有界平均振動空間に属するナヴィエ・ストークス方程式の超関数解の平滑化現象について

東北大学 大学院理学研究科 数学専攻
青木基記 (Motofumi Aoki)

概 要

本発表では, ある条件を満たしている非圧縮性ナヴィエ・ストークス方程式の解の平滑化現象について発表する. エネルギー有限な初期値に対して, 本方程式の時間大域的な超関数解が存在することは数学的に証明されている. しかし, 解が滑らかになるかどうかについては数学的には明らかになっておらず, 一定の条件を付け加える必要がある. 本研究では, 有界平均振動空間と呼ばれる関数空間に時間局所的な超関数解が属していれば, その解が滑らかになることについて述べる.

1 序

本研究では, 以下の非圧縮性ナヴィエ・ストークス方程式の超関数解 (弱解) の正則性について考察を行う. 空間次元を 3 次元あるいは 4 次元とする.

$$\begin{cases} \partial_t u - \Delta u + (u \cdot \nabla)u + \nabla p = 0, & t > 0,\ x \in \mathbb{R}^d, \\ \operatorname{div} u = 0, & t > 0,\ x \in \mathbb{R}^d, \\ u\big|_{t=0} = u_0(x), & x \in \mathbb{R}^d. \end{cases} \tag{N-S}$$

ここで, $u = (u_1(t,x), u_2(t,x), \cdots, u_d(t,x))$, $p = p(t,x)$ はそれぞれ流体の速度場と圧力を表す未知関数である. また, $u_0 = (u_{0,1}(x), u_{0,2}(x), \cdots, u_{0,d}(x))$ は $\operatorname{div} u_0 = 0$ を満たす与えられた初期速度場とする. また, 第一式は流体の運動を表す方程式であり, 第二式は流体の質量保存則と非圧縮条件から導かれる式である.

まず初めに, 本発表で用いる非圧縮性ナヴィエ・ストークス方程式の超関数解 (弱解) の定義について述べる. $C_{0,\sigma}^\infty, L_\sigma^p, \dot{H}_\sigma^s, H_\sigma^s$ をそれぞれ

$$\begin{cases} C_{0,\sigma}^\infty := \{f \in C^\infty \big| \operatorname{supp} f \text{ がコンパクトで } \operatorname{div} f = 0\}, \\ L_\sigma^p := \overline{C_{0,\sigma}^\infty}^{\|\cdot\|_p}, \quad 1 < p < \infty, \quad \dot{H}_\sigma^s := \overline{C_{0,\sigma}^\infty}^{\|\cdot\|_{\dot{H}^s}}, \quad H_\sigma^s := \overline{C_{0,\sigma}^\infty}^{\|\cdot\|_{H^s}}, \quad s \in \mathbb{R} \end{cases}$$

とする. 非圧縮性ナヴィエ・ストークス方程式の超関数解を以下で定義する.

定義 (超関数解 [7]). $u_0 \in L_\sigma^2$ とする. 以下が成り立つ時, u は非圧縮性ナヴィエ・ストークス方程式の時間 $(0,T)$ 上の超関数解であると言う.

(1) u がエネルギークラス $L^\infty(0,T;L_\sigma^2) \cap L^2(0,T;\dot{H}_\sigma^1)$ に属する.

(2) u は L^2 の弱位相の意味で $[0,T]$ 上時間について連続, すなわち, 任意の $\phi \in L^2(\mathbb{R}^d)$ に対し,

$$u(t,x) \mapsto \langle u(t,x), \phi(x) \rangle$$

が $[0,T]$ 上時間について連続である.

(3) 任意の $0 \le t < T$ と $\phi \in H^1(0,t;H^1_\sigma)$ に対し,

$$\int_0^t \{\langle -u, \partial_t \phi\rangle + \langle \nabla u, \nabla \phi\rangle + \langle (u\cdot\nabla)u, \phi\rangle\}\, d\tau = -\langle u(t), \phi(t)\rangle + \langle u_0, \phi(0)\rangle$$

が成り立つ.

ここで, $\langle\cdot,\cdot\rangle$ は L^2 内積とする.

続いて, 非圧縮性ナヴィエ・ストークス方程式の先行研究について述べる. Leray は 1934 年に全空間上において, エネルギー不等式

$$\|u(t)\|_2^2 + \int_0^t \|\nabla u\|_2^2 d\tau \le \|u_0\|_2^2$$

を満たす時間大域解の存在を示した. また, Hopf は 1951 年にエネルギー不等式を満たす時間大域解を任意の領域で構成している. このエネルギー不等式を満たす超関数解のことを特に Leray–Hopf の弱解と呼ぶ. しかし, 超関数解のエネルギークラスでの一意正則性は 2 次元空間しか示されていない.

