Lévy ノイズを受けた大域結合振動子系の同期転移

京都大学大学院 情報学研究科 先端数理科学専攻
米田亮介 (Ryosuke YONEDA)

1 イントロダクション

複数の振動子が相互作用や外力を通して同じタイミングで運動するようになる現象を**同期現象**という。同期現象を理論的に説明する代表的なモデルとして結合振動子系がある。特に振動子がすべての振動子と結合している大域結合振動子系は振動子を円周上を運動するものの位相として表され、その微分方程式は

$$\frac{\mathrm{d}\theta_i}{\mathrm{d}t} = \omega_i + \frac{K}{N}\sum_{j=1}^{N}\Gamma(\theta_j - \theta_i), \quad i = 1, \dots N, \tag{1}$$

である。ここで、i 番目の振動子は自然振動数 ω_i を持ち、結合がない場合には各振動子が角速度 ω_i で独立に運動することになる。右辺第 2 項は他の振動子との相互作用を表す項で、例えば結合関数が $\Gamma(\theta) = \sin\theta$ の場合にこのモデルは蔵本モデルと呼ばれ、結合強度 K を大きくすると同期転移が起きることが蔵本によって示された [1, 2]。また、結合関数に高周波が入ってくると蔵本モデルとは異なる同期転移が見られることが知られている [3, 4]。

結合振動子系にノイズが入った系についてもこれまで研究がなされている。特に白色 Gauss ノイズは、その連続極限が Fokker–Planck 方程式で表されること、自然界で現れる代表的なノイズであること、などから多くの研究がある。また、近年 Gauss ノイズの他にも Cauchy ノイズが入った結合振動子系についての研究も行われている [5, 6]。文献 [6] では Cauchy ノイズ下の大自由度結合振動子系が実は Ott–Antonsen 縮約を用いて低次元力学系に縮約できることが報告されており、今後さらなる進展があることが予想される。このように Gauss ノイズや Cauchy ノイズについてはそれなりの進展があるが、これらのノイズを包括する、Lévy ノイズについては同期転移が起こるのかを含めてあまり研究がなされていない。Lévy ノイズは安定分布と呼ばれる、fat tail な分布から生成されるノイズで、為替変動などがこの分布に従うことが知られている [7]。そこで、本報告書では Lévy ノイズを受けた大域結合振動子系における同期転移を調べた。その計算は大きく分けて定常解まわりの線形解析とより高次の非線形項を調べる中心多様体縮約に分けられる。ただ、中心多様体縮約の膨大になりがちなので、本報告書では線形解析の計算を細かく述べることにして、中心多様体縮約の計算については結果のみを書くことにする。

2　モデル

本報告書では Lévy ノイズが入った大域結合振動子系を考える。特に結合関数は 2 モードまでの sin 関数が入ったものとすると、その N 体の振動子に関する微分方程式は

$$\frac{\mathrm{d}\theta_i}{\mathrm{d}t} = \omega_i + \frac{K}{N}\sum_{j=1}^{N}\sin(\theta_j - \theta_i) + \frac{J}{N}\sum_{j=1}^{N}\sin 2(\theta_j - \theta_i) + \xi_i(t), \quad i = 1, \dots, N, \tag{2}$$

で表される。ここで、

- $\theta_i \in [0, 2\pi)$ は i 番目の振動子の位相を表す。
- ω_i は i 番目の振動子の自然振動数を表す。蔵本モデルの研究では自然振動数はある分布 $g(\omega)$ からランダムに選ばれることが多い。この分布 $g(\omega)$ を自然振動数分布という。
- $K, J > 0$ は結合強度。
- 結合関数は $K\sin\theta + J\sin 2\theta$ である。j 番目の振動子との位相差を通して結合が定まっている。
- $\xi_i(t)$ はノイズ。ただし、ノイズは時間には依存せず、安定分布に従うとする。

である。振動子の同期具合を表すパラメーターとして秩序変数がある。

$$z_k = r_k e^{i\varphi_k} = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} e^{ik\theta_j}. \tag{3}$$

特に r_1 は複素平面内の単位円上を運動する振動子たちの重心を表す。r_1 が 0 付近の値を取るとき、振動子たちは円周上に満遍なく分布しており、これは非同期状態に対応する。一方で r_1 が 1 のときには振動子は同じ 1 点に集まっている。これは振動子が完全に同期している、同期状態である。また、r_2 は位相を 2 倍にする効果が入るおかげで円周上で振動子が向かい合う 2 点に集中しているときに $r_2 = 1$ となる。これより、結合の強さと秩序変数の大きさの関係を調べることで同期転移が起きるのかを調べることができる。次セクション以降で秩序変数の K, J 依存性を調べていく。

