連分数展開と Weber の類数問題

東京理科大学大学院理工学研究科 数学専攻
吉崎彪雅 (Hyuga Yoshizaki)

概要

Weber の類数問題とは，有理数体 $\mathbb{Q}$ 上の $\mathbb{Z}_2$-拡大の中間体の類数を問う問題である．講演者は，類数計算が，Pell 方程式の自然な拡張の求解に帰着できることに注目し，古くから知られる連分数展開による解法の類似を試み，連分数展開の拡張を与えた．さらに，類数問題と同値な予想を定式化し，その部分的結果を得た．また，単数の“サイズ”を評価することで，素数による類数の非可除性に関する研究にも応用ができることを紹介したい．

今回は，コロナ禍という情勢にもかかわらず，オンラインで盛大な集会を開いていただき，世話人の三柄 邦康氏，足利 涼介氏，沖田 誠悟氏，小山 元希氏，桑田 健氏，石井 宙志氏，工藤 勇氏，祐川 翼氏，関 元樹氏，長谷川 蒼氏，波多野 幸平氏には，この場を借りて心より感謝申し上げます．ありがとうございました．

1 導入

有理数体 $\mathbb{Q}$ 上の $\mathbb{Z}_2$-拡大とは，$\mathbb{Q}$ 上の無限次ガロア拡大で，そのガロア群が 2 進整数環 $\mathbb{Z}_2$(を加法群とみなしたもの) と同型なものをいう．実は，$\mathbb{Q}$ 上の $\mathbb{Z}_2$-拡大は同型を除いて一意に定まる．ここで，その構成を確認する．正の整数 m に対して，$\zeta_m := \exp(2\pi\sqrt{-1}/m)$ とおく．非負整数 n に対して，$\mathbb{B}_n := \mathbb{Q}(\zeta_{2^{n+2}} + \zeta_{2^{n+2}}^{-1})$ とおく．$\mathbb{B}_n$ は，円分体 $\mathbb{Q}(\zeta_{2^{n+2}})$ の最大実部分体であるから，そのガロア群 $G_n := \mathrm{Gal}(\mathbb{B}_n/\mathbb{Q})$ は，$G_n \cong \mathbb{Z}/2^n\mathbb{Z}$ となる．$\mathbb{B}_\infty := \cup_{n\geq 0}\mathbb{B}_n$ を考えると，$\mathbb{B}_\infty$ は無限次のガロア拡大であり，そのガロア群は $\varprojlim_n \mathbb{Z}/2^n\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}_2$ となる．

1886 年，Weber [7] は，$n = 1, 2, 3$ について，$\mathbb{B}_n$ の類数 (h_n とする) が 1 であることを示した．これにちなみ，$\mathbb{B}_n$ の類数 h_n の決定問題は，Weber の類数問題と呼ばれている．Weber 問題はその後，様々な研究者により，$h_n = 1$ が示され，現在は $h_6 = 1$，一般化リーマン予想を仮定すれば $h_7 = 1$ (2014, Miller [3]) まで分かっている．さらに，「h_n を割らない素数を決定する」という観点の研究も進んでいる．例えば Horie [2] により，素数 l が $l \not\equiv \pm 1 \pmod 8$ ならば，全ての n に対して $l \nmid h_n$ であること，他にも Fukuda と Komatsu [1] による，$l < 10^9$ ならば，全ての n に対して $l \nmid h_n$ であることなどが知られている．ここでは割愛するが，他にも無限に多くの素数 l について，h_n での非可除性が証明されていて，反例は今のところ見つかっていない (Weber 問題の詳しい歴史については，福田 [10, 第 14 章] 参照)．よって，今では多くの研究者が，全ての n に対して $h_n = 1$ であろうと予想しており，時に Weber 予想とも呼ばれる．

類数が 1 となる二次体がいくつあるか (Gauss 予想) は未解決問題であり，さらに広く，二次体に限らずとも，無限に存在するかはわかっていない．Weber 予想が肯定的に解決されれば，類数 1 の

