2 階 Fuchs 型微分方程式の
モノドロミー不変エルミート形式について

熊本大学大学院 自然科学教育部 理学専攻
安達駿弥 (Shunya ADACHI)

1 Introduction

このレポートでは, Gauss の超幾何微分方程式を例にしてモノドロミー表現および不変 Hermite 形式に関する一般的な事項を概説した後, 最近講演者によって得られた結果 [2] を紹介する.

1.1 Gauss の超幾何微分方程式とそのモノドロミー表現

Gauss の超幾何微分方程式とは次で与えられる 2 階の線形常微分方程式である.

$$x(1-x)y'' + \{\gamma - (\alpha+\beta+1)x\}y' - \alpha\beta y = 0, \tag{1}$$

ここで y は $x \in \mathbb{C}$ を独立変数とする未知関数, $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{C}$ は方程式に含まれるパラメータである. この方程式は Riemann 球面 $\mathbb{P}^1$ 上の 3 点 $\{0, 1, \infty\}$ に特異点を持つ. 微分方程式の解は特異点の近傍で特徴的な挙動を示すが, 方程式 (1) の特異点は全て確定特異点と呼ばれる非常に調べやすい特異点になっていて, 任意の解 $y(x)$ は $\{0, 1, \infty\}$ に分岐点を持つ多価関数となる. このように $\mathbb{P}^1$ 上の特異点が全て確定特異点となるような有理関数係数の線形微分方程式を **Fuchs 型微分方程式**と呼ぶ.

次に解の多価性を記述する量である**モノドロミー表現**について説明する. 方程式の正則点 $b \in \mathbb{P}^1 \setminus \{0, 1, \infty\}$ を一つとって固定する. 方程式 (1) は 2 階の線形微分方程式なので $x = b$ の近傍における解全体は 2 次元の線形空間をなす. その基底となる一次独立な解を $\{y_1(x), y_2(x)\}$ として, それらを並べたベクトル値関数

$$\mathcal{Y}(x) = (y_1(x), y_2(x))$$

を方程式 (1) の $x = b$ における**基本解系**と呼ぶ.

基本解系 $\mathcal{Y}(x)$ は $\{0, 1, \infty\}$ に分岐点を持つ. では各分岐点の周りで $\mathcal{Y}(x)$ がどのような多価性を示すかを調べてみよう. 関数 $\mathcal{Y}(x)$ の独立変数 x を b を基点として $x = 0$ の周りを一周するループ γ_0 に沿って解析接続して得られる関数を

$$\tilde{\mathcal{Y}}(x) = (\tilde{y}_1(x), \tilde{y}_2(x))$$

とする. すると $\tilde{y}_1(x)$ と $\tilde{y}_2(x)$ もまた (1) の解となり, 従って元々の基本解 $\{y_1(x), y_2(x)\}$ の線形結合で表すことができる. つまり

$$\tilde{\mathcal{Y}}(x) = \mathcal{Y}(x) M_0$$

となるような定数行列 $M_0 \in \mathrm{GL}(2,\mathbb{C})$ が存在する．この行列 M_0 を $x=0$ に関する**モノドロミー行列**と呼ぶ．同様のことを他の特異点を回るループについて考えることで M_1, M_∞ が得られる．ここで 2 つの特異点 $x=t_i$ と $x=t_j$ をこの順番で一緒に回るループは γ_i と γ_j を繋いだループに連続的に変形できる (図 1)．このループを $\gamma_i\gamma_j$ で書くことにすると, ループ $\gamma_i\gamma_j$ に対応するモノドロミー行列は M_jM_i となる, つまりループの順番とモノドロミーをかける順番は逆になることに注意する．このことを念頭に置くと, ループ $\gamma_0, \gamma_1, \gamma_\infty$ の間に成り立つ関係式

