有限交代多重ゼータ値の
パラメータを持つ重み付き和公式について

名古屋大学大学院多元数理科学研究科
安沢 拓真　Anzawa Takumi

2021/12/19

1　導入

$\mathbb{N}^r$ $(r \in \mathbb{N})$ の元を**指数**と呼ぶことにする。ここで指数 $\mathbf{k} := (k_1, \ldots, k_r) \in \mathbb{N}^r$ で $k_r > 1$ を満たすものを取る。**多重ゼータ値**とは次で定義される実数値である:

$$\zeta(\mathbf{k}) := \zeta(k_1, \ldots, k_r) := \sum_{0<m_1<\cdots<m_r} \frac{1}{m_1^{k_1} \cdots m_r^{k_r}}$$

ここで $k := k_1 + \cdots + k_r$ を $\mathbf{k}$ の**重さ**と言い $\mathrm{wt}\,\mathbf{k}$ もしくは $|\boldsymbol{k}|$ と書き、r を $\boldsymbol{k}$ の**深さ**と言い $\mathrm{dp}\,\mathbf{k}$ と書く。多重ゼータ値の重さ、深さと言ったりもする。$r = 1$ のときは Riemann のゼータ関数の正の整数点での特殊値になることに注意する。多重ゼータ値の起源は古く Euler により関係式

$$\sum_{i=2}^{k-1} \zeta(i, k-i) = \zeta(k)$$

が得られている。これは和公式と呼ばれる関係式 (c.f. [G])

$$\sum_{\substack{k_1+\cdots+k_r=k \\ k_r \geq 2}} \zeta(k_1, \ldots, k_r) = \zeta(k).$$

の特別なケースである。現在では多重ゼータ値の研究は数論の域にはとどまらず例えば場の理論やファインマンダイアグラム、結び目理論 (c.f. [B1], [B2], [LM] など)、と結びついており他にもモチーフ論 (c.f. [T]) とも関連性が深い。

多重ゼータ値の反復積分表示を紹介する。そのために多重ポリログを定義する。

***Definition* 1.1.** $\boldsymbol{k} := (k_1, \ldots, k_r) \in \mathbb{Z}^r$ とする。このとき複素関数, **多重ポリログ** $\mathrm{Li}_{\boldsymbol{k}}(z) := \mathrm{Li}(\boldsymbol{k}; z) := \mathrm{Li}(\boldsymbol{k})$ を次で定める：

$$\mathrm{Li}_{\boldsymbol{k}}(z) := \sum_{0<m_1<\cdots<m_r} \frac{z^{m_r}}{m_1^{k_1} \cdots m_r^{k_r}}.$$

$\mathrm{Li}_{\boldsymbol{k}}(z)$ は $z = 0$ を中心とする半径 1 の開円板上で絶対かつ広義一様に収束する。

***Remark* 1.2.** $k_r > 1$ のとき多重ポリログ $\mathrm{Li}_{\boldsymbol{k}}(z)$ は $z = 0$ を中心とする半径 1 の閉円板で収束するため $\lim\limits_{z \to 1} \mathrm{Li}_{\boldsymbol{k}}(z) = \zeta(\boldsymbol{k})$ が成り立つ。

多重ポリログ $\mathrm{Li}_{\boldsymbol{k}}(z)$ は $0<z<1$ のとき以下の**反復積分表示**と言われる表示を持つ:

$$\mathrm{Li}_{\boldsymbol{k}}(z)=\int_{0<t_1<\cdots<t_k<z}\frac{dt_1}{1-t_1}\underbrace{\frac{dt_2}{t_2}\cdots\frac{dt_{k_r}}{t_{k_r}}}_{k_r-1\text{ 個}}\frac{dt_{k_r+1}}{1-t_{k_r+1}}\cdots\frac{dt_{k-k_1+1}}{1-t_{k-k_1+1}}\underbrace{\frac{dt_{k-k_1+2}}{t_{k-k_1+2}}\cdots\frac{dt_k}{t_k}}_{k_1-1\text{ 個}}.$$

但し $k:=\mathrm{wt}\,\boldsymbol{k}$ とする。特に $k_r>1$ ならば $z\to 1$ を取ることで次が得られる:

$$\zeta(\boldsymbol{k})=\int_{0<t_1<\cdots<t_k<1}\frac{dt_1}{1-t_1}\underbrace{\frac{dt_2}{t_2}\cdots\frac{dt_{k_r}}{t_{k_r}}}_{k_r-1\text{ 個}}\frac{dt_{k_r+1}}{1-t_{k_r+1}}\cdots\frac{dt_{k-k_1+1}}{1-t_{k-k_1+1}}\underbrace{\frac{dt_{k-k_1+2}}{t_{k-k_1+2}}\cdots\frac{dt_k}{t_k}}_{k_1-1\text{ 個}}.$$