代数体の無限族になるため，数論において大きな意義がある．

Horie や Fukuda, Komatsu の結果は，単数群を観察することによって得られた．単数群と類数の関係については，時代はさかのぼり，Sinnott [5] による次の結果がある．E_n を $\mathbb{B}_n$ の単数群，C_n を E_n の，円単数群と呼ばれる部分群とする．この時，

$$[E_n : C_n] = h_n$$

が成り立つ．円単数群 C_n は，次のように定義される．

$$C_n := \left\langle -1, \zeta_{2^{n+2}}^{\frac{1-a}{2}} \frac{1-\zeta_{2^{n+2}}^a}{1-\zeta_{2^{n+2}}} \mid a \text{ は } 1 < a < 2^{n+1} \text{を満たす奇数} \right\rangle_{\mathbb{Z}}.$$

ここで，環 R と R-加群 M，M の部分集合 S に対して，S で生成される M の部分 R-加群を，$\langle S \rangle_R$ と書くことにする．Sinnott の結果により，$\mathbb{B}_n$ の類数 h_n は，単数群の構造を見ればよいことが分かる．

2　準備

導入では，Weber 予想とその歴史，先行研究について簡単に紹介し，最後に類数が単数群の構造に帰着されることを見てきた．単数群については，以下に定める相対ノルムが有用である．$n \geq 1$ に対して，

$$N_{n/n-1} : E_n \to E_{n-1}; \epsilon \mapsto \epsilon\tau(\epsilon)$$

を，相対ノルムという．ここで，τ は相対二次拡大 $\mathbb{B}_n/\mathbb{B}_{n-1}$ のガロア群の生成元である．相対ノルムについて，以下の命題が成り立つ (詳しくは Washington [6]，Yokoi [8])．

命題 2.1.

$$N_{n/n-1} : E_n \to E_{n-1},$$
$$N_{n/n-1}|_{C_n} : C_n \to C_{n-1}$$

は，全射である．

よって，以下の完全系列が成り立つ．

$$0 \longrightarrow RE_n^+/A_n \longrightarrow E_n/C_n \xrightarrow{N_{n/n-1}} E_{n-1}/C_{n-1} \longrightarrow 0 \tag{1}$$

ここで，$RE_n^+ := \ker N_{n/n-1}$，$A_n := \ker N_{n/n-1}|_{C_n}$ とおいた．この完全系列から，

$$[RE_n^+ : A_n] = [E_n : C_n]/[E_{n-1} : C_{n-1}] = h_n/h_{n-1}$$

がわかり，たとえばまだ分かっていない $n = 7$ について考えれば，$[RE_7^+ : A_7] = h_7/h_6 = h_7$ となり，単数群全体ではなく，相対ノルムの核のみを見ればよいことが分かる．表記の簡明化のために，非負整数 n に対して，$X_n := \zeta_{2^{n+2}} + \zeta_{2^{n+2}}^{-1}$ とする ($X_0 = 0$ である)．X_n は，

$$X_1 = \sqrt{2}, X_2 = \sqrt{2+\sqrt{2}}, X_3 = \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}, ...$$

という形をしている．円分体論より，$\mathbb{B}_n$ の整数環は $\mathbb{Z}[X_n]$ である．よって，$n \geq 1$ に対して，整数環の任意の元 α は，$a, b \in \mathbb{Z}[X_{n-1}]$ によって，$\alpha = a + bX_n$ の形で一意にかける．この見方で RE_n^+ を見ると，$x, y \in \mathbb{Z}[X_{n-1}]$ に対して，

$$x + yX_n \in RE_n^+ \Leftrightarrow N_{n/n-1}(x + yX_n) = x^2 - y^2X_n^2 = 1$$

であるから，方程式 $x^2 - y^2X_n^2 = 1$ の，$\mathbb{Z}[X_{n-1}]$ 上の解を求めることに帰着される．

3 Pell 方程式と連分数展開

講演者は，方程式 $x^2 - y^2X_n^2 = 1$ を，古くから知られる Pell 方程式の類似とみなし，その解法の類似を考察した．ここでは，Pell 方程式と連分数展開について簡単に紹介する．