$$\gamma_0\gamma_1\gamma_\infty = 1 \tag{2}$$

に対応して, モノドロミー行列 M_0, M_1, M_∞ の間には

$$M_\infty M_1 M_0 = I \tag{3}$$

という関係が成り立つことがわかる．

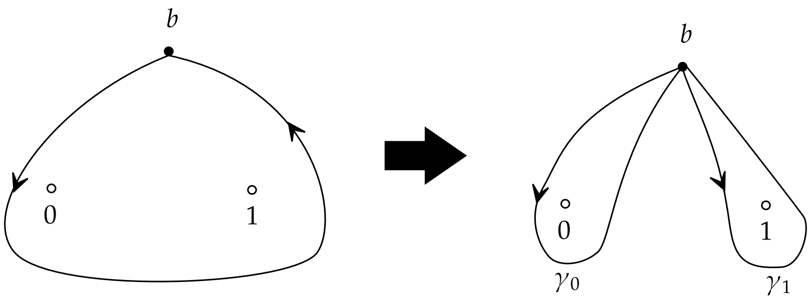

図 1　左のループは連続変形で右のループ $\gamma_0\gamma_1$ になる

以上の説明の下で, 用語を整理しておこう．b を基点とするループ全体を連続変形による同値関係で割って得られる群を $\mathbb{P}^1 \setminus \{0,1,\infty\}$ の**基本群**と呼び, $\pi_1(\mathbb{P}^1 \setminus \{0,1,\infty\}, b)$ で表す．上記のループ $\gamma_0, \gamma_1, \gamma_\infty$ で代表される同値類たちを改めて $\gamma_0, \gamma_1, \gamma_\infty$ と書くことにすると $\pi_1(\mathbb{P}^1 \setminus \{0,1,\infty\}, b)$ は

$$\pi_1(\mathbb{P}^1 \setminus \{0,1,\infty\}, b) = \langle \gamma_0, \gamma_1, \gamma_\infty \,|\, \gamma_0\gamma_1\gamma_\infty = 1 \rangle \tag{4}$$

という表示を持つ． このとき基本群 (4) の $\mathrm{GL}(2,\mathbb{C})$ への (反) 表現, すなわち準同型写像 $\rho : \pi_1(\mathbb{P}^1 \setminus \{0,1,\infty\}, b) \to \mathrm{GL}(2,\mathbb{C})$ であって

$$\rho(\gamma_i) = M_i \quad (i = 0, 1, \infty)$$

を満たすものを微分方程式 (1) の基本解系 $\mathcal{Y}(x)$ に関する**モノドロミー表現**と呼ぶ．準同型写像 ρ を定めるためには $\pi_1(\mathbb{P}^1 \setminus \{0,1,\infty\})$ の生成元の行き先のみを決めてやれば十分であることに注意しておく．また, 関係式 (3) から, M_0 と M_1 が決まれば M_∞ は一意的に決まる．このことからモノドロミー表現を $\rho = (M_0, M_1)$ と表すこともある．一般に微分方程式の解のモノドロミー表現は基本群の表現となる．またモノドロミー表現の像は M_0, M_1, M_∞ および関係式 (3) で生成される $\mathrm{GL}(2,\mathbb{C})$ の部分群 $G = \langle M_0, M_1 \rangle$ となる．この部分群を**モノドロミー群**と呼ぶ．

1.2 モノドロミー不変 Hermite 形式

前節と同様に $\{y_1(x), y_2(x)\}$ を方程式 (1) の $x = b$ の近傍における一次独立な解の組として, 基本解系 $\mathcal{Y}(x)$ に対するモノドロミー表現 $\rho : \pi_1(\mathbb{P}^1 \setminus \{0, 1, \infty\}, b) \to \mathrm{GL}(2, \mathbb{C})$ を考える. この表現は方程式 (1) のパラメータ α, β, γ に依存するが, α, β, γ が実数であるとき,

$$ {}^t\overline{\rho(\gamma)} H \rho(\gamma) = H \quad (\gamma \in \pi_1(\mathbb{P}^1 \setminus \{0, 1, \infty\}, b)) \tag{5} $$

を満たすような 2×2 サイズの Hermite 行列 H が存在することが知られている. $\{y_1(x), y_2(x)\}$ を基底とする方程式 (1) の解空間を V とするとき, この Hermite 行列によって V は Hermite 空間とみなすことができる[*1]. このことを説明しよう.