例えば指数として 2 を取ると

$$\zeta(2)=\int_{0<t_1<t_2<1}\frac{dt_1}{1-t_1}\frac{dt_2}{t_2}$$

が得られる。

***Definition* 1.3.** 各整数 $k\geq 0$ に対して $\mathbb{Q}$-線形空間 $\mathcal{Z}_k\subset\mathbb{R}$ を $\mathcal{Z}_0:=\mathbb{Q}$,

$$\mathcal{Z}_k:=\sum_{\substack{k_1+\cdots+k_r=k\\ r\geq 1,k_i\geq 1,k_r\geq 2}}\mathbb{Q}\cdot\zeta(k_1,\ldots,k_r),\ (k\geq 1)$$

により定める。また

$$\mathcal{Z}:=\sum_{k=0}^{\infty}\mathcal{Z}_k$$

と定める。

$\mathcal{Z}$ 上の全ての線形関係式は正規化複シャッフル関係式と呼ばれる関係式から導かれると予想されている。また $\mathcal{Z}$ は $\mathcal{Z}_k$ の直和で表されると予想されている。即ち $\mathcal{Z}$ 上の異なる重さの非自明な線形関係式は存在しないと予想されている。

さて、多重調和和と呼ばれる多重ゼータ値の部分和

$$H_M(k_1,\ldots,k_r):=\sum_{M>m_r>\cdots>m_1\geq 1}\frac{1}{m_1^{k_1}\cdots m_r^{k_r}}\ (M,\ r\in\mathbb{N},\ M>r,\ (k_1,\ldots,k_r)\in\mathbb{N}^r)$$

は 2000 年代に Hoffmann 氏や Zhao 氏らによって特に $M=p$: 素数の場合について研究されていた。これを基に Kaneko, Zagier 氏の両氏は

$$\mathcal{A}=\left(\prod_{p:\mathrm{prime}}\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}\right)\Big/\left(\bigoplus_{p:\mathrm{prime}}\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}\right)$$

なる $\mathbb{Q}$-代数で値を取る有限多重ゼータ値を次で定義した。

***Definition* 1.4.** $(k_1,\ldots,k_r)\in\mathbb{N}^d$ とする。 **有限多重ゼータ値**とは

$$\zeta_{\mathcal{A}}(k_1,\ldots,k_r):=\left(\sum_{p>m_r>\cdots>m_1\geq 1}\frac{1}{n_1^{k_1}\cdots n_r^{k_r}}\right)_p$$

によって定まる $\mathcal{A}$ の元である。

***Definition* 1.5.** 各整数 $k \geq 0$ に対して $\mathbb{Q}$-線形空間 $\mathcal{Z}_{\mathcal{A},k} \subset \mathcal{A}$ を $\mathcal{Z}_{\mathcal{A},0} := \mathbb{Q}$,

$$\mathcal{Z}_{\mathcal{A},k} := \sum_{\substack{k_1+\cdots+k_r=k \\ r\geq 1, k_i \geq 1}} \mathbb{Q} \cdot \zeta_{\mathcal{A}}(k_1, \ldots, k_r) \ (k \geq 1)$$

により定める。また

$$\mathcal{Z}_{\mathcal{A}} := \sum_{k=0}^{\infty} \mathcal{Z}_{\mathcal{A},k}$$

と定める。

$\mathcal{Z}$ と同様に $\mathcal{Z}_{\mathcal{A}}$ は $\mathcal{Z}_{\mathcal{A},k}$ の直和で表されると予想されている。

多重ゼータ値と有限多重ゼータ値は形こそ似ているものの果たして有限多重ゼータ値が多重ゼータ値の有限類似になっているか見えてこない。それを敷衍しているのが次に紹介する金子-Zagier 予想である。

***Conjecture* 1.6** ([Kan], 主予想)**.** 次の $\mathbb{Q}$-代数同型が存在する:

$$\mathcal{Z}/\zeta(2)\mathcal{Z} \cong \mathcal{Z}_{\mathcal{A}}.$$

実際多くの多重ゼータ値の関係式や空間の構造の有限類似が見つかっており実際 [SW] では $1 \leq i \leq n \leq k-1$ なる $k,\, n,\, i \in \mathbb{Z}$ に対して

$$I_{k,n,i} = \{(k_1, ..., k_n) \in \mathbb{Z}_{\geq 1}^n \mid k_1 + \cdots + k_n = k, k_i \geq 2.\}$$

と定めたとき

$$\sum_{(k_1,\ldots,k_n)\in I_{k,n,i}} \zeta_{\mathcal{A}}(k_1, \ldots, k_n) = (-1)^{n-i} \left(\binom{k-1}{n-i} + (-1)^n \binom{k-1}{i-1} \right) \beta_k.$$