3.1 連分数展開

実数 α が，整数 $a_0, a_1, a_2, \ldots$ によって，

$$\alpha = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \ddots}}$$

と表せるとき，$\alpha = [a_0, a_1, a_2, \ldots]$ と表記し，α の連分数展開という．また，右辺の形のものを，単に連分数という．連分数 $[a_0, a_1, a_2, \ldots]$ に対して，その k 番目までの分数 $p_k/q_k := [a_0, a_1, a_2, \ldots, a_k]$ を，k-th convergent という．

実数の中でも，特に二次無理数 $\sqrt{m}$（m は平方数でない正の整数）に対して，その連分数展開は以下の形になることが知られている；

$$\sqrt{m} = [a_0, \overline{a_1, \ldots, a_l}]$$

ここで，$a_1, \ldots, a_l$ の上の線は，$a_1, \ldots, a_l$ が周期的に続くことを表す．すなわち，

$$\sqrt{m} = [a_0, a_1, \ldots, a_l, a_1, \ldots, a_l, a_1, \ldots, a_l, \ldots]$$

となる．また，この l を，連分数の周期という．

■例. $m = 2$ の時，$\sqrt{2}$ の連分数展開は，

$$\sqrt{2} = [1, \overline{2}] = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \ddots}}$$

となる．$[1, \overline{2}]$ の周期は 1 である．

3.2 Pell 方程式

平方数でない正の整数 m に対して，方程式

$$x^2 - my^2 = 1$$

を，Pell 方程式という．Pell 方程式を解くとは，この方程式を満たす整数解 (x, y) 全てを求めること をいう．Pell 方程式には，$\sqrt{m}$ の連分数展開を用いた解法がある．以下に簡単にまとめる．

■Pell 方程式の解法　$\sqrt{m}$ の連分数展開を $[a_0, \overline{a_1, \ldots, a_l}]$ とする．l の偶奇に応じて，

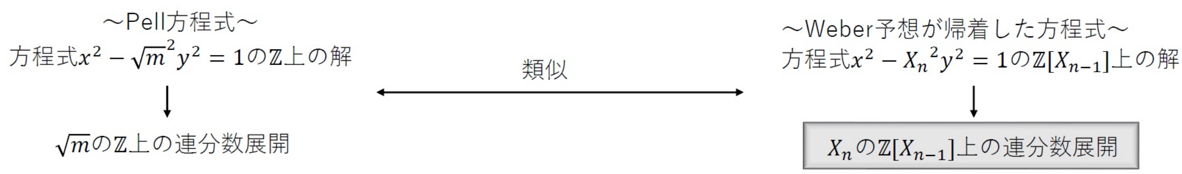
$$\epsilon = \begin{cases} p_{l-1} + \sqrt{m} q_{l-1} & (2 \mid l) \\ p_{2l-1} + \sqrt{m} q_{2l-1} & (2 \nmid l). \end{cases}$$

とおくと，ϵ が Pell 方程式 $x^2 - my^2 = 1$ の解を生成する．生成とは，ϵ を代数体 $\mathbb{Q}(\sqrt{m})$ の元とみなし，その中で ϵ と -1 で生成される乗法部分群 $\langle -1, \epsilon \rangle_{\mathbb{Z}}$ を考えたとき，この部分群の各元は $a + \sqrt{m} b$ $(a, b \in \mathbb{Z})$ という形をしており，その (a, b) が方程式のすべての解を与えるという意味である．

■例.　方程式 $x^2 - 2y^2 = 1$ の整数解を求める．$\sqrt{2}$ の連分数展開は $[1, \overline{2}]$ で，その周期は 1 であったから，$\epsilon = p_{2\cdot 1-1} + \sqrt{2} q_{2\cdot 1-1} = p_1 + \sqrt{2} q_1 = 3 + 2\sqrt{2}$ が，（先の意味での）解の生成元である．

