非線形動的境界条件付きの楕円型偏微分方程式に対する Phragmén-Lindelöf の定理

北海道大学大学院 理学院 数学専攻 博士後期課程 1 年
安孫子啓介 (Keisuke ABIKO)

1 導入

1.1 目的

本稿の目的は、楕円型方程式の境界値問題の粘性劣解に対する Phragmén-Lindelöf の定理を証明することである。Phragmén-Lindelöf の定理とは、非有界領域上の偏微分方程式の解に対して増大度条件を課した場合の最大値原理の一種である。

楕円型方程式

$$F(x, t, Du, D^2u) = 0 \text{ in } \Omega \times (0, T) \quad (1.1)$$

を考える。ただし、 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ はその境界が滑らかな領域、 $T > 0$ は定数とし、 $u : \bar{\Omega} \times (0, T) \rightarrow \mathbb{R}$ を未知関数、 $Du = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n} \right)$ 、 $D^2u = \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} \right)_{i,j}$ とする。また、 $F \in C(\bar{\Omega} \times (0, T) \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{S}^n)$ の細かい条件は後述するが、一様楕円型とは限らないものとする。 $\mathbb{S}^n$ は n 次実対称行列全体の集合とする。

境界条件は次のものを考える。

$$\partial_t u + B(x, Du) = 0 \text{ on } \partial\Omega \times (0, T) \quad (1.2)$$

なお、 $\partial_t u = \frac{\partial u}{\partial t}$ 、 $B \in C^1(\partial\Omega \times \mathbb{R}^n)$ とし、こちらも細かい条件は後述する。(1.2) のように、空間変数に関する項に時間微分項を付け加えた境界条件を動的境界条件と呼ぶ。動的境界条件は化学工学や流体力学等の分野で様々な拡散現象を記述する際に現れることが知られている。

F 、 B にはそれぞれ以下の条件を仮定する。

■ F への仮定 本稿では以下の (F1)-(F3) を常に仮定する。

(F1) $(x, t, p) \in \bar{\Omega} \times (0, T) \times \mathbb{R}^n$ と $N \leq M$ である $M, N \in \mathbb{S}^n$ に対して

$$F(x, t, p, M) \leq F(x, t, p, N).$$

(F2) $\Lambda > 0$ と $b \in C(\bar{\Omega})$ は非負値関数、 $\nu : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^n$ は連続で $\nu \neq 0$ 、かつ $\partial\Omega$ 上では $\partial\Omega$ の外向き単位法線ベクトル場と一致するベクトル場が存在して、以下を満たす: 任意の $(x, t, p, M) \in \bar{\Omega} \times (0, T) \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{S}^n$ に対して (1.3) が成り立つ。

$$-\Lambda \operatorname{Tr}(\nu \otimes \nu)M - b(x)|(I - \nu \otimes \nu)p| \leq F(x, t, p, M). \quad (1.3)$$

(F3) $(x, t) \in \overline{\Omega} \times (0, T)$ に対して, $F(x, t, 0, O) = 0$.

(F1) は退化楕円性と呼ばれる条件である. なお, $N, M \in \mathbb{S}^n$ に対し $N \leq M$ (resp., $N < M$) とは, 任意の $\xi \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ に対して $\langle (N - M)\xi, \xi \rangle \leq 0$ (resp., $\langle (N - M)\xi, \xi \rangle < 0$) であることとする. $\langle \cdot, \cdot \rangle$ は $\mathbb{R}^n$ 上の標準内積とし, $|\cdot|$ は内積によって定まるノルムとする. また, $I \in \mathbb{S}^n$ は単位行列とする.

■ B への仮定

(B1) 任意の $x \in \overline{\Omega}$, $\lambda \geq 0$, $p \in \mathbb{R}^n$ に対して, $B(x, \lambda p) = \lambda B(x, p)$.

(B2) ある $\theta > 0$ が存在して, 任意の $x \in \partial\Omega$ と $p \in \mathbb{R}^n$ に対して $\langle \nu(x), D_p B(x, p) \rangle \geq \theta$.

この仮定は [4] に倣ったものである. 通常の境界条件 $B(x, Du) = 0$ は非線形な Neumann 境界条件であり, 例えば Neumann 条件 ($B(x, p) = \langle \nu, p \rangle$), Capillary 境界条件 ($B(x, p) = \langle \nu, p \rangle - a(x)|p|$), $a(x) \in [0, 1]$ が典型的である.

以上を踏まえ, 次の定理 1 が主結果である.