が成り立つことを示している。但し $\beta_k := \left(\frac{B_{p-k}}{k}\right)_{p>k} \in \mathcal{A}$ であり B_n はベルヌーイ数と呼ばれる有理数で (形式的な) べき級数展開

$$\frac{t}{e^t - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{n} t^n$$

により定まる。これは先で紹介した和公式の有限類似である。

多重ゼータ値のパラメータ付き重み付き和公式は [EW], [OEL] の着想をもとに門田氏 [Kad] によって考えられた。鎌野氏 [Kam] によってパラメータ付き重み付き和公式の有限類似が次によって与えられている。

***Theorem* 1.7** ([Kam], main theorem)**.** $q_1,\, q_2 \in \mathbb{N}$ を取る。また $\lambda_1,\, \lambda_2,\, \xi_1,\, \xi_2$ を変数とする。このとき $\mathcal{A}$ において以下が成り立つ:

$$\sum_{\substack{i_1,i_2,j_1,j_2\geq 0 \\ i_1+i_2=q_1 \\ j_1+j_2=q_2}} \left((-1)^{i_2+j_2} \lambda_1^{i_1} \lambda_2^{i_2} \xi_1^{j_1} \xi_2^{j_2} + (\lambda_1^{i_1} \xi_1^{j_1} + \lambda_2^{i_1} \xi_2^{j_1})(\lambda_1 + \lambda_2)^{i_2} (\xi_1 + \xi_2)^{j_2} \right) \times \sum_{\substack{\boldsymbol{k_1} \in S_{i_1,j_1} \\ \boldsymbol{k_2} \in S_{i_2,j_2}}} \zeta_{\mathcal{A}}(\boldsymbol{k_1}, \boldsymbol{k_2}) = (0)_p$$

ここで $i,\, j \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ に対して $S_{i,j} := \{\boldsymbol{k} \in \mathbb{N}^{i+1} \mid |\boldsymbol{k}| = i + j + 1\}$ とする。

Theorem 1.7 を特殊化することで次の二つの系を得る。

***Corollary* 1.8** ([Kam], Corollary 2.3)**.** 二つの非負整数 $q_1 \geq 0,\ q_2 \geq 0$ に対して以下が成り立つ：

$$\sum_{\boldsymbol{k} \in S_{q_1+1,q_2}} w(\boldsymbol{k})\, \zeta_{\mathcal{A}}(\boldsymbol{k}) = (-1)^{r-1}\, \zeta_{\mathcal{A}}(\underbrace{1,\ldots,1}_{q_1}, q_2+1).$$

ここで $\boldsymbol{k} := (k_1, \ldots, k_n) \in \mathbb{N}^n$ に対して

$$w(\boldsymbol{k}) := \begin{cases} 0 & (k_1 > 1) \\ m & (k_1 = \cdots = k_m = 1,\ k_{m+1} > 1) \end{cases}$$

と定める。

***Corollary* 1.9** ([Kam], Corollary 2.5)**.** 非負整数 q_1 及び正の偶数 q_2 に対して

$$\sum_{\boldsymbol{k} \in S_{q_1+1,q_2}} 2^{w(\boldsymbol{k})}\, \zeta_{\mathcal{A}}(\boldsymbol{k}) = (0)_p$$

が成り立つ。

さて、有限多重ゼータ値を更に交代化した有限交代多重ゼータ値を紹介する。$\overline{\mathbb{N}} := \{\overline{n} \mid n \in \mathbb{N}\}$ と定め $\mathbb{D} := \mathbb{N} \cup \overline{\mathbb{N}}$ と定義する。$\mathbb{D}$ 上の符号 sgn を

$$\mathrm{sgn}(\alpha) := \begin{cases} 1 & \alpha \in \mathbb{N} \\ -1 & \alpha \in \overline{\mathbb{N}} \end{cases}$$

とする。ここで $\alpha \in \mathbb{N}$ に対して $\overline{\overline{\alpha}} := \alpha$ としたとき $\mathbb{D}$ 上の絶対値を

$$|\alpha| := \begin{cases} \alpha & (\alpha \in \mathbb{N}) \\ \overline{\alpha} & (\alpha \in \overline{\mathbb{N}}) \end{cases}$$

により定める。このとき $m \in \mathbb{Z},\ \alpha \in \mathbb{D}$ に対して $m^{\alpha} := m^{|\alpha|}$ と定義する。有限交代多重ゼータ値とは次で定義される。

***Definition* 1.10.** $\boldsymbol{\alpha} := (\alpha_1, \ldots, \alpha_r) \in \mathbb{D}^d$ とする。 有限交代多重ゼータ値とは

$$\zeta_{\mathcal{A}}(\boldsymbol{\alpha}) := \left(\sum_{p > m_r > \cdots > m_1 \geq 1} \frac{\mathrm{sgn}(\alpha_1)^{n_1} \cdots \mathrm{sgn}(\alpha_r)^{n_r}}{n_1^{\alpha_1} \cdots n_r^{\alpha_r}} \right)_p$$