超関数解 u が Serrin クラスと呼ばれる次の空間

$$L^\theta(0,T;L^r), \quad \frac{2}{\theta} + \frac{d}{r} \le 1, \quad d \le r \le \infty$$

に属しているとき, 解が一意的になることが Serrin [10], Masuda [7] によって示されている. さらに, Serrin [9], Iskauriaza–Serëgin–Šhverák [4] らによって Serrin クラスに属している解が滑らかになることが示されている. ここで, $\lambda > 0$ に対し, u_λ, p_λ をそれぞれ

$$u_\lambda(t,x) := \lambda u(\lambda^2 t, \lambda x), \quad p_\lambda(t,x) := \lambda^2 p(\lambda^2 t, \lambda x)$$

と定める. このとき, u, p が非圧縮性ナヴィエ・ストークス方程式の解なら, u_λ, p_λ もまた方程式の解になっている. また, スケール変換を施すことで, u と u_λ の間には次の関係

$$\|u_\lambda\|_{L^\theta(0,T;L^r)} = \lambda^{1-\frac{2}{\theta}-\frac{3}{r}} \|u\|_{L^\theta(0,T;L^r)}$$

が成り立つ. 特に $2/\theta + 3/r = 1$ のとき, $L^\theta(0,T;L^r)$ は, ノルムの大きさが $\lambda > 0$ に依存しないスケール不変な関数空間になっていることが知られている.

以下, スケール不変な条件下における解の正則性に関する先行研究について述べる. Sohr [11] は, $d < r < \infty$ に対して, 弱ルベーグ空間 $L^{\theta,\infty}(0,T;L^{r,\infty})$ に属している十分小さな解が滑らかになることを示している. また, $L^2(0,T;L^\infty)$ の仮定を弱めた結果として, Kozono–Taniuchi [5] によって $L^2(0,T;BMO)$, Kozono–Ogawa–Taniuchi [6] によって $L^2(0,T;\dot{B}^0_{\infty,\infty})$ での一意正則性の結果が示されている. ここで, 関数空間 L^∞, BMO, $\dot{B}^0_{\infty,\infty}$ に対して, 次の包含関係

$$L^\infty \subset BMO \subset \dot{B}^0_{\infty,\infty}.$$

が成り立つことが知られている. さらに, $L^\infty(0,T;L^d)$ の仮定に関連した結果として, $C((0,T];B^{-1}_{\infty,\infty})$ に属している超関数解が滑らかになることが Cheskidov–Shvydkoy [3] によって示されている. この $B^{-1}_{\infty,\infty}$ の斉次型の空間 $\dot{B}^{-1}_{\infty,\infty}$ について, Sobolev の不等式を用いることで, 次の埋め込みの関係

$$L^d \subset \dot{B}^{-1+\frac{d}{p}}_{p,\infty} \subset BMO^{-1} \subset \dot{B}^{-1}_{\infty,\infty}$$

が知られている. そして $\dot{B}^{-1}_{\infty,\infty}$ は, Bourgain–Pavlovic [2] によって非圧縮性ナヴィエ・ストークス方程式の初期値問題の非適切性が示されている空間になっている. また, Seregin–Zhou [8] は $L^\infty(0,T;\dot{B}^{-1}_{\infty,\infty})$ に属する軸対称な超関数解が滑らかになることを示している. これらの結果は, 非圧縮性ナヴィエ・ストークス方程式において, 初期値問題の適切性と解の正則性の問題が独立した問題であることを示唆した結果になっている.

本研究では, 以下の結果を得た.

定理 1.1 ([1])**.** $T < \infty$, $u_0 \in L^2_\sigma$ とし u を (N-S) の $(0,T)$ 上の超関数解で

$$\sup_{0<t<T} t^{\frac{1}{2}} \|u\|_{BMO} < \infty \tag{1.1}$$

を満たすものとする. このとき, 任意の自然数 $k \in \mathbb{N}$ に対して,

$$\sup_{0<t<T} t^{\frac{k}{2}} \|\nabla^k u\|_2 < \infty \tag{1.2}$$

が成り立つ. 特に u は滑らかな解になる.

注意.

(1) (1.1) は非圧縮性ナヴィエ・ストークス方程式の解のスケールを不変にするノルムになっている. すなわち, $u_\lambda(t,x) = \lambda u(\lambda^2 t, \lambda x)$, $\lambda > 0$ に対し, (1.1) は以下を満たしている;

$$\sup_{t>0} t^{\frac{1}{2}} \|u_\lambda\|_{BMO} = \sup_{t>0} t^{\frac{1}{2}} \|u\|_{BMO}.$$

(2) 本結果で用いた条件 (1.1) は, Kozono–Taniuchi [5] が一意正則性を示す上で用いた条件を, 時間方向について部分的に緩和している. 実際, 初期時刻近傍で $t^{-\frac{1}{2}}$ の特異性

$$\|u\|_{BMO} = t^{-\frac{1}{2}}$$

を有する解は, 条件 (1.1) を満たしているが, $L^2(0,T;BMO)$ には属していない.