この微分方程式で連続極限でどのような偏微分方程式になるのか、について議論する。ノイズが無い場合には連続の式になること、また、ノイズが Gaussian の場合には Fokker–Planck 方程式になることが知られている。より一般に、ノイズが安定分布に従うには [8] で求められているように、

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial\theta}(V[f]f) = \mathcal{F}^{-1}[\hat{f}\log S], \tag{4}$$

$$V[f](\theta, \omega, t) = \omega - Kr_1\sin\theta - Jr_2\sin 2\theta, \tag{5}$$

で表される。ここで、

- $f(\theta, \omega, t)$ は時刻 t における (θ, ω) の分布である。つまり、時刻 t において $[\theta, \theta + \delta\theta) \times [\omega, \omega + \delta\omega)$ に振動子が存在する確率は $f(\theta, \omega, t)\delta\theta\delta\omega$ である。
- ω は自然振動数分布 $g(\omega)$ に従うことから

$$\int_{\mathbb{S}^1} \mathrm{d}\theta f(\theta, \omega, t) = g(\omega) \tag{6}$$

が成り立つ。

- 連続極限で秩序変数は

$$z = re^{i\varphi} = \int_{\mathbb{S}^1} \mathrm{d}\theta \int_{\mathbb{R}^1} \mathrm{d}\omega f(\theta, \omega, t) e^{i\theta} \tag{7}$$

  で表される。ただしここでは $\varphi = 0$ とした。

- $\hat{f}$ は $f(\theta, \omega, t)$ の θ に関するフーリエ級数である。ここで、関数 $a(\theta)$ に対してフーリエ級数 $\hat{a}$ などを

$$\mathcal{F}[a] = \hat{a} = (\hat{a}_k)_k, \quad \hat{a}_k = \int_{\mathbb{S}^1} a(\theta) e^{ik\theta} \mathrm{d}\theta, \tag{8}$$

$$a(\theta) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{a}_k e^{-ik\theta} = \mathcal{F}^{-1}[\hat{a}] \tag{9}$$

  で定義する。

- S はノイズの従う分布の特性関数である。すなわち、分布のフーリエ変換である。ただし、関数 $a(x) \in L^2(\mathbb{R})$ に対するフーリエ変換 $\hat{a}(k)$ は

$$\hat{a}(k) = \int_{\mathbb{R}} a(x) e^{ikx} \mathrm{d}x \tag{10}$$

  で定義する。パラメーター $0 < \alpha \leq 2, |\beta| \leq 1, \gamma > 0, \delta$ における安定分布の特性関数は

$$S(k) = \exp[i\delta k - \gamma |k|^\alpha [1 + i\beta \mathrm{sgn}(k) \omega(k, \alpha)]], \tag{11}$$

$$\omega(k, \alpha) = \begin{cases} \tan \frac{\pi\alpha}{2}, & \alpha \neq 1, \\ \frac{2}{\pi} \log |k|, & \alpha = 1, \end{cases} \tag{12}$$

  で定まる。ここで 0 まわりの対称な分布を考える。すなわち、$\beta = \delta = 0$ とする。すると、

$$S(k) = \exp[-\gamma |k|^\alpha] \tag{13}$$

  となる。

- Gauss 分布 $p(x) = e^{-x^2/(2\sigma^2)}/\sqrt{2\pi\sigma^2}$ に対する特性関数は $S(k) = \exp(-\sigma^2 k^2/2)$ で与えられ、$\alpha = 2, \beta = 0, \gamma = \sigma^2/2, \delta = 0$ に対応する。フーリエ変換の微分に関する公式 $\mathcal{F}[a''] = -k^2 \hat{a}$ を思い出すと、$\sigma^2 = 2D$ と置いたときに、

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \theta}(V[f] f) = D \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} \tag{14}$$

  となり、Fokker–Planck 方程式を再現することが出来る。

である。

3 線形解析

安定分布ノイズが入った蔵本モデルの連続極限の式を改めて書くと

$$\frac{\partial F}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \theta}(V[F] F) + \frac{\gamma}{2\pi} \sum_{k \in \mathbb{Z}} |k|^\alpha \hat{F}_k e^{-ik\theta} = 0 \tag{15}$$