によって定まる $\mathcal{A}$ の元である。

***Remark* 1.11.** $\boldsymbol{\alpha} := (\alpha_1, \ldots, \alpha_r) \in \mathbb{N}^r$ のとき有限多重ゼータ値になる。

今回の結果は Theorem 1.7 の結果の交代化にあたるのが次の定理である。

***Theorem* 1.12.** *$q_1,\ q_2,\ q_3 \in \mathbb{N}$ を取り, $\lambda_i,\ \xi_i,\ \mu_i\ (i = 1, 2)$ を独立変数とする。このとき $\mathcal{A}$ において次が成り立つ:*

$$\sum_{\substack{i_1+i_2=q_1 \\ j_1+j_2=q_2 \\ k_1+k_2=q_3}} (-1)^{i_2+j_2+k_2} \lambda_1^{i_1} \lambda_2^{i_2} \xi_1^{j_1} \xi_2^{j_2} \mu_1^{k_1} \mu_2^{k_2} \times \sum_{\substack{\boldsymbol{\alpha} \in S_{i_1,j_1,k_1} \\ \boldsymbol{\beta} \in S_{i_2,j_2,k_2}}} \mathrm{sgn}(\boldsymbol{\beta})\, \zeta_{\mathcal{A}}(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta})$$
$$+ \sum_{\substack{i_1+i_2=q_1 \\ j_1+j_2=q_2 \\ k_1+k_2=q_3}} (\lambda_1^{i_1} \xi_1^{j_1} \mu_1^{k_1} + \lambda_2^{i_1} \xi_2^{j_1} \mu_2^{k_1})(\lambda_1 + \lambda_2)^{i_2} (\xi_1 + \xi_2)^{j_2} (\mu_1 + \mu_2)^{k_2}$$
$$\times \sum_{\substack{\boldsymbol{\alpha} \in S_{i_1,j_1,k_1} \\ \boldsymbol{\beta} \in S_{i_2,j_2,k_2}}} \zeta_{\mathcal{A}}(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) = (0)_p.$$

ここで $i,\,j,\,k\in\mathbb{Z}_{\geq 0}$ に対して $S_{i,j,k}:=\{\boldsymbol{\alpha}\in\mathbb{D}^{i+j+1}\mid|\boldsymbol{\alpha}|=i+j+k+1\}$ とする。

Theorem 1.7 と同様に Theorem 1.12 を特殊化することで次の二つの系を得る。

***Corollary* 1.13.** $q_1,\,q_2,\,q_3\in\mathbb{N}$ を取る。このとき次を得る。

$$\begin{aligned}\sum_{\boldsymbol{\alpha}\in S_{q_1+1,q_2,q_3}} w_a(\boldsymbol{\alpha})\,\zeta_{\mathcal{A}}(\boldsymbol{\alpha}) =&(-1)^{q_3-1}\sum_{\mathbf{1}\in S_{q_1,q_2,0}}\zeta_{\mathcal{A}}(\mathbf{1},q_3+1)\\ &-\sum_{k_1+k_2=q_3}\sum_{\boldsymbol{\beta}\in S_{q_1,q_2,k_2}}\zeta_{\mathcal{A}}(k_1+1,\boldsymbol{\beta})+\zeta_{\mathcal{A}}(\overline{k_1+1},\boldsymbol{\beta})\end{aligned}$$

が成り立つ。ここで $\boldsymbol{\alpha}:=(\alpha_1,\dots,\alpha_n)\in\mathbb{D}^n$ に対して

$$w_a(\boldsymbol{\alpha}):=\begin{cases}0 & (|\alpha_1|\neq 1)\\ m & (|\alpha_1|=\cdots=|\alpha_m|=1,\ |\alpha_{m+1}|>1)\end{cases}$$

と定義する。

Proof. Theorem 1.12 に $(\lambda_1,\lambda_2,\xi_1,\xi_2,\mu_1,\mu_2)=(1,0,1,0,0,1)$ を代入すれば良い。 □

***Corollary* 1.14.** $q_1,\,q_2\in\mathbb{N}$, q_3 を正の偶数とする。このとき

$$\sum_{\boldsymbol{\alpha}\in S_{q_1+1,q_2,q_3}} J_a(\boldsymbol{\alpha})\,\zeta_{\mathcal{A}}(\boldsymbol{\alpha})=\sum_{\substack{i_1+i_2=q_1\\ j_1+j_2=q_2\\ k_1+k_2=q_3}}(-1)^{i_2+j_2-1}\sum_{\substack{\alpha\in S_{i_1,j_1,k_1}\\ \beta\in S_{i_2,j_2,k_2}}}\mathrm{sgn}(\boldsymbol{\beta})\,\zeta_{\mathcal{A}}(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})$$