(3) (1.1) は線形熱方程式の解に対し, 以下の評価が成り立つことが知られている;

$$\sup_{0<t<T} t^{\frac{1}{2}} \|e^{t\Delta} u_0\|_{BMO} \le \|u_0\|_{B^{-1}_{\infty,\infty}}.$$

この評価から, 非圧縮性ナヴィエ・ストークス方程式の初期値問題で非適切性が示されている空間と類似した空間のノルムによって, 線形項に起因する解の挙動がコントロールできることが分かる. したがって, 本結果も Cheskidov–Shvydkoy [3] の結果と同様に, 初期値問題の適切性と解の正則性の問題が独立した問題であることを示唆した結果になると考えられる. また, Cheskidov–Shvydkoy [3] では高周波のノルムの大きさに制限がかかっていたが, 本結果ではノルムの大きさに制限はない.

2 準備

この節では, 本テクニカルレポートで用いる記号 , 関数空間及び補題について述べる.

$\rho \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ を時間方向の軟化作用素とする. すなわち, $0 < s < t < T$ と $0 < \delta < \min\{s, T-t\}$ に対し, ρ は, $\operatorname{supp}\rho \subset (-1,1)$, $\rho(\tau) = \rho(-\tau)$, $\rho(\tau) > 0$, そして $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} \rho(\tau)d\tau = 1$ を満たすものとする. $\rho_\delta(\tau) = \delta^{-1}\rho(\delta^{-1}\tau)$ をスケール変換とし, $u_\delta(\tau)$ を ρ_δ と u の合成積とする:

$$u_\delta(\tau) = (\rho_\delta * u)(\tau) := \int_s^t \rho_\delta(\tau - \mu)u(\mu)d\mu.$$

$\phi_0 \in \mathscr{S}$ を以下を満たす関数とする.

$$\widehat{\phi_0} \ge 0, \ \ \operatorname{supp}\widehat{\phi_0} \subset \{\xi \in \mathbb{R}^d | 2^{-1} \le |\xi| \le 2\}, \ \ \sum_{j\in\mathbb{Z}} \widehat{\phi_0}(2^{-j}\xi) = 1 \ \text{ for any } \xi \in \mathbb{R}^d.$$

このとき, Littlewood–Paley の 2 進単位分解 $\{\phi_j\}_{j\in\mathbb{Z}} \subset \mathscr{S}$ 及び $S_j f$ を以下で定める;

$$\begin{cases} \widehat{\phi_j}(\xi) := \widehat{\phi_0}(2^{-j}\xi) \quad \text{for } j \in \mathbb{Z}, \\ S_j f := \displaystyle\sum_{l=-\infty}^{j-3} \phi_l * f. \end{cases}$$

定義 (Hardy 空間, BMO 空間). $1 \le p < \infty$ とする. $\phi \in \mathscr{S}$ は $\lambda > 0$ に対し, $\phi_\lambda := \lambda^{-d}\phi(\lambda^{-1}x)$ が $\|\phi_\lambda\|_1 = 1$ を満たすものとする. Hardy 空間 $\mathcal{H}^p$ は

$$\|f\|_{\mathcal{H}^p} := \left\{ f \in L^p_{loc} \middle| \sup_{\lambda>0} \|\phi_\lambda * f\|_p < \infty \right\}$$

で定められる関数空間である. また, BMO 空間を

$$BMO := \left\{ f \in L^1_{loc}/\sim \middle| \|f\|_{BMO} := \sup_{x\in\mathbb{R}^d, r>0} \frac{1}{|B_r(x)|} \int_{B_r(x)} |f(y) - f_{B_r(x)}| dy < \infty \right\}$$

で定義する. ここで, $\sim$ は定数関数を 0 と同一視する同値関係で, $f_{B_r(x)}$ は中心 x 半径 r の球における積分平均である.

定義 (斉次 Triebel–Lizorkin 空間). $1 \le p \le \infty$, $1 \le q < \infty$, $s \in \mathbb{R}$ とする. 斉次 Triebel–Lizorkin 空間 $\dot{F}^s_{p,q}$ を以下で定める.

$$\dot{F}^s_{p,q} := \{ f \in \mathscr{S}'/\mathscr{P} \big| \|f\|_{\dot{F}^s_{p,q}} < \infty \},$$

$$\|f\|_{\dot{F}^s_{p,q}} := \begin{cases} \left\| \left\{ \displaystyle\sum_{j\in\mathbb{Z}} (2^{sj}|(\phi_j * f)(x)|)^q \right\}^{\frac{1}{q}} \right\|_p & \text{if } p < \infty, \\ \displaystyle\sup_{\substack{j\in\mathbb{Z}, \\ x\in\mathbb{R}^d}} \left\{ \frac{1}{|B_{2^{-j}}(x)|} \int_{B_{2^{-j}}(x)} \sum_{k\ge j} (2^{sk}|(\phi_k * f)(y)|)^q dy \right\}^{\frac{1}{q}} & \text{if } p = \infty. \end{cases}$$

ここで, $\mathscr{S}'$ は緩増加超関数全体の集合, $\mathscr{P}$ は多項式全体の集合とする.

注意.