定理 1 (Phragmén-Lindelöf). (1.1), (1.2) の粘性劣解 $u \in C(\Omega \times (0, T))$ が次の条件を満たすとする.

1. 任意の $R > 0$ に対して, $\limsup_{t \rightarrow +0} \sup_{|x| \leq R, x \in \Omega} u(x, t) \leq 0$.

2. (1.4) を満たす正值関数 $g \in C^2(\overline{\Omega} \times (0, T))$ が存在して, $\liminf_{R \rightarrow \infty} \sup_{\partial B_R \times (0, T)} \frac{u^+}{g} \leq 0$. ここで, $B_R := \{x \in \Omega \mid |x| < R\}$ とし,

$$\begin{cases} -\Lambda \operatorname{Tr}(\nu \otimes \nu) D^2 g - b(x) |(I - \nu \otimes \nu) Dg| \geq 0 & \text{in } \Omega \times (0, T), \\ \partial_t g + B(x, Dg) \geq 0 & \text{on } \partial\Omega \times (0, T). \end{cases} \quad (1.4)$$

このとき, $\sup_{\Omega \times (0, T)} u \leq 0$.

この証明は次のような手順で行われる. まず, $v(x, t) = \frac{u^+(x, t)}{g(x, t)}$ と変換する. 1, 2 と最大値原理を使うと, $v(x_*, t_*)$ が極大値となるような $(x_*, t_*) \in \partial\Omega \times (0, T)$ が存在することがわかる. $v(x_*, t_*) > 0$ であると仮定すると, (x_*, t_*) で $v - \varphi$ が極大値をとりながら, 方程式と境界条件をともに満たさないような関数 φ を構成することができ, 矛盾が導かれる.

1.2 Phragmén-Lindelöf の定理

楕円型偏微分方程式の解が満たす性質として最大値原理は基本的なものであるが, 非有界領域上でも解に何らかの形で増大度の条件を課すことで最大値原理と同じような評価が得られる場合がある. そのような命題を Phragmén-Lindelöf の定理と呼ぶ. 典型的には次のような命題である.

命題 1. $u \in C^2(\mathbb{R}_+^n) \cap C(\overline{\mathbb{R}_+^n})$ が次を満たすとする.

$$\begin{cases} -\Delta u \leq 0 & \text{in } \mathbb{R}_+^n, \\ u \leq 0 & \text{on } \partial\mathbb{R}_+^n. \end{cases}$$

ただし, $\mathbb{R}_+^n := \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_n > 0\}$ とする. このとき, $\limsup_{R \rightarrow \infty} R^{-1} \sup_{\partial B_R \cap \mathbb{R}_+^n} u \leq 0$ ならば $\sup_{\mathbb{R}_+^n} u \leq 0$ である.

一般には, 増大度の条件がなければこのような評価は得られない. 例えば $u(x) = -x_1^2 + x_2^2$ は $\mathbb{R}_+^2$ 上で $\Delta u = 0$ かつ $\partial \mathbb{R}_+^2$ 上 $u \leq 0$ だが, $\sup_{\partial B_R \cap \mathbb{R}_+^2} u = R^2$ なので増大度条件を満たしておらず, 明らかに $\overline{\mathbb{R}_+^2}$ 上 $u \leq 0$ ではない.

Phragmén-Lindelöf の定理に関する古典的な結果は数多いが, まずは [8] を参照することをお勧めする. 動的境界条件付きの楕円型方程式に対しては [5, 6] で扱われている. [5] は動的境界条件を伴った Poisson 方程式に対する最小解について議論したもので, Dirichlet 問題との関連性を論じるにあたって Phragmén-Lindelöf の定理は重要な役割を果たしている.

主結果である定理 1 は, 次の [6, Theorem 5] を進展させたものである.

命題 2 ([6, Theorem 5]). $u \in C(\overline{\mathbb{R}_+^n} \times (0, T))$ を次の粘性劣解とする.

$$\begin{cases} F(x, t, Du, D^2u) = 0 & \text{in } \mathbb{R}_+^n \times (0, T), \\ \partial_t u + \langle \nu, Du \rangle = 0 & \text{on } \partial \mathbb{R}_+^n \times (0, T). \end{cases}$$

ただし, $F \in C(\overline{\mathbb{R}_+^n} \times (0, T) \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{S}^n)$ は (F1) と次の (1.5) を満たすとする.

$$\mathcal{P}_{\lambda, \Lambda}^-(M) - b(x)|p'| \leq F(x, t, p, M) \quad \forall (x, t, p, M) \in \mathbb{R}_+^n \times (0, T) \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{S}^n. \quad (1.5)$$