4　講演者の研究，及び主結果

準備のセクションで，Weber 予想が，方程式 $x^2 - y^2 X_n^2 = 1$ の $\mathbb{Z}[X_{n-1}]$ 上の解を求めることに帰着されることを説明し，前セクションで，Pell 方程式と連分数展開，およびその関係性について紹介した．講演者は，以下の図のような類似に注目し，X_n の $\mathbb{Z}[X_{n-1}]$ 上の連分数展開を考案した．



定理 4.1 (主結果：連分数展開アルゴリズム)**.** $\phi : \mathbb{B}_{n-1} \hookrightarrow \mathbb{R}^{2^{n-1}}; x \mapsto \phi(x) := (\sigma(x))_{\sigma \in G_{n-1}}$ と埋め込むことにより，$\phi(\mathbb{Z}[X_{n-1}])$ は $\mathbb{R}^{2^{n-1}}$ の完全格子となる．X_n を $\phi(X_n) := (\sqrt{2 + \sigma(X_{n-1})})_{\sigma \in G_{n-1}} \in \mathbb{R}^{2^{n-1}}$ と埋め込めば，ϕ は $\mathbb{B}_n$ 全体に拡張できる．$\alpha \in \mathbb{B}_n$ に対して，$\lfloor \alpha \rfloor :=$「$\mathbb{R}^{2^{n-1}}$ において $\phi(\alpha)$ に最も近い $\phi(\mathbb{Z}[X_{n-1}])$ の点の，ϕ による引き戻し」とし，

$$\begin{aligned} \alpha_0 &:= \alpha \\ \alpha_m &:= (\alpha_{m-1} - \lfloor \alpha_{m-1} \rfloor)^{-1} \quad (m \geq 1) \end{aligned}$$

と定める．このとき，$\alpha = X_n$ に対して，

$$[\lfloor \alpha_0 \rfloor, \lfloor \alpha_1 \rfloor, \lfloor \alpha_2 \rfloor, \ldots] = [1, \overline{2(1 + X_{n-1})^{-1}, 2}]$$

となる．さらに，上記の連分数 $[1, \overline{2(1 + X_{n-1})^{-1}, 2}]$ は，$\mathbb{R}^{2^{n-1}}$ において，$\phi(X_n)$ に収束する．

■　$1 + X_{n-1}$ は $\mathbb{Z}[X_{n-1}]$ の単数であるから，連分数展開中の $2(1 + X_{n-1})^{-1}$ は $\mathbb{Z}[X_{n-1}]$ の元である．

■　$n=1$ とき，$X_1=\sqrt{2}, X_0=0$ であったから，$\sqrt{2}=[1,\overline{2(1+X_{n-1})^{-1},2}]=[1,\overline{2,2}]$ となり，古典的結果のある意味拡張になっていると考えられる．

証明. $\mathbb{Z}[X_{n-1}]$ の $\mathbb{Z}$ 上の基底で，ϕ で $\mathbb{R}^{2^{n-1}}$ に埋め込んだ時に直交するものがあり，それを利用して「一番近い点」を決定できる．収束性については，従来の連分数と同様に定義できる k-th convergent p_k/q_k について，各 $\sigma\in G_{n-1}$ に対して，$\sigma(p_k/q_k)$ が $\sigma(X_n)$ に収束することが証明できる．　□

$n\geq 2$ に対して，X_n の $\mathbb{Z}[X_{n-1}]$ 上の連分数展開の周期が $l=2$ ($n=1$ のときは $l=1$) であるから，Pell 方程式の解法の類似を考えて，$l-1=1$-st ($n=1$ の時も $2l-1=1$) convergent を見てみる．

$$
\begin{aligned}
p_1 &= 1+2(1+X_{n-1})^{-1},\\
q_1 &= 2(1+X_{n-1})^{-1}
\end{aligned}
$$