が成り立つ。ここで $\boldsymbol{\alpha}:=(\alpha_1,\dots,\alpha_n)\in\mathbb{D}^n$ に対して

$$J_a(\alpha):=\begin{cases}1+2+\cdots+2^{w_a(\boldsymbol{\alpha})-1} & (w_a(\boldsymbol{\alpha})\geq 1)\\ 0 & (w_a(\boldsymbol{\alpha})=0)\end{cases}$$

と定義する。

Proof. Theorem 1.12 に $(\lambda_1,\lambda_2,\xi_1,\xi_2,\mu_1,\mu_2)=(1,1,1,1,-1,1)$ を代入すれば良い。 □

次節以降で Theorem 1.12 の証明とその準備を行う。

2 証明の準備

有限交代多重ゼータ値を考えるために交代多重ポリログを次で定義する。

***Definition* 2.1.** $\boldsymbol{\alpha}=(\alpha_1,\dots,\alpha_r)\in\mathbb{D}^r$ とする。このとき複素関数

$$\mathrm{Li}_{\boldsymbol{\alpha}}(z)=\mathrm{Li}(\boldsymbol{\alpha},z):=\mathrm{Li}(\boldsymbol{\alpha}):=\sum_{n_r>\cdots>n_1\geq 1}\frac{\mathrm{sgn}(\alpha_1)^{n_1}\cdots\mathrm{sgn}(\alpha_r)^{n_r}}{n_1^{\alpha_1}\cdots n_r^{\alpha_r}}z^{n_r}$$

を定める。これを**交代多重ポリログ**と言う。$\mathrm{Li}_{\boldsymbol{\alpha}}$ は $|z|<1$ なる複素領域で定義される 複素関数である。

***Remark* 2.2.** $\boldsymbol{\alpha}=(\alpha_1,\dots,\alpha_r)\in\mathbb{D}^r$ として $\iota_i:=\mathrm{sgn}(\alpha_i)$, $\eta_i:=\prod_{j=1}^{i}\iota_j$ とする。$0<z<1$ のとき交代多重ポリログは以下の反復積分表示を持つ:

$$\mathrm{Li}(\boldsymbol{\alpha};z)=\int_{0<t_1<\cdots<t_\alpha<z}\frac{dt_1}{\eta_d-t_1}\underbrace{\frac{dt_2}{t_2}\cdots\frac{dt_{\alpha_r}}{t_{\alpha_r}}}_{|\alpha_r|-1\text{ 個}}\frac{dt_{\alpha_r+1}}{1-t_{\alpha_r+1}}\cdots\frac{dt_{\alpha-\alpha_1+1}}{\eta_1-t_{\alpha-\alpha_1+1}}\underbrace{\frac{dt_{\alpha-\alpha_1+2}}{t_{\alpha-\alpha_1+2}}\cdots\frac{dt_\alpha}{t_\alpha}}_{|\alpha_1|-1\text{ 個}}$$

但し $\alpha:=\mathrm{wt}\,\boldsymbol{\alpha}$ とした。

ここで作用素 $\mathfrak{L}_{\mathfrak{p}} : \mathbb{Q}[[z]] \to \mathbb{Q}$ を

$$\mathfrak{L}_p\left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^n\right) = \sum_{k=0}^{p-1} a_k$$

と定める。任意の指数 $\boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{D}^d$ に対して $\mathrm{Li}(\boldsymbol{\alpha}; z)$ を $\mathbb{Q}[[z]]$ の元として見ると

$$(\mathfrak{L}_p(\mathrm{Li}(\boldsymbol{\alpha}; z)))_p = \zeta_{\mathcal{A}}(\boldsymbol{\alpha}) \in \mathcal{A}$$

となる。

***Definition* 2.3.** $t_1,\, t_2 \in (0,1)$ に対して

$$L_1(t_1,t_2) := \int_{t_1}^{t_2} \frac{dt}{1-t} = \log\frac{1-t_1}{1-t_2}$$
$$L_0(t_1,t_2) := \int_{t_1}^{t_2} \frac{dt}{t} = \log\frac{t_2}{t_1}$$
$$L_{-1}(t_1,t_2) := \int_{t_1}^{t_2} \frac{-dt}{1+t} = \log\left(\frac{1+t_1}{1+t_2}\right)$$

と定める。

証明には以下の補題を用いる

***Lemma* 2.4.** $s \in \mathbb{N},\, i_l,\, j_l,\, k_l \in \mathbb{N}\ (1 \le l \le s),\, 0 < z < 1$ を取る。このとき

$$\frac{1}{i_1! \cdots i_s! j_1 \cdots j_s! k_1! \cdots k_s!} \sum_{\substack{\eta_l \in \{\pm 1\} \\ 1 \le l \le s}} \int_{0<t_1<\cdots<t_s<z} L_1^{i_1}(t_1,t_2)\cdots L_1^{i_s}(t_s,z)$$
$$L_{-1}^{j_1}(t_1,t_2)\cdots L_{-1}^{j_s}(t_s,z) L_0^{k_1}(t_1,t_2)\cdots L_0^{k_s}(t_s,z) \frac{dt_1}{\eta_1 - t_1}\cdots\frac{dt_s}{\eta_s - t_s}$$
$$= \sum_{(\boldsymbol{\alpha}_1,\ldots,\boldsymbol{\alpha}_s)\in S} \mathrm{Li}(\boldsymbol{\alpha}_1,\ldots,\boldsymbol{\alpha}_s; z)$$

