Product basis を持たない部分空間の最大次元

名古屋大学大学院 多元数理科学研究科 多元数理科学専攻
吉田 裕哉 (Yuuya YOSHIDA)

概要

$n \geq 2$ と $d_1, \dots, d_n \geq 2$ を整数とし, $\mathcal{H}(d_1, \dots, d_n) = \mathbb{C}^{d_1} \otimes \cdots \otimes \mathbb{C}^{d_n}$ とおく. ベクトル $u \in \mathcal{H}(d_1, \dots, d_n)$ が, 適当な $u^{[1]} \in \mathbb{C}^{d_1}, \dots, u^{[n]} \in \mathbb{C}^{d_n}$ を用いて $u = u^{[1]} \otimes \cdots \otimes u^{[n]}$ と表せるとき, u を product vector と呼ぶ. また, product vector からなる (直交とは限らない) 基底を product basis という. 本稿では, product basis を持たない $\mathcal{H}(d_1, \dots, d_n)$ の部分空間の最大次元が $d_1 d_2 \cdots d_n - 2$ であることを示す. この結果は, 一般確率論 (GPTs) と呼ばれる物理モデルの capacity と関係がある.

1 導入

量子論は複素 Hilbert 空間上の作用素により記述され, 古典情報処理を超える性能を有した量子情報処理を可能とする. しかし, 量子論の理論的基礎はまだ十分とはいえず, それを補うための研究が行われている. その 1 つが, 一般確率論 (GPTs) である. 簡単にいうと, 一般確率論は, 測定値を得る確率を扱えるように定義された理論的な物理モデルである. 量子論や古典確率論は一般確率論の典型例である.

以下, 一般確率論における 1 つのモデルを表したいときは, GPT と記す. 一般確率論において最も重要な点は, たとえ部分系が全て決まっていても, 全体系が一意的に定まるとは限らない点である. 部分系が全て量子系であるものは局所量子系と呼ばれ, 量子系も局所量子系の 1 つである. しかし, 量子系でない局所量子系はいくらでも存在する. そのため, 局所量子系たちに共通の性質や, 局所量子系ごとに異なる性質を見出したい. ここでは, 局所量子系に共通の性質になりそうな "capacity" に焦点を当てる. Capacity は同時識別可能な状態の最大個数であるが, 本稿では一般確率論や capacity の説明を省き, それらに関する数学的核のみ扱う. そのため, 本稿の内容は, 一般確率論や capacity の定義を知らなくても理解できるが, それらに興味がある読者は full ver. [1, Section 4] を見てほしい.

2 Separable 行列と product basis

以下, $n \geq 2$ と $d_1, \ldots, d_n \geq 2$ を整数とする. n 部複素 Hilbert 空間 $\mathbb{C}^{d_1} \otimes \cdots \otimes \mathbb{C}^{d_n}$ を $\mathcal{H}(d_1, \ldots, d_n)$, その次元 $d_1 d_2 \cdots d_n$ を $\tilde{d}$ と表す. また, I を $\mathcal{H}(d_1, \ldots, d_n)$ 上の単位行列, $\mathrm{conv}(\mathcal{S})$ を部分集合 $\mathcal{S}$ の凸包とする. 本稿では bra-ket 記法を用いる: $u \in \mathbb{C}^d$ に対して, $|u\rangle$ は列ベクトル u を表し, $\langle u|$ は u の共役転置を表す. そのため, $\langle \cdot | \cdot \rangle$ は $\mathbb{C}^d$ 上の標準 Hermite 内積である. また, 任意の単位ベクトル $u \in \mathbb{C}^d$ に対して, $|u\rangle\langle u|$ はランク 1 の直交射影である. 集合

$$\mathsf{Sep}(d_1, \ldots, d_n) \coloneqq \mathrm{conv}\{X^{[1]} \otimes \cdots \otimes X^{[n]} : X^{[1]}, \ldots, X^{[n]} \text{ positive semi-definite}\}$$

の元を **separable 行列**と呼ぶ. Separable 行列は半正定値だが, その逆が成り立つとは限らない.

さて, capacity は各 GPT に対して一意的に定まる自然数である. 特殊な局所量子系の capacity を導出する際, 重要な役割を果たすのが以下の主張である:

(S1) 任意の単位ベクトル $u \in \mathcal{H}(d_1, \ldots, d_n)$ に対して, 2 つの行列 $I \pm |u\rangle\langle u|$ は $\mathsf{Sep}(d_1, \ldots, d_n)$ に含まれる.