であるが，簡単な計算により，

$$p_1+q_1X_n=\frac{X_n+1}{X_n-1}$$

となる．$n\geq 1$ に対して，$\epsilon_n:=(X_n+1)/(X_n-1)$ とおくと，これも簡単な計算により，$\epsilon_n\in RE_n^+$ が分かる．すなわち，(p_1,q_1) は，$x^2-y^2X_n^2=1$ の解になっている．そこで，講演者は以下の予想をした．

予想 4.2. $\langle -1,\epsilon_n\rangle_{\mathbb{Z}[G_n]}=RE_n^+$.

■　$n=1$ のとき，$x^2-2y^2=1$ は古典的な Pell 方程式であり，連分数展開により ϵ_1 が解全体を生成する．よって予想は成り立つ．

上記の予想は，Weber 予想とは独立に，「方程式 $x^2-y^2X_n^2=1$ の $\mathbb{Z}[X_{n-1}]$ 上の解は，X_n の連分数展開で生成されるだろう」というものだが，実はこれが Weber 予想と同値になる．

命題 4.3. 予想 *4.2* $\Leftrightarrow$ *Weber* 予想.

証明. 完全系列 (1) より，$A_n=\langle -1,\epsilon_n\rangle_{\mathbb{Z}[G_n]}$ が言えればよい．$A_n=RE^+\cap C_n$ で，C_n は生成元が与えられているため，確認できる．

$$
\begin{tikzcd}
 & RE_n^+ \arrow[dl, equal, "\text{Weber 予想}"'] \arrow[dr, equal, "\text{予想 4.2}"] & \\
A_n \arrow[rr, equal] & & \langle -1,\epsilon_n\rangle_{\mathbb{Z}[G_n]}
\end{tikzcd}
$$

□

Weber 予想は現在 $n=6$ まで確かめられているため，上記の対応を考えると，予想 4.2 も $n=6$ まで正しい．

5 予想 4.2 に向けて (部分的な結果と，さらなる予想)

予想 4.2 は，既存の Pell 方程式，及び連分数展開の理論の類似を考えたものであり，その証明も，既存の理論 (近似論など) の援用が考えられるが，まだ見通しは立っていない．しかし，部分的な結果は得られている．

予想 4.2 は，任意の $\delta \in RE_n^+$ は，ある整数 $e_0, e_1, ..., e_{2^{n-1}-1}$ で，

$$\delta = \pm\epsilon_n^{e_0}\sigma(\epsilon_n)^{e_1}\sigma^2(\epsilon_n)^{e_2}\cdots\sigma^{2^{n-1}-1}(\epsilon_n)^{e_{2^{n-1}-1}}$$

とかけることを主張している．ここで，σ は G_n の生成元とする．よって，$(r_0, r_1, ..., r_{2^{n-1}-1}) \in \mathbb{Q}^{2^{n-1}} \setminus \mathbb{Z}^{2^{n-1}}$ に対して，

$$\pm\epsilon_n^{r_0}\sigma(\epsilon_n)^{r_1}\sigma^2(\epsilon_n)^{r_2}\cdots\sigma^{2^{n-1}-1}(\epsilon_n)^{r_{2^{n-1}-1}} \notin RE_n^+ \tag{2}$$

が証明できれば良い．次の Morisawa と Okazaki [4] による結果で，RE_n^+ の元の評価を見ることができる．

定理 5.1. $n \geq 2$ とする．$\forall\epsilon \in RE_n^+ \setminus \{\pm 1\}$ に対して，

$$Tr(\epsilon^2) \geq 2^n \cdot 17.$$

この評価を用いて，講演者は次の結果を得た．

定理 5.2. 有理数 $\frac{l}{m} \notin \mathbb{Z}$ に対して，$\epsilon_n^{l/m} \notin RE_n^+$.