(1) $1 < p < \infty$ に対し, L^p と $\mathcal{H}^p$ と $\dot{F}^0_{p,2}$ は同型な空間になっていることが知られている. また, $\mathcal{H}^1$ と $\dot{F}^0_{1,2}$ は同型な空間であり, BMO と $\dot{F}^0_{\infty,2}$ は同型な空間であることが知られている.

(2) $1 \le p < \infty$ と Hölder 共役指数 p' に対して, $(\dot{F}^0_{p,2})' \cong \dot{F}^0_{p',2}$ が成り立つ. また, $(\mathcal{H}^1)' \cong BMO$ であることが知られている.

補題 2.1 ([1])**.** $T < \infty, d \le 4, k \in \mathbb{N}$ とする. $u, v, w \in L^\infty(0,T; L^2_\sigma) \cap L^2(0,T; \dot{H}^1_\sigma)$ であり, w は (1.1) を満たすものとする. このとき, ほとんど至る所の $t \in (0,T)$ と $0 \le s \le t$ に対し, 以下が成り立つ;

$$\int_s^t \tau^k \langle (u\cdot\nabla)v, w\rangle d\tau = -\int_s^t \tau^k \langle (u\cdot\nabla)w, v\rangle d\tau.$$

命題 2.2 ([1])**.** $s, s_0 \ge 1$ とする. このとき, $C = C(d) > 0$ が存在して, 任意の $f \in \dot{F}^{-s}_{\infty,2} \cap \dot{H}^{s_0}$, $g \in \dot{H}^s \cap \dot{F}^{-s_0}_{\infty,2}$ と $h \in L^2$ に対し, 以下が成り立つ;

$$\left| \int_{\mathbb{R}^d} fgh \, dx \right| \le C(\|f\|_{\dot{F}^{-s}_{\infty,2}} \|g\|_{\dot{H}^s} \|h\|_2 + \|f\|_{\dot{H}^{s_0}} \|g\|_{\dot{F}^{-s_0}_{\infty,2}} \|h\|_2).$$

特に, 任意の $u, v \in \dot{F}^{-s}_{\infty,2} \cap \dot{H}^{s+1}$ と $w \in L^2$ に対し, 以下が成り立つ;

$$|\langle (u\cdot\nabla)v, w\rangle| \le C(\|u\|_{\dot{F}^{-s}_{\infty,2}}\|\nabla v\|_{\dot{H}^s}\|w\|_2 + \|u\|_{\dot{H}^{s+1}}\|\nabla v\|_{\dot{F}^{-(s+1)}_{\infty,2}}\|w\|_2).$$

命題 2.3 ([1])**.** $0 < T < \infty$, $u_0 \in L^2_\sigma$ とする. u が (N-S) の $(0,T)$ 上の超関数解で, (1.1) を満たすものとする. このとき, 任意の $k \in \mathbb{N}$ とほとんど至る所の $t \in (0,T)$ と $0 \le s \le t$ に対し, 次の時間重み付きのエネルギー等式が成り立つ;

$$t^k\|u(t)\|_2^2 + 2\int_s^t \tau^k\|\nabla u\|_2^2 d\tau = s^k\|u(s)\|_2^2 + k\int_s^t \tau^{k-1}\|u\|_2^2 d\tau.$$

3 定理 1.1 の証明

証明. 本証明は帰納法で示す. 定理 1.1 の仮定を満たすような超関数解 u をとる. $w_h^{(k)}$ を u の空間方向に関する k 階差分

$$\begin{aligned} &w_h^{(1)}(t,x) = u(t,x+h) - u(t,x), \quad h \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\},\\ &w_h^{(k)} = \left(w_h^{(k-1)}\right)_h^{(1)}, \quad k = 2,3,4,\cdots \end{aligned}$$

とする. まず, 空間方向の差分に関する時間重み付きのエネルギー等式

$$t\|w_h^{(1)}(t)\|_2^2 + 2\int_0^t \tau\|\nabla w_h^{(1)}\|_2^2 d\tau = \int_0^t \|w_h^{(1)}\|_2^2 d\tau + \int_0^t \tau\langle (w_h^{(1)}\cdot\nabla)w_h^{(1)}, u\rangle d\tau \tag{3.1}$$

を示す. 命題 2.3 より,

$$t\|u(t,x)\|_2^2 + 2\int_0^t \tau\|\nabla u(\tau,x)\|_2^2 d\tau = \int_0^t \|u(\tau,x)\|_2^2 d\tau$$

が成り立つ. したがって, x を $x+h$ に取り替えることで,

$$t\|u(t,x+h)\|_2^2 + 2\int_0^t \tau\|\nabla u(\tau,x+h)\|_2^2 d\tau = \int_0^t \|u(\tau,x+h)\|_2^2 d\tau$$