である。ここで、

$$V[F] = \omega - v[F], \tag{16}$$

$$v[F] = K \int_{\mathbb{R}} \mathrm{d}\omega' \int_{\mathbb{S}^1} \mathrm{d}\theta' F(\theta', \omega', t) \sin(\theta - \theta') + J \int_{\mathbb{R}} \mathrm{d}\omega' \int_{\mathbb{S}^1} \mathrm{d}\theta' F(\theta', \omega', t) \sin 2(\theta - \theta') \tag{17}$$

である。

3.1 定常解

上の Fokker–Planck 方程式は定常解

$$f^0(\omega) = \frac{g(\omega)}{2\pi} \tag{18}$$

を持つ。これは位相に関する周辺分布を見たときに一様分布になっていることがわかる。この定常解における秩序変数を計算すると、$r_1 = r_2 = 0$ となり非同期状態に対応する。次のサブセクションではこの定常解まわりの摂動を考える。摂動により得られる線形方程式のスペクトルを調べることで非同期状態が安定か不安定かどうかを判定できる。

3.2 摂動

定常解周りの摂動

$$F(\theta, \omega, t) = f^0(\omega) + f(\theta, \omega, t) \tag{19}$$

を Fokker–Planck 方程式に代入すると、f に関する発展方程式

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \mathcal{L} f + \mathcal{N}[f] \tag{20}$$

が得られる。ここで、線形/非線形作用素 $\mathcal{L}, \mathcal{N}$ は

$$\mathcal{L} f = -\omega \frac{\partial f}{\partial \theta} + f^0 \frac{\partial}{\partial \theta} v[f] - \frac{\gamma}{2\pi} \sum_{k \in \mathbb{Z}} |k|^{\alpha} \hat{f}_k e^{-ik\theta}, \tag{21}$$

$$\mathcal{N}[f] = \frac{\partial}{\partial \theta}(v[f] f) \tag{22}$$

である。ただし、f を

$$f(\theta, \omega, t) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{f}_k(\omega, t) e^{-ik\theta} \tag{23}$$

のように Fourier 級数展開した。

3.3 Fourier 級数展開

線形作用素 $\mathcal{L}$ は簡単に対角化される。実際、$\mathcal{L}$ の Fourier 級数展開を

$$\mathcal{L} f = \frac{1}{2\pi} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \mathcal{L}_k \hat{f}_k e^{-ik\theta} \tag{24}$$

と定義すると、

$$\mathcal{L}_k \hat{f}_k = (-\gamma |k|^\alpha + ik\omega)\hat{f}_k + \frac{K}{2} g(\omega)(\delta_{k,1} + \delta_{k,-1})\langle \hat{f}_k \rangle + Jg(\omega)(\delta_{k,2} + \delta_{k,-2})\langle \hat{f}_k \rangle \tag{25}$$

と計算できる。ただし、関数 $h(\omega)$ に対して

$$\langle h \rangle = \int_{\mathbb{R}} h(\omega) \mathrm{d}\omega \tag{26}$$

とした。

線形解析には用いないが、非線形作用素 $\mathcal{N}$ については

$$\widehat{\mathcal{N}[f]}_k = \frac{kK}{2}\langle \hat{f}_1 \rangle \hat{f}_{k-1} - \frac{kK}{2}\langle \hat{f}_{-1} \rangle \hat{f}_{k+1} + \frac{kJ}{2}\langle \hat{f}_2 \rangle \hat{f}_{k-2} - \frac{kJ}{2}\langle \hat{f}_{-2} \rangle \hat{f}_{k+2} \tag{27}$$

と Fourier 係数を計算できる。この結果は中心多様体縮約において用いられる。

3.4 線形作用素のスペクトル

はじめに $\mathcal{L}$ のスペクトルについて、特に分解した $\mathcal{L}_k$ のスペクトルを調べる。

- $k \neq \pm 1, \pm 2$ のとき

$$\mathcal{L}_k \hat{f}_k = (-\gamma |k|^\alpha + ik\omega)\hat{f}_k \tag{28}$$

  となる。スペクトルは $-\gamma |k|^\alpha + ik\omega$ であり、実部は負である。そのため、$k \neq \pm 1, \pm 2$ モードは f^0 の安定性には寄与しない。
- $k = 1$ のとき

$$\mathcal{L}_1 \hat{f}_1 = (-\gamma + i\omega)\hat{f}_1 + \frac{K}{2} g(\omega)\langle \hat{f}_1 \rangle \tag{29}$$