これは，(2) についての部分的な結果である．この結果の精度をあげるには，定理 5.1 をより精密化する必要がある．定理 5.1 は，Komatsu と Okazaki の private talk から予想された，次の予想の部分的な結果である．

予想 5.3 (Komatsu-Okazaki)**.** $n \geq 1$ とする．$\forall\epsilon \in RE_n^+ \setminus \{\pm 1\}$ に対して，

$$Tr(\epsilon^2) \geq 2^n \cdot (2^{n+1} - 1).$$

■ 予想は本来，RE_n^+ の元だけでなく，$N_{n/n-1}(\epsilon) = -1$ となるものについても同じ評価になることを予想しているが，$N_{n/n-1}(\epsilon) = -1$ となる ϵ については，Morisawa と Okazaki [4] により解決している．

定理 5.1 は，$n = 2, 3$ に対して，予想 5.3 は正しいことを示している ($n = 1$ の場合は，よく知られている．詳しくは [4] 参照)．しかし，講演者の観察から，この予想はより精密化が可能であることが分かり，Kashio 氏と次の精密版を考案した．

予想 5.4 (Komatsu-Okazaki 予想の精密化)**.** $c_1 = 2$，$n \geq 2$ に対して，$c_n := 2\langle 2^n/5\rangle$ とする．ただし，$\langle r\rangle$ は，$|r - a| \leq 1/2$ となる整数 a とする．$|r - a| = 1/2$ となる場合は，大きい方の a を採用する．この時，$\forall\epsilon \in RE_n^+ \setminus \{\pm 1\}$ に対して，

$$Tr(\epsilon^2) \geq 2^n(1 + 8c_n).$$

また，この予想はこれ以上精密化できないだろう．

■　「これ以上精密化できない」という予想は，具体的に $Tr(\epsilon^2) = 2^n(1+8c_n)$ となる単数を見つけることが必要である．n が偶数の時，講演者と Kashio 氏はそのような単数を構成した．n が奇数の時，$n \geq 7$ に対して，まだ具体的な形は分からない．

■　この予想は，予想 5.3 の精密化である (次表)．つまり，$n \geq 1$ に対して，$1+8c_n > 2^{n+1}-1$ である．

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$1+8c_n$	17	17	33	49	97	209	417	817	1633	3281
$2^{n+1}-1$	3	7	15	31	63	127	255	511	1023	2047

講演者と Kashio 氏との研究により，$n \leq 4$ までは，Weber 予想とは独立に予想 5.4 が正しいことが確認された．また，$n = 5$ に対しては，Weber 予想 (証明されてるので定理) から，予想 5.4 が正しいことが分かった．$n \geq 6$ についてはまだ確認できていないが，計算プログラムを改善すれば，もう少し大きい n についても確認できるだろう．

精密化された予想 5.4 が，どのように有効であるかを見る．$n = 4$ に対して，問題 (2) の $(r_0, r_1, \cdots, r_7)$ として，

$$(63/73, 0, 46/73, 0, 22/73, 0, 1/73, 0)$$

を考える．この時，$\delta = \epsilon_4^{r_0}\sigma(\epsilon_4)^{r_1}\cdots\sigma^7(\epsilon_4)^{r_7}$ とすると，$Tr(\delta^2) = 737.948...$ となり，予想 5.3 では ($2^4(2^5-1) = 496$ を上回り) 直ちには判定できないが，予想 (定理)5.4 では，$2^4(1+8\cdot 6) = 784$ より，$\delta \notin RE_4^+$ と判定できる．さらに，分母を素数 73 で固定した，有限個 (説明は割愛するが，実は四通り確認するだけでよい) の $(r_0, r_1, \cdots, r_7)$ に対して上記判定を行えば，$73 \nmid h_4$ が分かる．こうして，予想 5.4 は，類数の非可除性にも応用できる．$n = 4$ の時は $h_4 = 1$ と分かっているが，この手法は，より大きな n，素数 l に対しても有効であることを確認している．