もし $n = 2$ なら, 任意の整数 $d_1, d_2 \geq 2$ に対して, (S1) は真である. 実際, $n = 2$ の場合, 任意の整数 $d_1, d_2 \geq 2$ に対して, 以下の主張が成り立つ [2]:

(S2) $\|X\|_2 \coloneqq (\mathrm{Tr}\, X^* X)^{1/2} \leq 1$ を満たす任意の Hermite 行列 X に対して, 行列 $I + X$ は $\mathsf{Sep}(d_1, \ldots, d_n)$ に含まれる.

主張 (S2) は (S1) より強い主張であり, 一般には成り立たない [3, 4]. しかし, $n \geq 3$ の場合に (S1) が成り立つかどうかは, 我々の知る限り未解決である.

我々の興味は, 任意の整数 $n \geq 2$ と $d_1, \ldots, d_n \geq 2$ に対して, 主張 (S1) が成り立つかどうかにある. しかし, いきなり (S1) を調べるのは難しいので, 我々は (S1) より弱い以下の主張を示す: 任意の整数 $n \geq 2$ と $d_1, \ldots, d_n \geq 2$ に対して,

(S3) $\mathcal{H}(d_1, \ldots, d_n)$ の任意の $\tilde{d} - 1$ 次元部分空間 $\mathcal{L}$ は product basis を持つ.

ただし, ベクトル $u \in \mathcal{H}(d_1, \ldots, d_n)$ が, 適当な $u^{[1]} \in \mathbb{C}^{d_1}, \ldots, u^{[n]} \in \mathbb{C}^{d_n}$ を用いて $u = u^{[1]} \otimes \cdots \otimes u^{[n]}$ と表せるとき, u を **product vector** と呼ぶ. また, product vector からなる (直交とは限らない) 基底を **product basis** という. 実は, product basis を持たない $\tilde{d} - 2$ 次元部分空間を構成できる [1, Proposition 2.4] ので, 以下の定理を得る.

Theorem 1. 任意の整数 $n \geq 2$ と $d_1, \ldots, d_n \geq 2$ に対して,

$$\max\left\{\dim \mathcal{L} : \begin{array}{l} \mathcal{L} \text{ is a subspace of } \mathcal{H}(d_1, \ldots, d_n) \text{ and} \\ \text{has no product basis} \end{array}\right\} = \tilde{d} - 2.$$

先行研究 [5–8] では, Theorem 1 に類似した等式や不等式が知られている. Theorem 1 は, スカラー体 $\mathbb{C}$ を無限体 $\mathcal{F}$ に置き換えても成り立つ. Theorem 1 の証明では, 以下の補題が 1 つの鍵となる.

Lemma 1. $\mathcal{F}$ を無限体, $n \geq 1$ を整数, $f(x_1, \ldots, x_n)$ を $\mathcal{F}$ 上の多項式とする. このとき, 以下の条件は同値:

1. 任意の $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathcal{F}$ に対して, $f(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = 0$;
2. 多項式として $f(x_1, \ldots, x_n) = 0$.

Proof. [9, Theorem 2.19] を見よ. □

しかし, $\mathcal{F}$ が有限体の場合, Lemma 1 が成り立たない. そのため, 有限体の場合には別の証明が必要である.

3 有限体の場合

$\mathcal{F}$ を有限体, q を $\mathcal{F}$ の位数とする. まず, $n = 2$ の場合に使える手法を簡単に説明する. $\mathcal{F}^{d_1}$ と $\mathcal{F}^{d_2}$ の標準基底をそれぞれ $(e_i^{[1]})_{i=1}^{d_1}$, $(e_j^{[2]})_{j=1}^{d_2}$ と表す. 行列 $A = (\alpha_{i,j}) \in \mathcal{F}^{d_1 \times d_2}$ に対して, ベクトル $\mathrm{vec}(A) = \sum_{i,j} \alpha_{i,j} e_i^{[1]} \otimes e_j^{[2]}$ を定める. このとき, 任意の行列 $A \in \mathcal{F}^{d_1 \times d_2}$, $P \in \mathcal{F}^{d_1 \times d_1}$, $Q \in \mathcal{F}^{d_2 \times d_2}$ に対して,