V に属する任意の解 $y(x) \in V$ は $y_1(x)$ と $y_2(x)$ による線形結合で表される. そこで, $u_1, u_2 \in \mathbb{C}$ を用いて $u_1 y_1(x) + u_2 y_2(x)$ と表される解を $y_u(x)$ とすると, $y_u(x)$ は基本解系 $\mathcal{Y}(x)$ と縦ベクトル $u = {}^t(u_1, u_2)$ を用いて

$$ y_u(x) = u_1 y_1(x) + u_2 y_2(x) = (y_1(x), y_2(x)) \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \mathcal{Y}(x) u $$

と表すことができる. つまり基本解系を介することで, 解 $y_u(x) \in V$ と縦ベクトル $u \in \mathbb{C}^2$ の同型対応 $V \cong \mathbb{C}^2$ が得られる. このとき (5) における H を用いて写像 $h : \mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}$ を

$$ \begin{array}{cccc} h: & \mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}^2 & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ & \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\ & (u, v) & \longmapsto & {}^t\bar{u} H v \end{array} $$

と定義することで, $V \cong \mathbb{C}^2$ 上の Hermite 形式 h が得られる.

このようにして得られた Hermite 形式 h はモノドロミーの作用に対して不変であることを示そう. ループ $\gamma \in \pi_1(\mathbb{P}^1 \setminus \{0, 1, \infty\}, b)$ に沿った $y_u(x)$ の解析接続を $\gamma_* y_u(x)$ と書くことにすると,

$$ \gamma_* y_u(x) = \mathcal{Y}(x) \rho(\gamma) u = y_{\rho(\gamma)u}(x) $$

が成り立つ. つまり γ に沿った解析接続は $u \in \mathbb{C}^2$ に対するモノドロミーの作用

$$ u \mapsto \rho(\gamma) u $$

を引き起こす. 一方 (5) より

$$ \begin{aligned} h(\rho(\gamma)u, \rho(\gamma)v) &= {}^t\overline{\rho(\gamma)u} H \rho(\gamma) v \\ &= {}^t\bar{u} \left({}^t\overline{\rho(\gamma)} H \rho(\gamma) \right) v \\ &= {}^t\bar{u} H v \\ &= h(u, v) \end{aligned} $$

が得られる. つまり h はモノドロミー ρ の作用によって不変であることがわかる.

[*1] 本来 V は $x = b$ における局所解のなす空間であるため V_b と書くべきであるが, ここからの議論は基点 b の選び方によらないため, 記法の簡略化のために V と書くことにする.

このようにして得られたモノドロミー不変 Hermite 形式は, 解の幾何的な性質の解析に有用である. 例えば Hermite 形式の定値性を用いたモノドロミーの有限性の判定や Hermite 行列 H と基本解系 $\mathcal{Y}(x)$ を用いた保型関数の構成などが挙げられる. これらのストーリーを解説している文献として大久保 [7], 吉田 [8] を挙げておく.

Remark 1. モノドロミー表現 ρ および Hermite 形式 h は基本解系 $\mathcal{Y}(x)$ に依存している. しかし基本解系を取り替えても, 取り替えた基本解系に対応するモノドロミー表現もまた不変 Hermite 形式を持つことが確かめられる. つまりここまでの議論は基本解系の取り方に依らない. 従って不変 Hermite 形式の存在性は, 1 つ 1 つの解に対してではなく全ての解, ひいては方程式に対して考えられるべき問題である (後で詳しく説明する).

1.3 モノドロミー不変 Hermite 形式と解の積分表示

超幾何微分方程式 (1) は次のような解の (Euler 型) 積分表示を持つことが知られている.

$$y(x) = \int_p^q t^{\beta-\gamma}(t-1)^{\gamma-\alpha-1}(t-x)^{-\beta}\,dt \tag{6}$$

ここで $p, q \in \{0, 1, x, \infty\}$ である. この積分表示は $\mathbb{P}^1 \setminus \{0, 1, \infty\}$ で定義される大域的な解であり, 前節で説明したモノドロミー不変 Hermite 形式に深く結びついている. この事実を明らかにしたのが喜多-吉田 [6] である. 彼らは, 不変 Hermite 形式は積分 (6) に付随する twisted cycle (被積分関数の多価性を加味した積分路) の交点行列として意味付けられることを明らかにした. この理論については吉田 [8] に詳しい解説がなされている. ただし [6, 8] では基本解系を横ベクトルではなく縦ベクトルで考えているため, 交点行列そのものではなく, その逆行列が不変 Hermite 形式に対応している.