が成り立つ。ここで $S := \prod_{1 \le l \le s} S_{i_l, j_l, k_l}$ とする。

***Lemma* 2.5.** $s,\, t \in \mathbb{N}$ として指数 $\boldsymbol{\alpha} := (\alpha_1,\ldots,\alpha_s) \in \mathbb{D}^s,\ \boldsymbol{\beta} := (\beta_1,\ldots,\beta_t) \in \mathbb{D}^t$ を取る。このとき

$$(\mathfrak{L}_p(\mathrm{Li}(\boldsymbol{\alpha})\,\mathrm{Li}(\boldsymbol{\beta})))_p = \mathrm{sgn}(\boldsymbol{\beta})(-1)^{\mathrm{wt}\,\boldsymbol{\beta}}\,\zeta_{\mathcal{A}}(\alpha_1,\ldots,\alpha_s,\beta_t,\ldots,\beta_1)$$

が成り立つ。

3　主結果の証明

$0 < z < 1$ に対して

$$N(z) = \frac{1}{q_1!q_2!q_3!} \sum_{\eta_1,\eta_2 \in \{\pm 1\}} \int_{\substack{0<s<z \\ 0<t<z}} (\lambda_1 L_1(s,z) + \lambda_2 L_1(t,z))^{q_1} (\xi_1 L_{-1}(s,z) + \xi_2 L_{-1}(t,z))^{q_2}$$
$$(\mu_1 L_0(s,z) + \mu_2 L_0(t,z))^{q_3} \frac{ds}{\eta_1 - s}\frac{dt}{\eta_2 - t}$$

と定める。このとき二項展開より

$$\begin{aligned}
N(z) = &\sum_{\eta_1,\eta_2\in\{\pm1\}} \sum_{\substack{i_1+i_2=q_1\\ j_1+j_2=q_2\\ k_1+k_2=q_3}} \frac{1}{i_1!i_2!}\frac{1}{j_1!j_2!}\frac{1}{k_1!k_2!}\\
&\times \int_{0<s<z} \lambda_1^{i_1}\xi_1^{j_1}\mu_1^{k_1} L_1(s,z)^{i_1} L_{-1}(s,z)^{j_1} L_0(s,z)^{k_1}\frac{ds}{\eta_1-s}\\
&\times \int_{0<t<z} \lambda_2^{i_2}\xi_2^{j_2}\mu_2^{k_2} L_1(t,z)^{i_2} L_{-1}(t,z)^{j_2} L_0(t,z)^{k_2}\frac{dt}{\eta_2-t}\\
= &\sum_{\substack{i_1+i_2=q_1\\ j_1+j_2=q_2\\ k_1+k_2=q_3}} \lambda_1^{i_1}\lambda_2^{i_2}\xi_1^{j_1}\xi_2^{j_2}\mu_1^{k_1}\mu_2^{k_2}\\
&\times\left(\frac{1}{i_1!j_1!k_1!}\int_{0<s<z}\lambda_1^{i_1}\xi_1^{j_1}\mu_1^{k_1} L_1(s,z)^{i_1} L_{-1}(s,z)^{j_1} L_0(s,z)^{k_1}\left(\frac{ds}{1-s}+\frac{-ds}{1+s}\right)\right)\\
&\times\left(\frac{1}{i_2!j_2!k_2!}\int_{0<t<z}\lambda_2^{i_2}\xi_2^{j_2}\mu_2^{k_2} L_1(t,z)^{i_2} L_{-1}(t,z)^{j_2} L_0(t,z)^{k_2}\left(\frac{dt}{1-t}+\frac{-dt}{1+t}\right)\right).
\end{aligned}$$

Lemma 2.4 の $s=1$ の場合より

$$\begin{aligned}
&= \sum_{\substack{i_1+i_2=q_1\\ j_1+j_2=q_2\\ k_1+k_2=q_3}} \lambda_1^{i_1}\lambda_2^{i_2}\xi_1^{j_1}\xi_2^{j_2}\mu_1^{k_1}\mu_2^{k_2}\left(\sum_{\boldsymbol{\alpha}\in S_{i_1,j_1,k_1}}\mathrm{Li}(\boldsymbol{\alpha};z)\right)\left(\sum_{\boldsymbol{\beta}\in S_{i_2,j_2,k_2}}\mathrm{Li}(\boldsymbol{\beta};z)\right)\\
&= \sum_{\substack{i_1+i_2=q_1\\ j_1+j_2=q_2\\ k_1+k_2=q_3}} \lambda_1^{i_1}\lambda_2^{i_2}\xi_1^{j_1}\xi_2^{j_2}\mu_1^{k_1}\mu_2^{k_2}\sum_{\substack{\boldsymbol{\alpha}\in S_{i_1,j_1,k_1}\\ \boldsymbol{\beta}\in S_{i_2,j_2,k_2}}}\mathrm{Li}(\boldsymbol{\alpha};z)\,\mathrm{Li}(\boldsymbol{\beta};z)
\end{aligned}$$