■　予想 5.3 では，上記の例を直ちには判定できないが，「ϵ_n でずらす」ことで，判定が可能である．現状，「予想 5.3 では判定できないが予想 5.4 で判定できる例」は見つかっていない．今のところ精密化の有用性は，「より簡単に判定できる」という点にある．

6　問題

これまでの問題を，以下に挙げる．興味を持たれた方の参入を期待する．

1. 主結果 (定理 4.1) の連分数展開の，近似論的な現象を定式化できないか？特に，Pell 方程式の解法に直結する，Best approximation の類似現象はないだろうか？

   ■**Best approximation**　実数 α に対して，既約分数 p/q が以下を満たすとき，p/q を α の best approximation という；

$$0 < |b| \leq |q|, p/q \neq a/b \text{ ならば}, |p - q\alpha| < |a - b\alpha|$$

また，p/q が α の $\mathbb{Z}$ 上の連分数展開の convergent$\Leftrightarrow$ p/q は α の best approximation が成り立つ．古典的な Pell 方程式は，

$$\text{Pell 方程式の解} \Rightarrow \text{best approximation を満たす} \Rightarrow \text{convergent}$$

という流れで示されるため，主結果の連分数展開に対しても，上記のような近似論的な現象が期待でき，また Weber 予想解決のためには必要であると思われる．(講演者は，これに関していくつか興味深いデータがある．興味を持たれた方は是非．)

2. 主結果の連分数展開には，まだ考えるべき点がある．例えば，「$\mathbb{Z}$ 上の連分数が周期的 $\Leftrightarrow$ 二次無理数」という関係が，主結果の連分数展開アルゴリズムにも見て取れる．つまり，X_n は $\mathbb{Q}$ 上二次無理数ではないが，$\mathbb{B}_{n-1}$ 上二次無理数と考えられ，実際に周期的連分数

$$X_n = [1, \overline{2(1+X_{n-1})^{-1}, 2}]$$

になっている．他の $\mathbb{B}_n$ 元に対しても，今のところ反例はないが，これは一般に成り立つだろうか？

3. 予想 5.4 は，best な精密化か？特に，予想にある形の単数は具体的に書けるか？ ($n \geq 7$ の奇数に対して分かっていない).

4. $n = 2$ に対しては，予想 5.4(示されているから正しくは定理) から，$h_2 = 1$ であることが分かる．これは，$Tr(\epsilon^2)$ を，関数として具体的に表したグラフの形を見ることで分かる．$n \geq 3$ についても，解析的な議論で，$h_n = 1$ が言えないか？

参考文献

[1] T. Fukuda, K. Komatsu, Weber's class number problem in the cyclotomic $\mathbb{Z}_2$-extension of $\mathbb{Q}$, Ⅲ, Int. J. Number Theory, 7-6 (2011), 1627-1635.

[2] K. Horie, Certain primary components of the ideal class group of the $\mathbb{Z}_p$-extension over the rationals, Tohoku Math. J., 59 (2007), 259-291.

[3] J. C. Miller, Class numbers of totally real fields and applications to the Weber class number problem, Acta Arith., 4 (2014), 381-388.

[4] T. Morisawa, R. Okazaki, Filtrations of units of Viète Field, Int. J. Number Theory, https://doi.org/10.1142/S1793042120500554.

[5] W. Sinnott, On the Stickelberger Ideal and the Circular Units of a Cyclotomic Field, Ann. of Math, 108 (1978), 107-134.

[6] L. C. Washington, Introduction to Cyclotomic Fields second edition, GTM 83, Springer, 1997.

[7] H. Weber, Theorie der Abel'schen Zahlkörper, Acta Math., 8 (1886), 193-263.

[8] H. Yokoi, On the class number of a relatively cyclic number field, Nagoya Math. J., 29 (1967), 31-44.

[9] H. Yoshizaki, A New Continued Fraction Expansion and Weber's Class Number Problem, preprint.

[10] 福田 隆, 重点解説 岩澤理論 理論から計算まで, 臨時別冊・数理科学 SGC ライブラリ-145, サイエンス社, 2019.