$$\mathrm{vec}(PAQ^\top) = (P \otimes Q)\,\mathrm{vec}(A)$$

が成り立つ. ただし, $Q^\top$ は Q の転置行列を表す. さて, $w \in \mathcal{F}^{d_1} \otimes \mathcal{F}^{d_2}$ とする. このとき, 行列 $A \in \mathcal{F}^{d_1 \times d_2}$ を用いて, $w = \mathrm{vec}(A)$ と表せる. しかも, A をランク標準形に変形できる: ある可逆行列 $P \in \mathcal{F}^{d_1 \times d_1}$ と $Q \in \mathcal{F}^{d_2 \times d_2}$, ある整数 $r \in [0, \min\{d_1, d_2\}]$ に対して,

$$A = PB_rQ^\top.$$

ただし, $B_r := \sum_{i=1}^r |e_i^{[1]}\rangle\langle e_i^{[2]}|$ である. 従って,

$$w = \mathrm{vec}(A) = \mathrm{vec}(PB_rQ^\top) = (P \otimes Q)\,\mathrm{vec}(B_r)$$

となる. このように, 一般のベクトル w を特殊なベクトル $\mathrm{vec}(B_r) = \sum_{i=1}^r e_i^{[1]} \otimes e_i^{[2]}$ に帰着できる. これは量子論でよく使われる手法である.

上で説明した手法を用いると, 以下を示せる.

Proposition 1. $d_1, d_2 \geq 2$ を整数とする．このとき, $\mathcal{F}^{d_1} \otimes \mathcal{F}^{d_2}$ の任意の $d_1 d_2 - 1$ 次元部分空間は product basis を持つ.

Proposition 1 のように, $n = 2$ の場合, 位数 q に余計な仮定は不要である．おそらく, $n \geq 3$ の場合も不要だと思われるが, 我々が証明できたのは以下である.

Theorem 2. $n \geq 2$ と $d_1, \ldots, d_n \geq 2$ を整数とし, $\tilde{d} = d_1 d_2 \cdots d_n$ とおく．もし (i) $n = 2$ または (ii) $n \geq 3$ かつ, ある整数 n_1 と n_2 に対して $q > \max\{d_i : i \neq n_1, n_2\}$ なら,

$$\max\left\{\dim \mathcal{L} : \begin{array}{l} \mathcal{L} \text{ is a subspace of } \mathcal{F}^{d_1} \otimes \cdots \otimes \mathcal{F}^{d_n} \text{ and} \\ \text{has no product basis} \end{array}\right\} = \tilde{d} - 2.$$

Theorem 2 は Proposition 1 と, Lemma 1 の拡張である以下の補題を用いて証明される.

Lemma 2. $\mathcal{F}$ を有限体, $n \geq 1$ を整数, $f(x_1, \ldots, x_n)$ を $\mathcal{F}$ 上の多項式, d_i を $f(x_1, \ldots, x_n)$ の変数 x_i に関する次数とする．もし $q > \max\{d_1, \ldots, d_n\}$ なら, 以下の条件は同値:

1. 任意の $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathcal{F}$ に対して, $f(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = 0$;
2. 多項式として $f(x_1, \ldots, x_n) = 0$.

Proof. [9, Theorem 2.19] を見よ．そこでは Lemma 1 しか証明されていないが, Lemma 2 にも同じ証明が通用する. □

参考文献

[1] Y. Yoshida. Maximum dimension of subspaces with no product basis. arXiv: 2010.16293.

[2] L. Gurvits and H. Barnum. Largest separable balls around the maximally mixed bipartite quantum state. *Phys. Rev. A*, 66(6):062311, 7, 2002.

[3] G. Aubrun and S. J. Szarek. Tensor products of convex sets and the volume of separable states on n qudits. *Phys. Rev. A*, 73(2):022109, 10, 2006.

[4] R. Hildebrand. Entangled states close to the maximally mixed state. *Phys. Rev. A*, 75(6):062330, 10, 2007.

[5] N. R. Wallach. An unentangled Gleason's theorem. In *Quantum computation and information (Washington, DC, 2000)*, volume 305 of *Contemp. Math.*, pages 291–298. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2002.

[6] K. R. Parthasarathy. On the maximal dimension of a completely entangled subspace for finite level quantum systems. *Proc. Indian Acad. Sci. Math. Sci.*, 114(4):365–374, 2004.

[7] T. Cubitt, A. Montanaro, and A. Winter. On the dimension of subspaces with bounded Schmidt rank. *J. Math. Phys.*, 49(2):022107, 6, 2008.

[8] P. Bag, S. Dey, M. Nagisa, and H. Osaka. The order-n minors of certain $(n+k)\times n$ matrices. *Linear Algebra Appl.*, 603:368–389, 2020.

[9] N. Jacobson. *Basic algebra. I.* W. H. Freeman and Company, New York, second edition, 1985.