を得る. 次に, $u(t,x)$ に対しては $\tau^{\frac{1}{2}}(\tau^{\frac{1}{2}}u(\tau,x+h))_\delta$ を, $u(t,x+h)$ に対しては $\tau^{\frac{1}{2}}(\tau^{\frac{1}{2}}u(\tau,x))_\delta$ をそれぞれテスト関数として取り, δ について極限を取ることで, 次の差に関するエネルギー等式

$$\begin{aligned} &t\langle u(t,x), u(t,x+h)\rangle + 2\int_0^t \tau\langle \nabla u(\tau,x), \nabla u(\tau,x+h)\rangle d\tau\\ &= \int_0^t \langle u(\tau,x), u(\tau,x+h)\rangle d\tau - \int_0^t \tau\langle (w_h^{(1)}(\tau,x)\cdot\nabla)w_h^{(1)}(\tau,x+h), u(\tau,x)\rangle\} d\tau \end{aligned}$$

が得られる. ここで, 非線形項 $\tau\langle (w_h^{(1)}(\tau,x)\cdot\nabla)w_h^{(1)}(\tau,x+h), u(\tau,x)\rangle$ については

$$\begin{aligned} &\langle (u(\tau,x+h)\cdot\nabla)u(\tau,x+h), u(\tau,x)\rangle + \langle (u(\tau,x)\cdot\nabla)u(\tau,x), u(\tau,x+h)\rangle\\ &= \langle (u(\tau,x+h)\cdot\nabla)u(\tau,x+h), u(\tau,x)\rangle - \langle (u(\tau,x)\cdot\nabla)u(\tau,x+h), u(\tau,x)\rangle\\ &= \langle (w_h^{(1)}(\tau,x)\cdot\nabla)u(\tau,x+h), u(\tau,x)\rangle = \langle (w_h^{(1)}(\tau,x)\cdot\nabla)w_h^{(1)}(\tau,x), u(\tau,x)\rangle \end{aligned}$$

のように計算している. 最後にこれらを足し合わせることで, 空間方向の差分に関する時間重み付きのエネルギー等式 (3.1) が得られる.

$k=1$ のとき, (1.2) が成り立つことを示す. $\mathcal{H}^1$ と BMO の双対性, div-curl lemma, そして (1.1) を用いることで, ある正定数 C_0 によって非線形項 $\tau\langle (w_h^{(1)}(\tau,x)\cdot\nabla)w_h^{(1)}(\tau,x+h), u(\tau,x)\rangle$ は

$$\begin{aligned}\left|\int_0^t \tau\langle (w_h^{(1)}\cdot\nabla)w_h^{(1)}, u\rangle d\tau\right| &\le \int_0^t \tau\|(w_h^{(1)}\cdot\nabla)w_h^{(1)}\|_{\mathcal{H}^1}\|u\|_{BMO}d\tau \\ &\le C\int_0^t \tau^{\frac{1}{2}}\|w_h^{(1)}\|_2\|\nabla w_h^{(1)}\|_2 d\tau \sup_{0<t<T} t^{\frac{1}{2}}\|u\|_{BMO} \\ &\le \frac{1}{2}C_0^2\int_0^t \|w_h^{(1)}\|_2^2 d\tau\left(\sup_{0<t<T} t^{\frac{1}{2}}\|u\|_{BMO}\right)^2 + \frac{1}{2}\int_0^t \tau\|\nabla w_h^{(1)}\|_2^2 d\tau\end{aligned}$$

と上から評価できる. これを空間方向の差分に関するエネルギー等式 (3.1) に代入することで,

$$t\|w_h^{(1)}(t)\|_2^2 + \int_0^t \tau\|\nabla w_h^{(1)}\|_2^2 d\tau \le \left(1+\frac{1}{2}C_0^2\sup_{0<t<T} t\|u\|_{BMO}^2\right)\int_0^t \|w_h^{(1)}\|_2^2 d\tau \tag{3.2}$$

が分かる. ここで, 微分ノルムと差分ノルムについて

$$\sup_{h\in\mathbb{R}^d\setminus\{0\}} \frac{\|u(x+h)-u(x)\|_2}{|h|} = \|\nabla u\|_2$$

が成り立つことに注意すれば, (3.2) の両辺を $|h|$ で割ることで,

$$\sup_{0<t<T}\left(t\|\nabla u\|_2^2 + \int_0^t \tau\|\nabla^2 u\|_2^2 d\tau\right) \le \left(1+\frac{1}{2}C_0^2\sup_{0<t<T} t\|u\|_{BMO}^2\right)\|u\|_{L^2(0,T;\dot{H}^1)}^2 \tag{3.3}$$

が得られる. 左辺の 1 項目から $k=1$ の場合の正則性の証明が従う.