解の積分表示から不変 Hermite 形式が得られるというストーリーは超幾何微分方程式に限らず, 一般の微分方程式に対しても成り立つ. Fuchs 型方程式のうち, rigid と呼ばれる特別なクラスに属する方程式については解の積分表示が存在することが証明されており (cf. 原岡 [3]), 従って rigid な方程式には不変 Hermite 形式が存在することがわかる. ちなみに超幾何微分方程式 (1) は rigid な方程式の典型例である. 一方で rigid ではない方程式に対しては, 解の積分表示を持つような特殊な方程式を除いて不変 Hermite 形式の存在は知られていなかった. しかし最近, 解の積分表示の存在を仮定することなく, 不変 Hermite 形式を持つような non-rigid な Fuchs 型方程式のクラスが存在することが証明された [1, 2]. このクラスに属する方程式が全て解の積分表示を持つか？という問題は未解決であるが, 我々の結果は Fuchs 型方程式全体のなす空間に “不変 Hermite 形式を持つ” という rigid を包含するクラスによる一つの構造が入ることを意味しており, Fuchs 型方程式の研究に新しい視点をもたらすものと考えられる. 次節では [2] の結果の概要を紹介する.

2　4 つの特異点を持つ 2 階 Fuchs 型方程式のモノドロミー不変 Hermite 形式

前節で扱っていた超幾何微分方程式 (1) は 3 つの特異点を持つ 2 階の方程式である．論文 [2] では特異点の個数を増やした 4 つの特異点を持つ 2 階の Fuchs 型方程式 (系) を考えている．このタイプの方程式は一般に non-rigid な方程式であり, 解の積分表示の存在性は一般には知られていない.

2.1　問題設定

Riemann 球面 $\mathbb{P}^1$ 上の 4 点 $\{t_1, t_2, t_3, t_4 = \infty\}$ に特異点を持つような 2 階 Fuchs 型方程式, もしくは階数 2 の Fuchs 型方程式系を考える．方程式の正則点 $b \in \mathbb{P}^1 \setminus \{t_1, t_2, t_3, t_4\}$ と $x = b$ における基本解系 $\mathcal{Y}(x)$ を固定すると, この方程式 (系) の解のモノドロミー表現は基本群

$$\pi_1(\mathbb{P}^1 \setminus \{t_1, t_2, t_3, t_4\}, b) = \langle \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4 \,|\, \gamma_1\gamma_2\gamma_3\gamma_4 = 1 \rangle$$

の表現となる．前節では $\mathrm{GL}(2, \mathbb{C})$ への表現を考えたが, 任意の Fuchs 型微分方程式においては未知関数のゲージ変換を考えることでモノドロミー行列の行列式を 1 にすることができるので, ここからはモノドロミー表現として $\mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$ への表現

$$\rho : \pi_1(\mathbb{P}^1 \setminus \{t_1, t_2, t_3, t_4\}, b) \to \mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$$

を考える．このような表現 ρ に対して

$$\rho(\gamma_i) = M_i \quad (i = 1, 2, 3, 4)$$

とおくと, 関係式 $\gamma_1\gamma_2\gamma_3\gamma_4 = 1$ に対応して $M_4M_3M_2M_1 = I$ が成り立つ．従って ρ を行列の 3 つ組 $(M_1, M_2, M_3) \in \mathrm{SL}(2, \mathbb{C})^3$ と同一視して $\rho = (M_1, M_2, M_3)$ と書く.

以上の設定の下で, 我々の目標は次のように述べられる.

問題 1. 不変 Hermite 形式, すなわち

$$ {}^t\overline{\rho(\gamma)} H \rho(\gamma) = H \quad (\gamma \in \pi_1(\mathbb{P}^1 \setminus \{t_1, t_2, t_3, t_4\}, b)) \tag{7}$$

を持つような Hermite 行列 H を持つような ρ が存在することを示し, さらに特徴付けよ.

ここで, 問題 1 におけるモノドロミー表現 ρ および Hermite 行列 H は基本解系 $\mathcal{Y}(x)$ の選び方に依っていることに注意しよう．しかし Remark 1 で述べたように, 不変 Hermite 形式の存在性自体は基本解系の選び方によらない．実際 2 つの基本解系 $\mathcal{Y}(x), \tilde{\mathcal{Y}}(x)$ の間にはある $P \in \mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$ が存在して

$$\tilde{\mathcal{Y}}(x) = \mathcal{Y}(x)P$$

が成り立つが, このとき $\tilde{\mathcal{Y}}(x)$ に対するモノドロミー表現 $\tilde{\rho}$ は

$$\tilde{\rho}(\gamma) = (\mathrm{Ad}(P)(\rho))\,(\gamma) := P\rho(\gamma)P^{-1}$$