ここで, $\mathcal{P}_{\lambda, \Lambda}^-(M) := \min\{-\text{Tr}(AM) \mid -\Lambda I \leq A \leq -\lambda I\}$ は $0 < \lambda \leq \Lambda$ に対して定まる Pucci 作用素, $p' = (p_1, \dots, p_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1}$ としている.

u が次を満たすと仮定する.

$$\begin{aligned} \limsup_{t \rightarrow +0} \sup_{|x'| \leq R} u(x', 0, t) &\leq 0 \quad \forall R > 0, \\ \liminf_{R \rightarrow \infty} \sup_{|x|=R, t \in (0, T)} \frac{u(x, t)}{1 + x_n} &\leq 0. \end{aligned}$$

このとき, $\overline{\mathbb{R}_+^n} \times (0, T)$ 上で $u \leq 0$ である.

命題 2 は定理 1 において $\Omega = \mathbb{R}_+^n$, $B(x, p) = -p_n$, $g(x, t) = 1 + x_n$ とし, (F2) に代えて (1.5) とした場合の主張である.

2 準備

2.1 粘性解

まずは弱解の概念として粘性解を用意する. 粘性解とは, 1980 年代はじめに Crandall, Lions らによって導入された弱解の概念で, 一階もしくは二階楕円型, 放物型方程式に対して有効であることが特徴である.

定義 1 (粘性解).

1. $u \in C(\Omega \times (0, T))$ が (1.1) の粘性劣解 (resp., 粘性優解) であるとは, $\varphi \in C^2(\bar{\Omega} \times (0, T))$ について, $u - \varphi$ が点 $(x_*, t_*) \in \Omega \times (0, T)$ で極大値 (resp., 極小値) を取るとき, 次の不等式が成り立つことをいう.

$$F(x_*, t_*, D\varphi(x_*, t_*), D^2\varphi(x_*, t_*)) \leq 0.$$

$$(\text{resp.}, F(x_*, t_*, D\varphi(x_*, t_*), D^2\varphi(x_*, t_*)) \geq 0)$$

2. $u \in C(\Omega \times (0, T))$ が (1.1), (1.2) の粘性劣解 (resp., 粘性優解) であるとは, $\varphi \in C^2(\bar{\Omega} \times (0, T))$ について, $u - \varphi$ が点 $(x_*, t_*) \in \bar{\Omega} \times (0, T)$ で極大値 (resp., 極小値) を取るとき, 1 に加えて, $(x_*, t_*) \in \partial\Omega \times (0, T)$ であれば, 次の不等式が成り立つことをいう.

$$\min\{\partial_t\varphi(x_*, t_*) + B(x_*, D\varphi(x_*, t_*)), F(x_*, t_*, D\varphi(x_*, t_*), D^2\varphi(x_*, t_*))\} \leq 0.$$

$$(\text{resp.}, \max\{\partial_t\varphi(x_*, t_*) + B(x_*, D\varphi(x_*, t_*)), F(x_*, t_*, D\varphi(x_*, t_*), D^2\varphi(x_*, t_*))\} \geq 0)$$

u が粘性劣解かつ粘性優解であるとき, u を粘性解と呼ぶ. また, 通常の意味で微分可能である場合は古典劣解などと呼ぶ.

定義に現れる φ のことを試験関数と呼ぶ. 直感的には φ が u に点 (x_*, t_*) で上から”タッチ”しているとき, u の微分を φ の微分に置き換えて解釈しているということである.

注意 1. (F3) のとき, u が (1.1) の粘性劣解であれば, $u^+ := \max\{u, 0\}$ も (1.1) の粘性劣解である.

本稿では割愛するが, 粘性解理論の基本的な事柄は [3, 7] 等が参考になる.

2.2 方向楕円性と最大値原理

本研究において, 一様楕円性より弱い楕円性を考えているのは重要なポイントである. そこで, ”弱い”楕円性と最大値原理について紹介する.

楕円性とは, F の $\mathbb{S}^n$ 成分に関する単調性の仮定である. (F1) の退化楕円性は, 粘性解を考えるにあたって最低限の仮定といえる. 一階の方程式はすべて退化楕円性を満たすことを注意しておく.

定義 2 (楕円性).