続いて, 帰納法を用いて任意の $k\in\mathbb{N}$ に対して (1.2) が成り立つことを示す. $k\ge 2$ と $h\in\mathbb{R}^d\setminus\{0\}$ を任意に固定する. また, $k-1$ 以下の任意の自然数 m に対して u が

$$\sup_{0<t<T} t^m\|\nabla^m u(t)\|_2^2 + \int_0^t \tau^m\|\nabla^{m+1}u\|_2^2 d\tau \le A(m)\int_0^t \tau^{m-1}\|\nabla^m u\|_2^2 d\tau \tag{3.4}$$

を満たしていると仮定する. ここで, $A(m)$ は

$$\begin{cases} A(1) := 1+\dfrac{C_0^2}{2}\left(\displaystyle\sup_{0<t<T} t^{\frac{1}{2}}\|u\|_{BMO}\right)^2, \\ A(m) := m+\left\{\dfrac{C_0^2}{2}+\dfrac{1}{2}C_1^2(1+C_2)^2\left\{(1+C_2)^m-1-C_2^m\right\}^2\right\}\left(\displaystyle\sup_{0<t<T} t^{\frac{1}{2}}\|u\|_{BMO}\right)^2 \end{cases}$$

で定められるものであり, C_0 は (3.2), C_1 は 命題 2.2 によってそれぞれ定まる正定数とする. また, C_2 は (3.8) で後述する, BMO 空間における微分ノルムと差分ノルムの同値性から現れる正定数とする. u が (3.4) を満たしているとき, 自然数 k に対して

$$\sup_{0<t<T} t^k\|\nabla^k u(t)\|_2^2 + \int_0^t \tau^k\|\nabla^{k+1}u\|_2^2 d\tau \le A(k)\int_0^t \tau^{k-1}\|\nabla^k u\|_2^2 d\tau \tag{3.5}$$

を満たすことを示す. 最初に定めた u の k 階差分 $w_h^{(k)}$ は

$$w_h^{(k)}(t,x) := \sum_{l=0}^{k}(-1)^l\binom{k}{l}u(t,x+lh)$$

の形で書ける．$k=1$ の場合と同様に計算することで $w_h^{(k)}$ は次の時間重み付きのエネルギー等式

$$
\begin{aligned}
&t^k\|w_h^{(k)}(t)\|_2^2+2\int_0^t \tau^k\|\nabla w_h^{(k)}\|_2^2 d\tau+\int_0^t \tau^k\langle (u(x+kh)\cdot\nabla)w_h^{(k)}, w_h^{(k)}\rangle d\tau\\
=&k\int_0^t \tau^{k-1}\|w_h^{(k)}\|_2^2 d\tau-\sum_{l=1}^{k-1}\binom{k}{l}\int_0^t \tau^k\langle (w_h^{(k-l)}(x+lh)\cdot\nabla)w_h^{(l)}, w_h^{(k)}\rangle d\tau \qquad (3.6)\\
-&\int_0^t \tau^k\langle (w_h^{(k)}\cdot\nabla)u, w_h^{(k)}\rangle d\tau
\end{aligned}
$$

を満たす．補題 2.1 より (3.6) の左辺 3 項目は 0 になる．(3.6) の右辺 2 項目は, 命題 2.2 から

$$
\begin{aligned}
&\binom{k}{l}\left|\int_0^t \tau^k\langle (w_h^{(k-l)}(x+lh)\cdot\nabla)w_h^{(l)}, w_h^{(k)}\rangle d\tau\right|\\
\le&C_1\binom{k}{l}\int_0^t \tau^{\frac12}\|w_h^{(k-l)}\|_{\dot F^{-(k-l)}_{\infty,2}}\tau^{k-\frac12}\|\nabla w_h^{(l)}\|_{\dot H^{k-l}}\|w_h^{(k)}\|_2 d\tau \qquad (3.7)\\
+&C_1\binom{k}{l}\int_0^t \tau^{k-\frac12}\|w_h^{(k-l)}\|_{\dot H^{(l+1)}}\tau^{\frac12}\|\nabla w_h^{(l)}\|_{\dot F^{-(l+1)}_{\infty,2}}\|w_h^{(k)}\|_2 d\tau
\end{aligned}
$$

と評価できる．上式の両辺を $|h|^{2k}$ で割る．このとき, 微分ノルムを差分ノルムの同値性から

$$
\begin{aligned}
&\sup_{h\in\mathbb{R}^d\setminus\{0\}}\frac{\|w_h^{(k-l)}\|_{\dot F^{-(k-l)}_{\infty,2}}}{|h|^{k-l}}\le C_2^{k-l}\|u\|_{BMO}, \qquad (3.8)\\
&\sup_{h\in\mathbb{R}^d\setminus\{0\}}\frac{\|\nabla w_h^{(l)}\|_{\dot H^{k-l}}}{|h|^{l}}\le \|\nabla u\|_{\dot H^k},\\
&\sup_{h\in\mathbb{R}^d\setminus\{0\}}\frac{\|w_h^{(k)}\|_2}{|h|^{k}},\ \sup_{h\in\mathbb{R}^d\setminus\{0\}}\frac{\|w_h^{(l)}\|_{\dot H^{k-l}}}{|h|^{l}}\le \|u\|_{\dot H^k}
\end{aligned}
$$