となる．ここでもし ρ が (7) を満たしているならば, Hermite 行列 $\tilde{H} = {}^t\overline{P^{-1}}HP^{-1}$ に対して

$$ {}^t\overline{\tilde{\rho}(\gamma)}\tilde{H}\tilde{\rho}(\gamma) = \tilde{H} $$

が成り立つ．これは $\tilde{\rho}$ が $\tilde{H} = {}^t\overline{P^{-1}}HP^{-1}$ による不変 Hermite 形式を持つことを示している．

このことから, 不変 Hermite 形式の存在を考える上では基本解系に依存するモノドロミー表現に対する存在性を考えるのではなく, 基本解系に依らない**モノドロミー表現の同値類**に対する存在性を考えるのが自然である．この認識のもとで, 2 つのモノドロミー表現 ρ, ρ' に対する同値関係を

$$ \rho \sim \rho' \quad \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \quad \rho' = \mathrm{Ad}(P)(\rho) \quad (\exists P \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{C})) $$

と定義し, ρ に対する同値類を $[\rho]$ と書くことにする．この同値関係 “ $\sim$ ” は “同じ微分方程式の解のモノドロミー表現である”という関係に対応している．従って同値類 $[\rho]$ は Fuchs 型微分方程式に対応しているということになり, 微分方程式の**モノドロミー**と呼ばれる．また $\rho = (M_1, M_2, M_3)$ と行列の組で表したときは, 同値関係は

$$ (M_1, M_2, M_3) \sim (PM_1P^{-1}, PM_2P^{-1}, PM_3P^{-1}) \quad (\exists P \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{C})) $$

となる．ここで次の定義を与える．

定義 1. モノドロミー表現 $\rho = (M_1, M_2, M_3) \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{C})^3$ またはモノドロミー $[\rho] = [(M_1, M_2, M_3)]$ が**既約**であるとは, M_1, M_2, M_3 に共通した不変部分空間が自明なもの $(\mathbb{C}^2, \{0\})$ に限ることである．既約でないとき**可約**と呼ぶ.

モノドロミー (表現) が可約であるような Fuchs 型方程式は, より階数の低い方程式に帰着させて解くことができる．そこで今回は既約なモノドロミーに焦点を絞って考えることにする．以上の準備の下で, 問題 1 を次のように書き直す.

問題 2. 不変 Hermite 形式を持つような既約なモノドロミー $[\rho]$ の存在を示し, さらに特徴付けよ.

上述の対応関係より, 問題 2 は不変 Hermite 形式を持つ既約な Fuchs 型微分方程式 (系) の存在およびその特徴付けを問う問題とも思えることに注意しておく.

2.2 モノドロミー表現の moduli 空間と 3 次曲面

まずはモノドロミー $[\rho]$ が属する空間を定式化しよう．特異点 $x = t_i$ におけるモノドロミー行列 M_i の $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ における共役類を $x = t_i$ における**局所モノドロミー**と呼び, $\mathcal{C}_i$ で表す．各特異点における局所モノドロミーを集めたデータを $\mathcal{C} = (\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \mathcal{C}_3, \mathcal{C}_4)$ とおく．このとき moduli 空間

$$ \mathcal{M}_{\mathcal{C}} = \{(M_1, M_2, M_3) \in \mathcal{C}_1 \times \mathcal{C}_2 \times \mathcal{C}_3\,;\,(M_3M_2M_1)^{-1} \in \mathcal{C}_4\}/\sim \tag{8} $$

は, 各特異点における局所挙動を $\mathcal{C}$ で指定したモノドロミーを集めた集合となる．空間 (8) の元と Fuchs 型方程式との対応関係は比較的わかりやすいが, 一般にこの空間 (8) は代数多様体にならず, あまり良い空間とは言えない．そこで, より素性の良いモノドロミー表現の moduli 空間を考えることにする.