上の式より $N(z)\in\mathbb{Q}[[z]][\lambda_1,\lambda_2,\xi_1,\xi_2,\mu_1,\mu_2]$ とみなせるので $\mathfrak{L}_p$ を任意の素数 p で作用させれば Lemma 2.5 より

$$\begin{aligned}
(\mathfrak{L}_p\,(N(z)))_p &= \sum_{\substack{i_1+i_2+i_3=q_1\\ j_1+j_2+j_3=q_2\\ k_1+k_2+k_3=q_3}} \lambda_1^{i_1}\lambda_2^{i_2}\xi_1^{j_1}\xi_2^{j_2}\mu_1^{k_1}\mu_2^{k_2}\sum_{\substack{\boldsymbol{\alpha}\in S_{i_1,j_1,k_1}\\ \boldsymbol{\beta}\in S_{i_2,j_2,k_2}}}(\mathfrak{L}_p\,(\mathrm{Li}(\boldsymbol{\alpha};z)\,\mathrm{Li}(\boldsymbol{\beta};z)))_p\\
&= \sum_{\substack{i_1+i_2+i_3=q_1\\ j_1+j_2+j_3=q_2\\ k_1+k_2+k_3=q_3}} (-1)^{i_2+j_2+k_2+1}\lambda_1^{i_1}\lambda_2^{i_2}\xi_1^{j_1}\xi_2^{j_2}\mu_1^{k_1}\mu_2^{k_2}\sum_{\substack{\boldsymbol{\alpha}\in S_{i_1,j_1,k_1}\\ \boldsymbol{\beta}\in S_{i_2,j_2,k_2}}}\mathrm{sgn}(\boldsymbol{\beta})\,\zeta_{\mathcal{A}}(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})
\end{aligned}$$

となる。他方 $N(z)$ 式内の積分範囲を T とすると T は合併 $\displaystyle\bigsqcup_{j=1}^{3}T_j$ で表される。ここで

$$\begin{aligned}
T_1 &:= \{(s,t)\in\mathbb{R}^2 \mid 0<s<t<z\}\\
T_2 &:= \{(s,t)\in\mathbb{R}^2 \mid 0<t<s<z\}\\
T_3 &:= \{(s,t)\in\mathbb{R}^2 \mid 0<s=t<z\}
\end{aligned}$$

である。いま $N_j(z)$ を $N(z)$ の式内の積分範囲を T_j に取り換えたものとする。$(1\le j\le 3)$ このとき T_3 は測度 0 より $N_3(z)=0$ が成り立つことに注意する。

便宜のためここでは $N_1(z)$ のみを計算する。

$$\lambda_1L_1(s,z)+\lambda_2L_1(t,z)=\lambda_1L_1(s,t)+(\lambda_1+\lambda_2)L_1(t,z)$$

が成り立つことに注意すると (L_1, L_{-1} も同様) 二項展開より

$$\begin{aligned}
N_1(z) =& \frac{1}{q_1!q_2!q_3!} \sum_{\eta_1,\eta_2\in\{\pm1\}} \int_{0<s<t<z} (\lambda_1 L_1(s,z) + \lambda_2 L_1(t,z))^{q_1} (\xi_1 L_{-1}(s,z) + \xi_2 L_{-1}(t,z))^{q_2} \\
& (\mu_1 L_0(s,z) + \mu_2 L_0(t,z))^{q_3} \frac{ds}{\eta_1 - s} \frac{dt}{\eta_2 - t} \\
=& \frac{1}{q_1!q_2!q_3!} \sum_{\eta_1,\eta_2\in\{\pm1\}} \int_{0<s<t<z} (\lambda_1 L_1(s,t) + (\lambda_1+\lambda_2) L_1(t,z))^{q_1} \\
& (\xi_1 L_{-1}(s,t) + (\xi_1+\xi_2) L_{-1}(t,z))^{q_2} (\mu_1 L_0(s,t) + (\mu_1+\mu_2) L_0(t,z))^{q_3} \frac{ds}{\eta_1 - s} \frac{dt}{\eta_2 - t} \\
=& \sum_{\eta_1,\eta_2\in\{\pm1\}} \sum_{\substack{i_1+i_2=q_1 \\ j_1+j_2=q_2 \\ k_1+k_2=q_3}} \frac{\lambda_1^{i_1}(\lambda_1+\lambda_2)^{i_2}\xi_1^{j_1}(\xi_1+\xi_2)^{j_2}\mu_1^{k_1}(\mu_1+\mu_2)^{k_2}}{i_1!i_2!j_1!j_2!k_1!k_2!} \\
& \int_{0<s<t<z} L_1(s,t)^{i_1} L_1(t,z)^{i_2} L_{-1}(s,t)^{j_1} L_{-1}(t,z)^{j_2} L_0(s,t)^{k_1} L_0(t,z)^{k_2} \frac{ds}{\eta_1 - s} \frac{dt}{\eta_2 - t}
\end{aligned}$$

