Tame algebras have dense g-vector fans

東北大学大学院 理学研究科 数学専攻
百合草寿哉 (Toshiya YURIKUSA)*

概要

有限次元多元環 A 上の 2 項準傾複体は g ベクトル錐と呼ばれる不変量を持つ。A に関する全ての g ベクトル錐とそれらの面は扇を成し、g ベクトル扇と呼ばれる。本稿では多元環 A が Tame 表現型の時、g ベクトル扇の幾何学的実現が稠密になることを説明する。証明の鍵は三角圏におけるシリンダーと呼ばれる写像と、その漸近的振る舞いである。本稿は Pierre-Guy Plamondon 氏との共同研究 [PY20] に基づく。

1 導入

有限次元多元環 A の表現論とは、A 加群、特に A 加群の圏 mod$A$ を調べる分野である。多元環の表現論において、傾理論 (Tilting theory) は重要な研究対象/手法の 1 つであり、様々な性質が見出され、幅広い研究に用いられてきた。近年、傾理論の拡張として τ 傾理論が導入 [AIR14] され、新たな発展を遂げている。τ 傾理論において、2 項準傾複体と呼ばれる射影 A 加群の複体が存在し、τ 傾加群、ねじれ対、ワイド部分圏や半安定部分圏など様々な重要な対象と対応する。本稿では、2 項準傾複体から得られる g ベクトル扇と呼ばれるユークリッド空間上の錐の集合を調べる。2 項準傾複体の直和因子である 2 項前準傾複体は g ベクトルと呼ばれる不変量を持つ。2 項準傾複体の全ての直既約直和因子の g ベクトルによって張られる錐を g ベクトル錐と呼ぶ。全ての 2 項準傾複体の g ベクトル錐とそれらの面の集合は扇を成すことが知られており、この扇を A の g ベクトル扇と呼ぶ。

g ベクトル扇は 2 項準傾複体だけでなく、多くの情報を含んだ対象である。例えば、King [Kin94] による mod$A$ の安定性は自然に部屋構造を与えるが、g ベクトル扇はその安定性部屋構造の部分構造を与える。また、特定の場合に generalized associahedra の正規扇となったり、団代数理論 (Cluster algebra theory) [FZ02, FZ07] との関わりも深く、Cambrian 扇、tropical cluster $\mathcal{X}$-variety や団散乱図形 (Cluster scattering diagram) の部分構造も与える。特に団散乱図形は、[GHKK18] において団代数理論の重要な未解決問題 (正値性予想、符号同一性予想など) の解決に用いられるなど、近年の団代数理論における主流な研究対象の一つである。

上記のように、g ベクトル扇は様々な対象の部分構造として現れ、特定の場合に一致することが知られている。実際、g ベクトル扇 (の幾何学的実現) がユークリッド空間全体を覆うことと、多元環 A の 2 項準傾複体が有限個しかないことが同値である。この多元環は τ 傾有限型と呼ばれ、とても良い性質を持つ [DIJ19]。特に、τ 傾有限型の多元環の g ベクトル扇は安定性部屋構造や団散乱図形

* 本研究は JSPS 科研費 20J00410 の助成を受けたものである。

(の台集合) と一致する。この観点から、g ベクトル扇がユークリッド空間において稠密になる多元環を考えることは自然であり、本稿の主結果は次の定理である。

Theorem 1.1. *Tame* 多元環の g ベクトル扇はユークリッド空間において稠密である。

2 g ベクトル扇

代数的閉体 k 上の有限次元多元環 A に対し、有限生成射影加群の有界複体のホモトピー圏を $K^b(\operatorname{proj} A)$ と書く。

Definition 2.1. 複体 $P \in K^b(\operatorname{proj} A)$ は、任意の正の整数 i に対し $\operatorname{Hom}_{K^b(\operatorname{proj} A)}(P, \Sigma^i P) = 0$ を満たす時、**前準傾複体**と呼ばれ、さらに P が三角圏として $K^b(\operatorname{proj} A)$ を生成する時、**準傾複体**と呼ばれる。ここで Σ は、三角圏 $K^b(\operatorname{proj} A)$ のシフトを表す。