パラメータ $a=(a_1,a_2,a_3,a_4)\in\mathbb{C}^4$ を

$$a_i=\operatorname{tr}\mathcal{C}_i$$

で定める．以下簡単のため

$$a_i\neq\pm 2 \tag{9}$$

を仮定する．いま $M_i\in\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ で考えていることから，仮定 (9) は，“各特異点における**モノドロミー行列が異なる固有値を持つ**”ということを意味していることに注意しよう．従って $x=t_i$ における局所モノドロミーは

$$\mathcal{C}_i=\{M\in\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})\,;\,\operatorname{tr}M=a_i\}=:\mathcal{O}(a_i)$$

で与えられる．このときモノドロミーの moduli 空間 $\mathcal{M}(a)$ を次で定義する．

$$\mathcal{M}(a)=\{(M_1,M_2,M_3)\in\mathcal{O}(a_1)\times\mathcal{O}(a_2)\times\mathcal{O}(a_3)\,;\,(M_3M_2M_1)^{-1}\in\mathcal{O}(a_4)\}/\!/\,\mathrm{SL}(2,\mathbb{C}). \tag{10}$$

ここで $/\!/$ は $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ の相似変換による作用に関する幾何学的不変式論的商 (GIT quotient).

定義 2. 元 $[(M_1,M_2,M_3)]\in\mathcal{M}(a)$ が**既約**であるとは，$[(M_1,M_2,M_3)]$ に含まれるモノドロミー表現が全て既約であることと定義する．

moduli 空間 (10) は先ほど定義した (8) と比べて微分方程式との対応は見づらいように思われるが，$[(M_1,M_2,M_3)]\in\mathcal{M}(a)$ が既約ならば，それは $\mathcal{M}_{\mathcal{C}}$ における同値類 $[(M_1,M_2,M_3)]$ と集合として等しいため，既約な元を考えている限りは (8) と (10) における同値類は同じものだと考えて良い．

moduli 空間 $\mathcal{M}(a)$ は 2 次元の代数多様体になるだけではなく，3 次曲面として幾何的に実現できるという大きな利点がある．このことを説明しよう．モノドロミー表現 $\rho=(M_1,M_2,M_3)$ に対して

$$x_1=\operatorname{tr}(M_2M_3),\quad x_2=\operatorname{tr}(M_3M_1),\quad x_3=\operatorname{tr}(M_1M_2) \tag{11}$$

とすると $x=(x_1,x_2,x_3)\in\mathbb{C}^3$ は $a\in\mathbb{C}^4$ をパラメータとする 3 次多項式

$$f_a(x)=x_1x_2x_3+x_1^2+x_2^2+x_3^2-\theta_1(a)x_1-\theta_2(a)x_2-\theta_3(a)x_3+\theta_4(a).$$

を満たす (Jimbo [4])．ここで (i,j,k) を $(1,2,3)$ の巡回置換として

$$\begin{aligned}\theta_i(a)&=a_ja_k+a_ia_4\quad(i=1,2,3),\\ \theta_4(a)&=a_1a_2a_3a_4+a_1^2+a_2^2+a_3^2+a_4^2-4.\end{aligned}$$

対応 (11) は $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ の相似変換で不変であるため，モノドロミー $[(M_1,M_2,M_3)]\in\mathcal{M}(a)$ に対しても値 $x=(x_1,x_2,x_3)\in\mathbb{C}^3$ を対応させることができる．つまり，対応 (11) はモジュライ空間 $\mathcal{M}(a)$ から 3 次曲面

$$\mathcal{S}(a)=\{x\in\mathbb{C}^3\,;\,f_a(x)=0\}$$

への写像 $\mathcal{M}(a)\to\mathcal{S}(a)$ を与えていることになる．この写像はそのままでは全単射にはならないが，Iwasaki [5] は big open と呼ばれる Zariski 開集合 $\mathcal{S}^\circ(a)\subset\mathcal{S}(a)$ と $\mathcal{M}^\circ(a)\subset\mathcal{M}(a)$ を導入し，その間の同型写像 $\varphi:\mathcal{S}^\circ(a)\xrightarrow{\simeq}\mathcal{M}^\circ(a)$ を構成した ([5], Theorem 3.6)．さらに $\mathcal{S}^\circ(a)=\mathcal{S}(a)$ となるような $a\in\mathbb{C}^4$ の値を以下によって特徴付けた．

命題 1 (Iwasaki [5], Theorem 4.1)**.** パラメータ $a = (a_1, a_2, a_3, a_4) \in \mathbb{C}^4$ に対して

$$v(a) = \prod_{\varepsilon \in \{\pm 1\}^3} f_a(2\varepsilon),$$

$$w(a) = \prod_{\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3=1} (\varepsilon_1 a_1 + \varepsilon_2 a_2 + \varepsilon_3 a_3 + a_4) - \prod_{i=1}^{3} (a_i a_4 - a_j a_k)$$

とする．ここで $v(a)$ については $\varepsilon = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ であり, $w(a)$ の右辺の総積記号では $\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3 = 1$ を満たすような $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3) \in \{\pm 1\}^3$ についての積をとることとする．すると

$$v(a)w(a) \neq 0 \tag{12}$$

が成り立つとき, またそのときに限り $\mathcal{S}^\circ(a) = \mathcal{S}(a)$ が成り立つ.