1. $0 < \Lambda$ と $\nu \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ が存在して, $(x, t, p, M) \in \Omega \times (0, T) \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{S}^n$ と $\tau \geq 0$ に対して (2.1) が成り立つことを方向楕円型という.

$$F(x, t, p, M + \tau\nu \otimes \nu) - F(x, t, p, M) \leq -\Lambda\tau \quad (2.1)$$

2. $0 < \lambda \leq \Lambda$ が存在して, $(x, t, p) \in \Omega \times (0, T) \times \mathbb{R}^n$ と $M, N \in \mathbb{S}^n$ に対して (2.2) が成り立つことを一様楕円型という.

$$-\Lambda \text{Tr}(M - N) \leq F(x, t, p, M) - F(x, t, p, N) \leq -\lambda \text{Tr}(M - N). \quad (2.2)$$

例えば $-\text{Tr} M$ や Pucci 作用素は一様楕円型である. Partial Trace 作用素 $P_k(M) := m_{11} + m_{22} + \dots + m_{kk}$ は $k < n$ であれば一様楕円型ではないが, $e_1, e_2, \dots, e_k$ について方向楕円型である ($\{e_i\}$

は $\mathbb{R}^n$ の標準基底とする). F が一様楕円型であれば方向楕円型であることが簡単な計算でわかる. 弱い楕円性を持つ方程式に関しては [2, 10] 等を参照せよ.

(F2) の十分条件に関する命題を紹介しておく. 証明は割愛する.

命題 3. F が以下の条件を満たすとき, F は (F2) を満たす.

- $0 < \lambda \leq \Lambda$ が存在して, $(x, t, p) \in \bar{\Omega} \times (0, T) \times \mathbb{R}^n$, $M, N \in \mathbb{S}^n$ に対して
$$-\Lambda \operatorname{Tr}(\nu \otimes \nu)(M - N) \leq F(x, t, p, M) - F(x, t, p, N) \leq -\lambda \operatorname{Tr}(\nu \otimes \nu)(M - N). \quad (2.3)$$

- $(x, t, M) \in \bar{\Omega} \times (0, T) \times \mathbb{S}^n$, $p, q \in \mathbb{R}^n$ に対して

$$|F(x, t, p, M) - F(x, t, q, M)| \leq b(x)|(I - \nu \otimes \nu)(p - q)|.$$

なお, (2.3) は前述の方向楕円性より多少強い仮定になっていることを注意しておく.

次に, 最大値原理と Hopf の補題を紹介する. 以下 $U \subset \Omega$ を有界領域とする.

命題 4 (弱最大値原理). $u \in C(\bar{U} \times [0, T])$ を (1.1) の粘性劣解とする. このとき,

$$\max_{\bar{U} \times [0, T]} u = \max_{\partial U \times [0, T]} u.$$

命題 5 (Hopf の補題). $u \in C(\bar{U} \times (0, T))$ を (1.1) の粘性劣解とする. ∂U が十分滑らかで, $(x_*, t) \in \partial U \times (0, T)$ で $u(x_*, t) = M$ かつ $U \times (0, T)$ 上 $u < M$ のとき, ある定数 $A > 0$ が存在して, $\langle \nu(x_*), \xi \rangle < 0$ である任意の $\xi \in \mathbb{R}^n$ について

$$\limsup_{h \rightarrow 0} \frac{u(x_* + h\xi, t) - u(x_*, t)}{h} \leq A \langle \nu(x_*), \xi \rangle.$$

詳しい証明は [1, 9, 10] などを参照せよ.

3 定理 1 の証明の概略

証明の概略. $v := \frac{u^+}{g}$ は次の (3.1) の粘性劣解であることが直接的な計算によりわかる.

$$\begin{cases} -\Lambda g \operatorname{Tr}(\nu \otimes \nu) D^2 v - 2\Lambda |Dg| |Dv| - b(x)g |(I - \nu \otimes \nu) Dv| = 0 & \text{in } \Omega \times (0, T), \\ g \partial_t v + v \partial_t g + B(x, g Dv + v Dg) = 0 & \text{on } \partial \Omega \times (0, T). \end{cases} \quad (3.1)$$

増大条件から, 次を満たすような増加列 $\{R_k\}$ が存在する.

$$\lim_{k \rightarrow \infty} R_k = \infty, \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \sup_{x \in \partial B_{R_k}, t \in (0, T)} v \leq 0.$$

よって, 任意の $\varepsilon > 0$ に対して十分大きな k について

$$\sup_{x \in \partial B_{R_k}, t \in (0, T)} v \leq \varepsilon \quad (3.2)$$

である.

ある k で $L_k := \sup_{B_{R_k} \times (0, T)} v > \varepsilon$ であると仮定する.