本稿では、2 項複体 (次数 -1、0 以外の項が 0 である複体) を対象とする部分圏 $K^{[-1,0]}(\operatorname{proj} A)$ を主に扱う。特に (前) 準傾複体 $P \in K^{[-1,0]}(\operatorname{proj} A)$ は 2 項 (前) 準傾複体と呼ばれ、τ 傾加群、関手的有限なねじれ対や左有限なワイド部分圏/半安定部分圏などとの一対一対応が存在する [AIR14, MS, Yur18]。

三角圏 $K^b(\operatorname{proj} A)$ のグロタンディーク群 $K_0(\operatorname{proj} A)$ は、全ての直既約射影 A 加群 $P_1, \ldots, P_n$ の像を基底に持つ自由アーベル群である。対象 X の像を $[X]$ と書くと、$K_0(\operatorname{proj} A)$ は基底 $[P_1], \ldots, [P_n]$ により $\mathbb{Z}^n$ と同一視することができる。したがって今後、$K_0(\operatorname{proj} A)$ の元をユークリッド空間 $\mathbb{R}^n (\simeq K_0(\operatorname{proj} A) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R})$ 上の格子点とみなす。

Definition 2.2. $P \in K^{[-1,0]}(\operatorname{proj} A)$ の g **ベクトル**とは、ベクトル $[P] \in \mathbb{Z}^n$ のことである。

g ベクトルは 2 項 (前) 準傾複体の良い不変量を与え、次のような扇を形成する。

Theorem 2.3 ([AIR14])**.** 以下を満たす単体的多面扇 *(simplicial polyhedral fan)* が存在する：

- 任意の 1 次元の錐は、直既約 2 項前準傾複体の g ベクトルで生成される。
- 任意の極大な錐は、2 項準傾複体の直既約直和因子の g ベクトルで張られる。

多元環 A に関する Theorem 2.3 の扇 $\mathcal{F}(A)$ を、A の g **ベクトル扇**と呼ぶ。g ベクトル扇 $\mathcal{F}(A)$ はユークリッド空間 $\mathbb{R}^n$ 上の錐の集合であるが、それらの幾何学的実現の和集合 ($\mathbb{R}^n$ の部分空間) にも同様に g ベクトル扇 $\mathcal{F}(A)$ という用語と記号を用いる。

Example 2.4. 自然数 $m \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ に対し、2 点の間に m 本の矢を持つ箙

$$K_m := [\ 1 \overset{m}{\underset{\vdots}{\rightrightarrows}} 2\ ]$$

を考える。特に K_1 は A_2 型箙、K_2 はクロネッカー箙である。箙 K_m の道多元環 kK_m の g ベクトル扇はよく知られており、図 1 のように与えられる。ここで m が 2 以上の時、$\mathcal{F}(kK_m)$ は 1 次元の錐を無限に含み、傾き $(-m \pm \sqrt{m^2-4})/2$ の半直線 $r_{\pm}$ に収束する。特に m が 2 の時、2 つの半直線 r_+ と r_- は一致する。

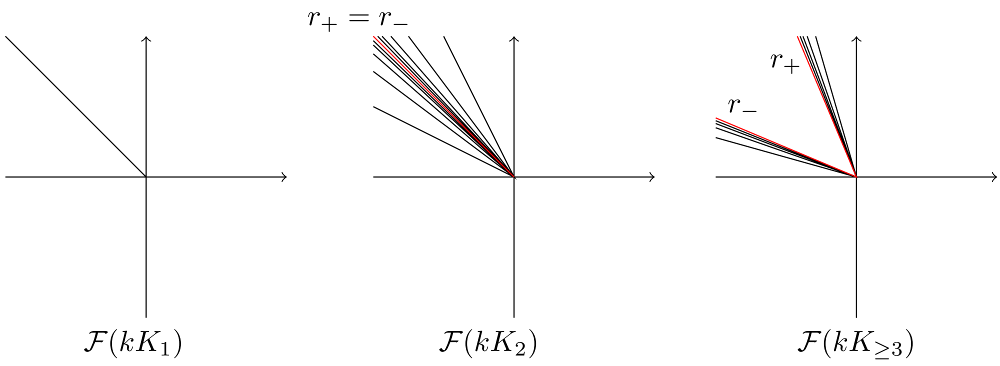

図 1　g ベクトル扇 $\mathcal{F}(kK_m)$

図 1 から明らかなように、$\mathcal{F}(kK_1)$(の幾何学的実現) はユークリッド空間 $\mathbb{R}^2$ と一致し、$\mathcal{F}(kK_2)$ は $\mathbb{R}^2$ において稠密である。一般の有限次元多元環 A に関しても、$\mathcal{F}(A)$ がユークリッド空間と一致する場合の特徴付けが与えられる。