パラメータ $a \in \mathbb{C}^4$ が条件 (12) を満たすとき **generic** と呼ぶことにする．また, 次が成り立つ.

命題 2 ([2])**.** パラメータ $a \in \mathbb{C}^4$ に対して

- $\mathcal{M}^\circ(a)$ の任意の元は既約である.
- a が generic ならば $\mathcal{M}^\circ(a) = \mathcal{M}(a)$ が成り立つ.

以上の事実をまとめると, generic な $a \in \mathbb{C}^4$ に対して $\mathcal{S}(a) \cong \mathcal{M}(a)$ であり, 全ての $\mathcal{M}(a)$ の元が既約であることがわかる.

2.3 主結果

論文 [2] では問題 2 の解答として, まず $\mathcal{M}^\circ(a)$ の元に対して, その作用で不変な非退化 Hermite 形式が存在するための必要十分条件を $\mathcal{S}^\circ(a)$ の言葉で特徴付けた.

定理 1 ([2])**.** $a \in \mathbb{R}^4$ とし, 同型写像 $\varphi : \mathcal{S}^\circ(a) \xrightarrow{\simeq} \mathcal{M}^\circ(a)$ をとる．このとき $x \in \mathcal{S}^\circ(a) \cap \mathbb{R}^3$ ならば, またそのときに限り $\varphi(x) = [(M_1, M_2, M_3)] \in \mathcal{M}^\circ(a)$ はその作用で不変な非退化 Hermite 形式を持つ.

$a \in \mathbb{R}^4$ が generic であれば, この結果によって不変 Hermite 形式を持つような全ての $\mathcal{M}(a)$ における全てのモノドロミーが特徴付けられたことになる．論文 [2] ではより一般な状況として仮定 (9) および (12) を除いた場合も扱っており, 次の結果を得ている.

定理 2 ([2])**.** $a \in \mathbb{R}^4$ とする．このとき任意の既約な $[(M_1, M_2, M_3)] \in \mathcal{M}(a)$ に対して, その作用で不変な非退化 Hermite 形式を持つための必要十分条件は, 対応 (11) で定まる $x = (x_1, x_2, x_3)$ が $x \in \mathcal{S}(a) \cap \mathbb{R}^3$ を満たすことである.

以上の結果から, 4 つの特異点を持つ 2 階 Fuchs 型方程式, もしくは階数 2 の Fuchs 型方程式系のなす空間の中に不変 Hermite 形式を持つ方程式 (系) のなす部分空間が存在することがわかる.

Remark 2. 上記の定理 1, 2 の証明は全て構成的である．すなわち不変 Hermite 形式を与える Hermite 行列の具体形も証明の中で与えられている.

参考文献

[1] Y. Haraoka and S. Adachi, Monodromy invariant Hermitian forms for non-rigid Fuchsian differential equations of order three, submitted (2021).

[2] S. Adachi, Monodromy invariant Hermitian forms for second order Fuchsian differential equations with four singularities, preprint (2021).

[3] 原岡喜重, 複素領域における線形微分方程式, 数学書房叢書, 数学書房, 2015.

[4] M. Jimbo, Monodromy problem and the boundary condition for some Painlevé equations, Publ. Res. Inst. Math. Sci., **18** (1982), 1137-1161.

[5] K. Iwasaki, An area-preserving action of the modular group on cubic surfaces and the Painlevé VI equation, Commun. Math. Phys., **242** (2003), 185-219.

[6] M. Kita and M. Yoshida, Intersection theory for twisted cycles, Math. Nachr., **166** (1994), 287-304.

[7] 大久保謙二郎, モノドロミ群, 月刊マセマティクス, **1** (1980), 489-495.

[8] 吉田正章, 私説 超幾何関数 –対称領域における点配置空間の一意化–, 共立講座 21 世紀の数学 24, 共立出版, 1997.