  である。固有値 λ_1 と、これに対応する固有関数を $\psi_1(\omega)$ と書くと、λ は固有方程式

$$\Lambda_1(\lambda) = 1 - \frac{K}{2}\int_{\mathbb{R}} \frac{g(\omega)}{\lambda - i\omega + \gamma} \mathrm{d}\omega \tag{30}$$

  の解である。$g(\omega)$ が一山対称の場合にはこの固有方程式を満たす λ_1 はただ一つであることが知られている。また、$\langle \psi_1 \rangle = 1$ と規格化しておくと、

$$\psi_1(\omega) = \frac{K}{2} \frac{g(\omega)}{\lambda_1 - i\omega + \gamma} \tag{31}$$

  となる。
- $k = 1$ における固有値を λ_1 とすると、$k = -1$ の固有値は λ_1^* であり、固有関数は ψ_1^* である。
- $k = 2$ における固有値を λ_2 としたとき固有方程式と固有関数は

$$\Lambda_2(\lambda) = 1 - J\int_{\mathbb{R}} \frac{g(\omega)}{\lambda - 2i\omega + 2^\alpha \gamma} \mathrm{d}\omega, \quad \psi_2(\omega) = J\frac{g(\omega)}{\lambda_2 - 2i\omega + 2^\alpha \gamma} \tag{32}$$

  である。

- $k=2$ における固有値を λ_2 とすると $k=-2$ の固有値は λ_2^* であり、固有関数は ψ_2^* である。

$k=\pm 1$ に対応する固有関数 Ψ_1, Ψ_1^* は

$$\mathcal{L}\Psi_1 = \lambda_1 \Psi_1, \quad \mathcal{L}\Psi_1^* = \lambda_1^* \Psi_1^* \tag{33}$$

を満たし、

$$\Psi_1 = \frac{\psi_1}{2\pi} e^{-i\theta} \tag{34}$$

である。また、$k=\pm 2$ に対応する固有関数 Ψ_2, Ψ_2^* は

$$\mathcal{L}\Psi_2 = \lambda_2 \Psi_2, \quad \mathcal{L}\Psi_2^* = \lambda_2^* \Psi_2^* \tag{35}$$

を満たし、

$$\Psi_2 = \frac{\psi_2}{2\pi} e^{-2i\theta} \tag{36}$$

である。

3.5 臨界点

定常解 f^0 の安定性が切り替わる結合強度 $K=K_{\mathrm{c}}$ が臨界点となる。このとき系の示す状態は非同期状態から (部分) 同期状態へと切り替わる。今回のセッティングでは 1 モードと 2 モードが不安定になりうるので、それぞれの臨界点を $K_{\mathrm{c}}, J_{\mathrm{c}}$ とおく。安定性の切り替わりは $K \to K_{\mathrm{c}}+0$ において $\lambda \to +0$ となることで特徴づけられる。

- 1 モードが不安定になる臨界点 K_{c} は固有方程式から

$$K_{\mathrm{c}} = \frac{2}{\langle \gamma g(\omega)/(\gamma^2+\omega^2) \rangle} \tag{37}$$

がわかる。ちなみにノイズが無くなる極限 $\gamma \to 0$ を考えよう。$\gamma \to 0$ の極限で

$$\frac{\gamma}{\pi}\frac{1}{\gamma^2+\omega^2} \to \delta(\omega) \tag{38}$$

が超関数の意味で成立する。対応して臨界点は

$$K_{\mathrm{c}} = \frac{2}{\pi g(0)} \tag{39}$$

が得られ、蔵本臨界点が再現される。

- 2 モードが不安定になる臨界点 J_{c} は固有方程式から

$$J_{\mathrm{c}} = \frac{2}{\langle (2^{\alpha-1}\gamma) g(\omega)/(\omega^2+(2^{\alpha-1}\gamma)^2) \rangle} \tag{40}$$

となる。

このように、線形解析を行うことで臨界点を求めることができた。臨界点を超えたところで秩序変数の立ち上がりを調べるためにはさらに高次の非線形項についての解析を行う必要がある。この解析は中心多様体縮約を行うことで可能になるが、その計算は非常に煩雑になるので本報告書では述べない。次のセクションでは $g(\omega)$ を Cauchy 分布に制限して秩序変数の立ち上がりに関する結果のみを述べることにする。これまでの計算で $g(\omega)$ と有理関数との積を被積分関数とした積分が多く出てくることを見た。有理関数の積分は手で求めることができる、という利点がある。確率密度関数でかつ有理関数となるものの代表例が Cauchy 分布なので、結合振動子系の理論解析においては $g(\omega)$ として Cauchy 分布を取ることが多い。