Theorem 2.5 ([Asa19, DIJ19])**.** 多元環 A の g ベクトル扇がユークリッド空間 $\mathbb{R}^n$ と一致することと、A の 2 項準傾複体が有限個であることは同値である。

これより、次の定義を考えることは自然である。

Definition 2.6. g ベクトル扇 $\mathcal{F}(A)$ がユークリッド空間 $\mathbb{R}^n$ において稠密になる時、A は *g-tame* であるという。

Example 2.7. Example 2.4 によって、道多元環 kK_m が g-tame になることと、$m \leq 2$ であることは同値である。

Remark 2.8.
1. g-tame 多元環の g ベクトル扇は安定性散乱図形 (stability scattering diagram)[Bri17] において稠密であると考えることができる。
2. 次の多元環は g-tame となることが知られている。
   (a) 拡大ディンキン型箙の道多元環 [Hil06]
   (b) 点付き曲面の三角形分割から定義されるヤコビ多元環 [Yur20]
   (c) 拡大ディンキン型箙の完備前射影多元環 (complete preprojective algebra)[KM20]
   (d) 完備特殊双列多元環 (complete special biserial algebra)[AY20]
3. 上記多元環の内、下 2 つは有限次元とは限らない。実際、(有限次元とは限らない) 多元環が特定の条件を満たす時、有限次元多元環の場合と同様に準傾理論を考えることが可能である [Kim20]。よって、g ベクトル扇が構成され、g-tame 性が定義される。

3　主結果

本稿で扱う多元環は次の古典的なクラスである。

Definition 3.1. 任意のベクトル $\mathbf{d} \in \mathbb{Z}^n$ に対し、以下を満たす $k[t]$-A 両側加群 $M_1, \ldots, M_{m(\mathbf{d})}$ が

存在する時、有限次元多元環 A は *tame* であるという：

1. 全ての $i \in \{1, \ldots, m(\mathbf{d})\}$ に対し、M_i は有限階自由 $k[t]$ 加群である。
2. 次元ベクトル $\mathbf{d}$ を持つ直既約 A 加群は、有限個を除いて次のように書ける：

$$k[t]/(t-\lambda) \otimes_{k[t]} M_i \quad (i \in \{1, \ldots, m(\mathbf{d})\}, \lambda \in k)$$

各 M_i に対し、$k[t]/(t-\lambda) \otimes_{k[t]} M_i$ を**直既約加群の 1 パラメーター族**と呼ぶ。

主結果を述べる準備が整った。

Theorem 3.2. *Tame* 多元環は *g-tame* である。

Theorem 3.2 より、g-tame 多元環は Tame 多元環より大きいクラスであるが、[Yur20] の結果から真に大きいこともわかる。即ち、Theorem 3.2 の逆の主張は成り立たない。g-tame 多元環に対し、Theorem 2.5 のような特徴付けを与えることは今後の課題である。

4 Theorem 3.2 の証明の概略

この章では Theorem 3.2 の証明の概略を述べる。Tame 多元環に関する次の性質は、証明の鍵の 1 つである。

Theorem 4.1 ([DF15, GLFS20, Pla13])**.** *A を Tame 多元環とする。任意のベクトル $\mathbf{g} \in \mathbb{Z}^n$ に対し、次のような分解が存在する：*

$$\mathbf{g} = \mathbf{g}_0 + \mathbf{h}_1 + \ldots + \mathbf{h}_s \quad (s \geq 0)$$

1. $\mathbf{g}_0$ を g ベクトルに持つ前準傾複体 $G \in K^{[-1,0]}(\operatorname{proj} A)$ が存在する。
2. 各 $i \in \{1, \ldots, s\}$ に対し、以下を満たす複体 $H_i \in K^{[-1,0]}(\operatorname{proj} A)$ が存在する：
  (*a*) $\mathbf{h}_i$ を g ベクトルに持つ。
  (*b*) $k[t]/(t-\lambda) \otimes_{k[t]} H^0(H_i)$ は直既約加群の 1 パラメーター族である。
  (*c*) $\operatorname{End}_{\operatorname{mod} A}(H^0(H_i))$ は 1 次元である。
  (*d*) $H^0(h_i)$ は *Auslander-Reiten* 移動により同型を除いて不変である。

