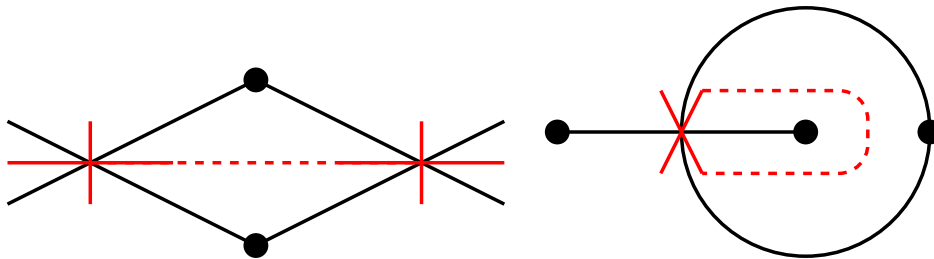


命題 3.1.4 (cf. Needell-Nelson [1]). (一般の) connected dual graph diagram (G, G^d, f) は次の方法により, node 付き有向絡み目図式を表す.

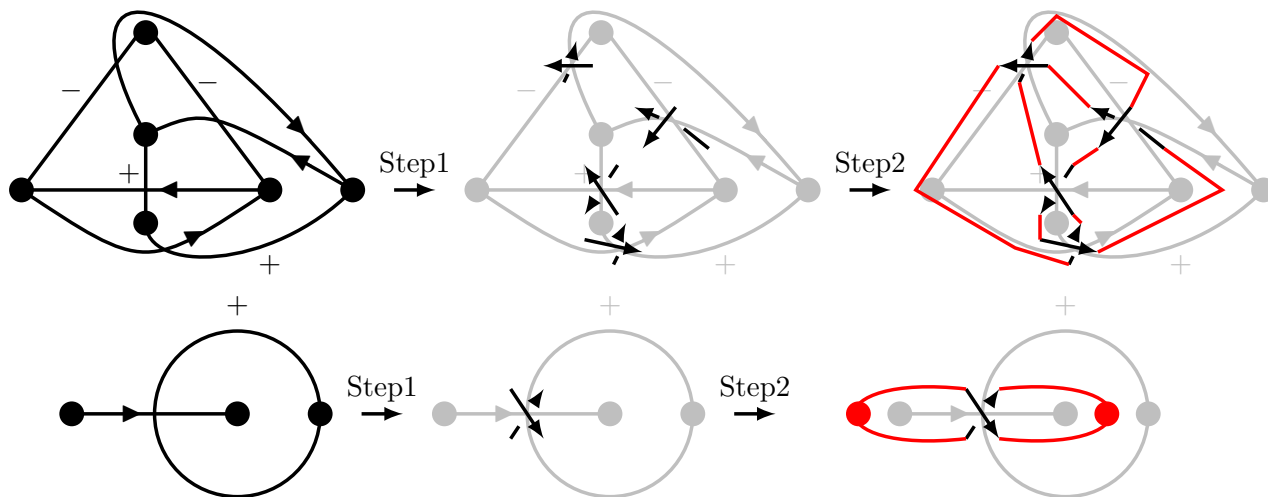
(Step1) (G, G^d, f) の各 edge crossing 毎に, 以下の局所的な交差を対応させる.



(Step2) 各領域内にある交差の端点を結ぶ.



例 3.1.5



4 主結果

4.1 主結果

定理 4.1.1 (一般の) connected dual graph diagram $(\{G, G^d\}, f)$ が有向絡み目図式を表すための必要十分条件は、各 4 辺形領域において、各頂点の入次数の和と出次数の和が等しくなることである。

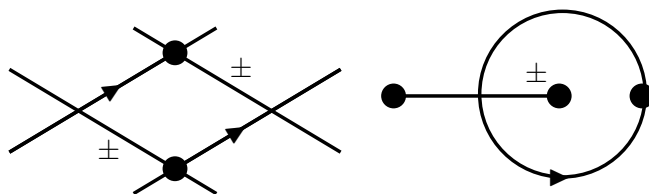


図 6: 各頂点の入次数と出次数の和が等しくなる例.

但し、頂点の入次数とはその頂点を終点にもつような向きの付いた辺の本数をいう。また、頂点の出次数とはその頂点を始点として持つような辺の本数をいう。

さらに、Theorem 4.1.1 から次の結果を得た。

定理 4.1.2 次の 2 つの集合は定義 3.1.1 と命題 3.1.4 の対応によって 1 対 1 の対応が与えられる。

- 定理 4.1.1 の条件を満たす (一般の) connected dual graph diagram 全体の集合。
- 連結で交差を 1 つ以上持つ有向絡み目図式全体の集合。

定理 4.1.2 の証明には次の 2 つの補題を用いる.

補題 4.1.3 定理 4.1.1 の条件を満たす (一般の) connected dual graph diagram が表す有向絡み目図式は連結で交差を 1 つ以上持つ.

補題 4.1.4 連結で交差を 1 つ以上持つ有向絡み目図式の dual graph diagram は定理 4.1.1 の条件を満たす (一般の) connected dual graph diagram である.

参考文献

- [1] D. Needell, S. Nelson, *Biquasiles and dual graph diagrams*, J. Knot Theory Ramifications **10** (2017), no. 8, 1750048.