となることに注意すれば, (3.7) の右辺 1 項目から

$$
\begin{aligned}
&\binom{k}{l}\left|\frac{C_1}{|h|^{2k}}\int_0^t \tau^{\frac12}\|w_h^{(k-l)}\|_{\dot F^{-(k-l)}_{\infty,2}}\tau^{k-\frac12}\|\nabla w_h^{(l)}\|_{\dot H^{k-l}}\|w_h^{(k)}\|_2 d\tau\right|\\
\le&C_1C_2^{k-l}\binom{k}{l}\sup_{0<t<T}t^{\frac12}\|u\|_{BMO}\left(\int_0^t \tau^{k-1}\|u\|_{\dot H^k}^2 d\tau\right)^{\frac12}\left(\int_0^t \tau^{k}\|\nabla u\|_{\dot H^k}^2 d\tau\right)^{\frac12}
\end{aligned}
$$

が得られる．また,

$$
\begin{aligned}
&\sup_{h\in\mathbb{R}^d\setminus\{0\}}\frac{\|\nabla w_h^{(l)}\|_{\dot F^{-(l+1)}_{\infty,2}}}{|h|^{l+1}}\le C_2^{l+1}\|u\|_{BMO},\\
&\sup_{h\in\mathbb{R}^d\setminus\{0\}}\frac{\|w_h^{(k-l)}\|_{\dot H^{l+1}}}{|h|^{k-l}}\le \|u\|_{\dot H^{k+1}},\\
&\sup_{h\in\mathbb{R}^d\setminus\{0\}}\frac{\|w_h^{(k)}\|_2}{|h|^{k}},\ \sup_{h\in\mathbb{R}^d\setminus\{0\}}\frac{\|w_h^{(k-l)}\|_{\dot H^{l}}}{|h|^{k-l}}\le \|u\|_{\dot H^k}
\end{aligned}
$$

となることから, (3.7) の右辺 2 項目は, (3.7) の右辺 1 項目のときと同様にして

$$
\begin{aligned}
&\binom{k}{l}\left|\frac{C_1}{|h|^{2k}}\int_0^t \tau^{k-\frac{1}{2}}\|w_h^{(k-l)}\|_{\dot{H}^{(l+1)}}\tau^{\frac{1}{2}}\|\nabla w_h^{(l)}\|_{\dot{F}^{-(l+1)}_{\infty,2}}\|w_h^{(k)}\|_2 d\tau\right| \\
\leq &C_1 C_2^{l+1}\binom{k}{l}\sup_{0<t<T} t^{\frac{1}{2}}\|u\|_{BMO}\left(\int_0^t \tau^{k-1}\|u\|_{\dot{H}^k}^2 d\tau\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_0^t \tau^k\|\nabla u\|_{\dot{H}^k} d\tau\right)^{\frac{1}{2}}
\end{aligned}
$$

と評価できることが分かる. 以上より, (3.6) の右辺 2 項目は

$$
\begin{aligned}
&\sum_{l=1}^{k-1}\binom{k}{l}\left|\frac{1}{|h|^{2k}}\int_0^t \tau^k\langle(w_h^{(k-l)}(x+lh)\cdot\nabla)w_h^{(l)}, w_h^{(k)}\rangle d\tau\right| \\
\leq &C_1\left\{\sum_{l=1}^{k-1}\left(C_2^{k-l}+C_2^{l+1}\right)\binom{k}{l}\right\}\sup_{0<t<T} t^{\frac{1}{2}}\|u\|_{BMO}\left(\int_0^t \tau^{k-1}\|u\|_{\dot{H}^k}^2 d\tau\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_0^t \tau^k\|\nabla u\|_{\dot{H}^k} d\tau\right)^{\frac{1}{2}}
\end{aligned}
$$

のように上から評価できる. さらに, 2 項定理より

$$
\sum_{l=1}^{k-1}\left(C_2^{k-l}+C_2^{l+1}\right)\binom{k}{l} = (1+C_2)\Big((1+C_2)^k - 1 - C_2^k\Big)
$$

であるから, これとヤングの不等式を用いることで, 最終的に (3.6) の右辺 2 項目は上から

$$
\begin{aligned}
&\sum_{l=1}^{k-1}\binom{k}{l}\left|\frac{1}{|h|^{2k}}\int_0^t \tau^k\langle(w_h^{(k-l)}(x+lh)\cdot\nabla)w_h^{(l)}, w_h^{(k)}\rangle d\tau\right| \\
&\leq \frac{1}{2}C_1^2(1+C_2)^2\left\{(1+C_2)^k - 1 - C_2^k\right\}^2\left(\sup_{0<t<T} t^{\frac{1}{2}}\|u\|_{BMO}\right)^2\int_0^t \tau^{k-1}\|u\|_{\dot{H}^k}^2 d\tau \\
&\quad + \frac{1}{2}\int_0^t \tau^k\|\nabla u\|_{\dot{H}^k}^2 d\tau
\end{aligned}
$$