もう 1 つの証明の鍵は、三角圏 $K^b(\operatorname{proj} A)$ における特殊な写像である。

Definition 4.2. $X, U \in K^b(\operatorname{proj} A)$ に対し、空間 $\operatorname{Hom}_{K^b(\operatorname{proj} A)}(U, X)$ の基底 $f_1, \ldots, f_d$ を用いることで、三角

$$X^d[-1] \to \operatorname{Cyl}_X U \to U \xrightarrow{\begin{bmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_d \end{bmatrix}} X^d$$

を得る。この時、対象 $\operatorname{Cyl}_X U \in K^b(\operatorname{proj} A)$ を **X に関する U のシリンダー**と呼ぶ。

$\operatorname{Cyl}_X U$ は $\operatorname{Hom}_{K^b(\operatorname{proj} A)}(U, X)$ の基底の取り方に依らず、同型を除いて定義される。また、Cyl_X は関手ではなく、一般に良い振る舞いをするとは限らない。しかし、特定の条件下では良い性質を持

ち、特に Theorem 4.1 の条件と、Bongartz co-completion はそれらを満たしている。ここで 2 項前準傾複体 G の Bongartz co-completion G' は、A の左 $\mathrm{add}G$ 近似 f による三角

$$A \xrightarrow{f} G'' \to G' \to \Sigma A$$

により定義される。特に、$G \oplus G'$ は 2 項準傾複体となる。

Proposition 4.3. *Theorem 4.1* の仮定の下、任意の $a_1, \ldots, a_s \in \mathbb{Z}_{>0}$ に対し、$\mathrm{Cyl}^{a_s}_{\Sigma H_s} \cdots \mathrm{Cyl}^{a_1}_{\Sigma H_1} G'$ は 2 項前準傾複体となり、g ベクトル

$$[\mathrm{Cyl}^{a_s}_{\Sigma H_s} \cdots \mathrm{Cyl}^{a_1}_{\Sigma H_1} G'] = [G'] + \sum_{i=1}^{s} a_i d_i [H_i] \in \mathbb{Z}^n$$

を持つ。ここで d_i は $\mathrm{Hom}_{K^b(\mathrm{proj}\, A)}(G', \Sigma H_i)$ の次元であり、特に 0 ではない。さらに、$G \oplus \mathrm{Cyl}^{a_s}_{\Sigma H_s} \cdots \mathrm{Cyl}^{a_1}_{\Sigma H_1} G'$ は 2 項準傾複体となる。

Theorem 3.2 を証明する準備が整った。A を Tame 多元環とする。g ベクトル扇 $\mathcal{F}(A)$ は錐の集合なので、$\overline{\mathcal{F}(A)}$ が任意の $\mathbf{g} \in \mathbb{Z}^n$ を含むことを示せば、$\mathcal{F}(A)$ は $\mathbb{R}^n$ において稠密、即ち Theorem 3.2 が証明される。$\mathbf{g} \in \mathbb{Z}^n$ に対し、Theorem 4.1 の分解

$$\mathbf{g} = \mathbf{g}_0 + \mathbf{h}_1 + \ldots + \mathbf{h}_s \quad (s \geq 0)$$

を考える。$s = 0$ の時は明らか ($\mathbf{g} = \mathbf{g}_0 = [G] \in \mathcal{F}(A)$) なので、以下 $s > 0$ を仮定する。$\mathrm{Hom}_{K^b(\mathrm{proj}\, A)}(G', \Sigma H_i)$ の次元 $d_i \neq 0$ に対し、$d := \prod_{i=1}^{s} d_i$、$e_i := \frac{d}{d_i}$ とする。Proposition 4.3 より、

$$G^{\oplus d} \oplus \mathrm{Cyl}^{e_s}_{\Sigma H_s} \cdots \mathrm{Cyl}^{e_1}_{\Sigma H_1} G'$$