Lemma 2.4 の $s=2$ の場合より

$$=\lambda_1^{i_1}(\lambda_1+\lambda_2)^{i_2}\xi_1^{j_1}(\xi_1+\xi_2)^{j_2}\mu_1^{k_1}(\mu_1+\mu_2)^{k_2} \sum_{\substack{\boldsymbol{\alpha}\in S_{i_1,j_1,k_1} \\ \boldsymbol{\beta}\in S_{i_2,j_2,k_2}}} \mathrm{Li}(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})$$

を得る。上の式より $N_1(z) \in \mathbb{Q}[[z]][\lambda_1,\lambda_2,\xi_1,\xi_2,\mu_1,\mu_2]$ とみなせるので $\mathfrak{L}_p$ を任意の素数 p で作用させると

$$(\mathfrak{L}_p\, N_1(z))_p = \sum_{\substack{i_1+i_2=q_1 \\ j_1+j_2=q_2 \\ k_1+k_2=q_3}} \lambda_1^{i_1}(\lambda_1+\lambda_2)^{i_2}\xi_1^{j_1}(\xi_1+\xi_2)^{j_2}\mu_1^{k_1}(\mu_1+\mu_2)^{k_2} \sum_{\substack{\boldsymbol{\alpha}\in S_{i_1,j_1,k_1} \\ \boldsymbol{\beta}\in S_{i_2,j_2,k_2}}} \zeta_{\mathcal{A}}(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}) \tag{1}$$

となる。同様に $(\mathfrak{L}_p\, N_2(z))_p$ は

$$(\mathfrak{L}_p\, N_2(z))_p = \sum_{\substack{i_1+i_2=q_1 \\ j_1+j_2=q_2 \\ k_1+k_2=q_3}} \lambda_2^{i_1}(\lambda_1+\lambda_2)^{i_2}\xi_2^{j_1}(\xi_1+\xi_2)^{j_2}\mu_2^{k_1}(\mu_1+\mu_2)^{k_2} \times \sum_{\substack{\boldsymbol{\alpha}\in S_{i_1,j_1,k_1} \\ \boldsymbol{\beta}\in S_{i_2,j_2,k_2}}} \zeta_{\mathcal{A}}(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}) \tag{2}$$

と計算できるため (1) と (2) より Theorem 1.12 の式の右辺を得る。

□

参考文献

[B1] D. J. Broadhurst, *On the enumeration of irreducible k-fold Euler sums and their roles in knot theory and field theory*, preprint, arXiv:hep-th/9604128.

[B2] D. J. Broadhurst, *Conjectured enumeration of irreducible multiple zeta values, from knots and Feynman diagrams*, preprint, arXiv:hep-th/9612012.

[EW] M. Eie, C.-H. Wei, *A short proof for the sum formula and its generalization*, Arch. Math. 91, 330–338 (2008)

[G] A. Granville, *A decomposition of Riemann' s zeta-function*, Analytic number theory, Kyoto, 1996, London Math. Soc. Lecture Note Ser., 247, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 95-101, (1997)

[Kad] S. Kadota, *Certain weighted sum formulas for multiple zeta values with some parameters*, Comment. Math. Univ. St. Pauli 66, 1–2, 1-13, (2017)

[Kam] K. Kamano, *Weighted sum formulas for finite multiple zeta values*, J. Number Theory 192, 168–180 (2018)

[Kan] 金子 昌信, 「有限多重ゼータ値」, RIMS Kokyuroku Bessatsu B68, 175–190 (2017)

[LM] T.-Q.-T. Le, J. Murakami, *Kontsevich's integral for the Homfly polynomial and relations between values of multiple zeta functions*, Topology Appl, 62, 2, 193-206, (1995)

[OEL] Y.L. Ong, M.Eie, W.-C. Liaw, *On generalizations of weighted sum formulas of multiple zeta values*, Int. J. Number Theory 9, no. 5, 1185-1198, (2013)

[SW] S. Saito, N. Wakabayashi, *Sum formula for finite multiple zeta values*, J. Math. Soc. Japan. 67, 3, 1069-107, (2015)

[T] T. Terasoma, *Mixed Tate motives and multiple zeta values*, Invent. Math. 149, 2, 339-369, (2002)