のように評価できる. (3.6) の右辺 3 項目についても, 右辺 2 項目と同様に

$$
\begin{aligned}
&\left|-\frac{1}{|h|^{2k}}\int_0^t \tau^k\langle(w_h^{(k)}\cdot\nabla)u, w_h^{(k)}\rangle d\tau\right| = \left|\frac{1}{|h|^{2k}}\int_0^t \tau^k\langle(w_h^{(k)}\cdot\nabla)w_h^{(k)}, u\rangle d\tau\right| \\
&\leq \frac{C_0^2}{2}\left(\sup_{0<t<T} t^{\frac{1}{2}}\|u\|_{BMO}\right)^2\int_0^t \tau^{k-1}\|u\|_{\dot{H}^k}^2 d\tau + \frac{1}{2}\int_0^t \tau^k\|\nabla u\|_{\dot{H}^k}^2 d\tau
\end{aligned}
$$

の形で上から評価できる. したがって, (3.6) の両辺を $|h|^{2k}$ で割り, 非線形項に関する上の評価を適用することで, $h \in \mathbb{R}^d\backslash\{0\}$ に対して,

$$
t^k\frac{\|w_h^{(k)}(t)\|_2^2}{|h|^{2k}} + 2\int_0^t \tau^k\frac{\|\nabla w_h^{(k)}\|_2^2}{|h|^{2k}}d\tau \leq A(k)\int_0^t \tau^{k-1}\|\nabla^k u\|_2^2 d\tau + \int_0^t \tau^k\|\nabla^{k+1}u\|_2^2 d\tau
$$

が成り立つことが分かる. あとは, 微分ノルムと差分ノルムの同値性を用いることで, (3.5)

$$
t^k\|\nabla^k u(t)\|_2^2 + \int_0^t \tau^k\|\nabla^{k+1}u\|_2^2 d\tau \leq A(k)\int_0^t \tau^{k-1}\|\nabla^k u\|_2^2 d\tau
$$

が得られる. 最後に, (3.5) の右辺が有界であることを示す. (3.4) の仮定より

$$
\int_0^t \tau^m\|\nabla^{m+1}u\|_2^2 d\tau \leq A(m)\int_0^t \tau^{m-1}\|\nabla^m u\|_2^2 d\tau \quad \text{for } m = 1, 2, \cdots, k-1
$$

が成り立つから, (3.5) と合わせることで,

$$\int_0^t \tau^{k-1} \|\nabla^k u\|_2^2 d\tau \leq \left(\prod_{m=1}^{k-1} A(m) \right) \int_0^t \|u\|_{\dot{H}^1}^2 d\tau$$

である. 超関数解の定義より $u \in L^2(0,T;\dot{H}^1)$ であったから, 任意の $k \in \mathbb{N}$ に対して,

$$\sup_{0<t<T} t^{\frac{k}{2}} \|\nabla^k u\|_2 < \infty$$

が分かる. □

参考文献

[1] M. Aoki and T. Iwabuchi, *Remark on smoothing property of weak solutions for the Navier-Stokes equations*, Differential Integral Equations **34** (2021), no. 3-4, 199–222.

[2] J. Bourgain and N. Pavlović, *Ill-posedness of the Navier-Stokes equations in a critical space in 3D*, J. Funct. Anal. **255** (2008), no. 9, 2233–2247.

[3] A. Cheskidov and R. Shvydkoy, *The regularity of weak solutions of the 3D Navier-Stokes equations in* $B^{-1}_{\infty,\infty}$, Arch. Ration. Mech. Anal. **195** (2010), no. 1, 159–169.

[4] L. Escauriaza, G. Seregin, and V. Šverák, *Backward uniqueness for parabolic equations*, Arch. Ration. Mech. Anal. **169** (2003), no. 2, 147–157.

[5] H. Kozono and Y. Taniuchi, *Bilinear estimates in BMO and the Navier-Stokes equations*, Math. Z. **235** (2000), no. 1, 173–194.

[6] H. Kozono, T. Ogawa, and Y. Taniuchi, *The critical Sobolev inequalities in Besov spaces and regularity criterion to some semi-linear evolution equations*, Math. Z. **242** (2002), no. 2, 251–278.

[7] K. Masuda, *Weak solutions of Navier-Stokes equations*, Tohoku Math. J. (2) **36** (1984), no. 4, 623–646.

[8] G. Seregin and D. Zhou, *Regularity of solutions to the Navier-Stokes equations in* $\dot{B}^{-1}_{\infty,\infty}$, Zap. Nauchn. Sem. S.-Peterburg. Otdel. Mat. Inst. Steklov. (POMI) **477** (2018), no. Kraevye Zadachi Matematicheskoĭ Fiziki i Smezhnye Voprosy Teorii Funktsiĭ. 47, 119–128; English transl., J. Math. Sci. (N.Y.) **244** (2020), no. 6, 1003–1009.

[9] J. Serrin, *On the interior regularity of weak solutions of the Navier-Stokes equations*, Arch. Rational Mech. Anal. **9** (1962), 187–195.

[10] ———, *The initial value problem for the Navier-Stokes equations*, Nonlinear Problems (Proc. Sympos., Madison, Wis., 1962), Univ. Wisconsin Press, Madison, Wis., 1963.

[11] H. Sohr, *A regularity class for the Navier-Stokes equations in Lorentz spaces*, J. Evol. Equ. **1** (2001), no. 4, 441–467. Dedicated to the memory of Tosio Kato.