は 2 項準傾複体となり、g ベクトル

$$\begin{aligned}
[G^{\oplus d} \oplus \mathrm{Cyl}^{e_s}_{\Sigma H_s} \cdots \mathrm{Cyl}^{e_1}_{\Sigma H_1} G'] &= d[G] + [G'] + \sum_{i=1}^{s} e_i d_i [H_i] \\
&= d([G] + \sum_{i=1}^{s} [H_i]) + [G'] \\
&= d\mathbf{g} + [G']
\end{aligned}$$

を持つ。同様に、任意の $m \in \mathbb{Z}_{>0}$ に対し

$$G^{\oplus dm} \oplus \mathrm{Cyl}^{me_s}_{\Sigma H_s} \cdots \mathrm{Cyl}^{me_1}_{\Sigma H_1} G'$$

は 2 項準傾複体となり、g ベクトル $md\mathbf{g} + [G']$ を持つ。

ベクトル $md\mathbf{g} + [G']$ によって生成される半直線は、m を限りなく大きくすることで、$\mathbf{g}$ によって生成される半直線に限りなく近く。一方、$md\mathbf{g} + [G']$ は 2 項準傾複体の g ベクトルなので、$\mathcal{F}(A)$ に含まれる。よって、$\mathbf{g}$ は $\overline{\mathcal{F}(A)}$ に含まれ、Theorem 3.2 が証明される。

参考文献

[AIR14] Takahide Adachi, Osamu Iyama, and Idun Reiten. τ-tilting theory. *Compos. Math.*, 150(3):415–452, 2014.

[Asa19] Sota Asai. The wall-chamber structures of the real Grothendieck groups. arXiv:1905.02180, 2019.

[AY20] Toshitaka Aoki and Toshiya Yurikusa. Complete gentle algebras are $\mathbf{g}$-tame. arXiv:2003.09797 [math.RT], 2020.

[Bri17] Tom Bridgeland. Scattering diagrams, Hall algebras and stability conditions. *Algebraic Geometry*, 4(5):523–561, 2017.

[DIJ19] Laurent Demonet, Osamu Iyama, and Gustavo Jasso. τ-tilting finite algebras, bricks, and g-vectors. *Int. Math. Res. Not. IMRN*, (3):852–892, 2019.

[DF15] Harm Derksen and Jiarui Fei. General presentations of algebras. *Adv. Math.*, 278:210–237, 2015.

[FZ02] Sergey Fomin and Andrei Zelevinsky. Cluster algebras I: Foundations. *J. Amer. Math. Soc.*, 15(2):497–529, 2002.

[FZ07] Sergey Fomin and Andrei Zelevinsky. Cluster algebras IV: coefficients. *Compositio Mathematica*, 143(1):112–164, 2007.

[GHKK18] Mark Gross, Paul Hacking, Sean Keel, and Maxim Kontsevich. Canonical bases for cluster algebras. *J. Amer. Math. Soc.*, 31(2):497–608, 2018.

[GLFS20] Christof Geiss, Daniel Labardini-Fragoso, and Jan Schröer. Schemes of modules over gentle algebras and laminations of surfaces. arXiv:2005.01073 [math.RT], 2020.

[Hil06] L. Hille. On the volume of a tilting module. *Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg*, 76:261–277, 2006.

[Kim20] Yuta Kimura. Tilting theory of noetherian algebras. arXiv:2006.01677 [math.RT], 2020.

[KM20] Yuta Kimura and Yuya Mizuno. Two-term tilting complexes for preprojective algebras of non-Dynkin type. arXiv:1908.02424 [math.RT], 2019.

[Kin94] A. D. King. Moduli of representations of finite-dimensional algebras. *Q. J. Math.*, 45(4):515–530, 1994.

[MS] Frederik Marks and Jan Stovicek Torsion classes, wide subcategories and localisations. *Bull. London Math. Soc.*, 49(3):405–416, 2017.

[Pla13] Pierre-Guy Plamondon. Generic bases for cluster algebras from the cluster category. *Int. Math. Res. Not. IMRN*, (10):2368–2420, 2013.

[PY20] Pierre-Guy Plamondon and Toshiya Yurikusa. Tame algebras have dense g-vector fans. arXiv:2007.04215 [math.RT], 2020.

[Yur18] Toshiya Yurikusa. Wide subcategories are semistable. *Doc. Math.*, (23):35–47, 2018.

[Yur20] Toshiya Yurikusa. Density of g-Vector Cones From Triangulated Surfaces. *Int. Math. Res. Not. IMRN*, (21):8081–8119, 2020.