$L_k = v(x_*, t_*)$ で $(x_*, t_*) \in \overline{B_{R_k}} \times [0, T]$ を定める. 最大値原理により $x_* \in \partial B_{R_k}$ だが, (3.2) より $|x_*| \neq R$. また, 初期条件を鑑みれば $t_* \neq 0$. よって $(x_*, t_*) \in (B_{R_k} \cap \partial\Omega) \times (0, T)$ である.

さて, $\varphi(x, t)$ を次のように定める.

$$\varphi(x, t) := p|(I - \nu_* \otimes \nu_*)(x - x_*)|^2 - q\langle -\nu_*, x - x_* \rangle^2 - r\langle -\nu_*, x - x_* \rangle + |t - t_*|^2 + L_k. \quad (3.3)$$

ただし, p, q, r は適切な正定数とし, $\nu_* = \nu(x_*)$ としている. このとき, $v - \varphi$ は (x_*, t_*) で極大値をとる (極大値を取るように係数を選ぶことができる). しかし, φ の微分を計算して (3.1) に代入すれば, 方程式, 境界条件ともになり立たないことがわかり, 矛盾する.

よって, 全ての k について $L_k = \max_{B_{R_k} \times (0, T)} v \leq \varepsilon$ となり, $k \rightarrow \infty, \varepsilon \rightarrow 0$ とすれば結論を得る. $\square$

4 試験関数の構成

(3.3) で定めた試験関数 φ の係数を決定する方針を説明する. 以下 t は固定して考える.

$B = \{x \in \Omega \mid |x - c| < R\}$ を x_* における内部球とする. $\alpha > 0$ に対して, 次の補助関数を考える.

$$h(x) := -e^{-\alpha|x-c|^2} + e^{-\alpha R^2}.$$

$N = \{x \in \Omega \mid |x - x_*| < l\}$ とする. まずは $N \setminus B$ 上では $\varphi > L_k$ となるように係数をきめる. これは $\{\varphi(x, t) = L_k\}$ という等高面が x_* の近傍で B に含まれるようにすれば可能である.

十分大きい $\alpha > 0$ とこれに依存して十分小さい $\varepsilon > 0$ について, $\overline{N} \cap \overline{B}$ で $v - \varepsilon h - L_k \leq 0$ とできる. これは Hopf の補題や強最大値原理の証明と同じ手法である (参考: [1]). $h(x_*) + L_k = v(x_*, t_*)$ だから, $v - \varphi$ の代わりに $\varepsilon h + L_k - \varphi$ を評価していくことで, 滑らかな関数の極値問題に帰着する.

参考文献

- [1] L. Caffarelli, Y. Li, and L. Nirenberg. Some remarks on singular solutions of nonlinear elliptic equations III: viscosity solutions including parabolic operators. *Comm. Pure Appl. Math.*, 66(1):109–143, 2013.
- [2] I. Capuzzo Dolcetta and A. Vitolo. Directional ellipticity on special domains: weak maximum and Phragmén-Lindelöf principles. *Nonlinear Anal.*, 184:69–82, 2019.
- [3] M. G. Crandall, H. Ishii, and P.-L. Lions. User's guide to viscosity solutions of second order partial differential equations. *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)*, 27(1):1–67, 1992.
- [4] P. Dupuis and H. Ishii. On oblique derivative problems for fully nonlinear second-order elliptic PDEs on domains with corners. *Hokkaido Math. J.*, 20(1):135–164, 1991.
- [5] M. Fila, K. Ishige, and T. Kawakami. Minimal solutions of a semilinear elliptic equation with a dynamical boundary condition. *J. Math. Pures Appl. (9)*, 105(6):788–809, 2016.
- [6] K. Ishige and K. Nakagawa. The Phragmén-Lindelöf theorem for a fully nonlinear elliptic problem with a dynamical boundary condition. In *Geometric properties for parabolic and*

- elliptic PDE's*, volume 176 of *Springer Proc. Math. Stat.*, pages 159–171. Springer, [Cham], 2016.
- [7] S. Koike. *A beginner's guide to the theory of viscosity solutions*, volume 13 of *MSJ Memoirs*. Mathematical Society of Japan, Tokyo, 2004.
- [8] M. H. Protter and H. F. Weinberger. *Maximum principles in differential equations*. Springer-Verlag, New York ; Tokyo, 1984.
- [9] P. Pucci and J. Serrin. *The maximum principle*. Number v. 73 in Progress in nonlinear differential equations and their applications. Birkhäuser, Basel ; Boston, 2007.
- [10] A. Vitolo. Maximum principles for viscosity solutions of weakly elliptic equations. In *Bruno Pini Mathematical Analysis Seminar*, pages 110–136, 2019.