4　$g(\omega)$ が Cauchy 分布の場合

以下では $K = aT, J = (1-a)T$ の場合を考える。$0 \leq a \leq 1$ とし、$a = 1$ の場合には結合は $\sin\theta$ であり、$a = 0$ の場合には結合は $\sin 2\theta$ となる。また、自然振動数分布 $g(\omega)$ が Cauchy 分布

$$g(\omega) = \frac{\sigma}{\pi}\frac{1}{\omega^2 + \sigma^2} \tag{41}$$

の場合を考える。Cauchy 分布が有理関数であることから、臨界点や秩序変数の立ち上がりを解析的に求めることができる。以下では中心多様体縮約を用いて得られた秩序変数の立ち上がりの計算結果を示す。

1 モード、2 モードがそれぞれ不安定化する点をそれぞれ $T_{\mathrm{c}}^{(1)}, T_{\mathrm{c}}^{(2)}$ とおくと、

$$T_{\mathrm{c}}^{(1)} = \frac{2(\sigma+\gamma)}{a}, \quad T_{\mathrm{c}}^{(2)} = \frac{2\sigma + 2^\alpha\gamma}{1-a} \tag{42}$$

と計算できる。これより、$a^* = 2(\sigma+\gamma)/(4\sigma + 2\gamma + 2^\alpha\gamma)$ を境界として、$a^* < a \leq 1$ ならば 1 モードが先に不安定化する。この領域を相 1 転移する領域と呼ぶことにする。また、$0 \leq a < a^*$ ならば 2 モードが先に不安定化し、この領域を相 2 転移する領域と呼ぶことにする。

4.1　相 1 転移

相 1 転移は連続転移と不連続転移によってさらに分類される。$a^* < a \leq 1$ の場合において

$$a_0 = \frac{\gamma+\sigma}{2\gamma+\sigma} \tag{43}$$

を境に連続転移と不連続転移が切り替わる。

- $1 \leq \alpha \leq 2$ のときには σ, γ によらずに次が成立する。すなわち、$a_0 < a \leq 1$ のとき

$$r_1 \sim \sqrt{\frac{a\gamma}{4(\gamma+\sigma)^2}\frac{(4\sigma + 2\gamma + 2^\alpha\gamma)a - 2(\gamma+\sigma)}{(2\gamma+\sigma)a - (\gamma+\sigma)}}\sqrt{T - T_{\mathrm{c}}} \tag{44}$$

  であり、連続転移を起こす。一方 $a^* < a < a_0$ のときには 不連続転移を起こす。
- 一方 $0 < \alpha < 1$ の場合には σ, γ の大きさによって状況が異なってくる。
  - $\sigma > (2-2^\alpha)\gamma$ ならば上と同じことが起きる。すなわち、$a_0 < a \leq 1$ で連続転移、$a^* < a < a_0$ で不連続転移が起きる。

– 一方 $\sigma < (2-2^{\alpha})\gamma$ ならば $a^* < a \leq 1$ で連続転移が起きる。不連続転移が起きない、という違いが生じる。

ここでは r_1 の立ち上がりを見た。このとき r_2 も $T = T_{\mathrm{c}}^{(1)}$ で立ち上がり、$r_2 \sim O(r_1^2)$ となる。

4.2 相 2 転移

$0 \leq a < a^*$ においては

$$r_2 \sim \sqrt{\frac{(1-a)(2^{\alpha}\gamma+\sigma)(2^{2\alpha}\gamma+4\sigma)}{2(2^{\alpha}\gamma+2\sigma)^3}}\sqrt{T-T_{\mathrm{c}}} \tag{45}$$

である。このとき、$T = T_{\mathrm{c}}^{(2)}$ 近傍では r_1 は立ち上がらないこともわかる。

5 まとめ

本報告書では、Lévy ノイズが入った大域結合振動子系における同期転移について考えた。解析のスタート地点として振動子が無限にある $N \to \infty$ の極限における Fokker–Planck 方程式を求めた。その方程式の非同期状態周りの線形解析を行うことで非同期状態から同期状態への転移が起きる臨界点を得ることができた。また、細かな計算は述べなかったが、中心多様体縮約を行うことで臨界点付近での秩序変数の立ち上がりを計算した。特に Lévy ノイズとして Gauss ノイズを取ると、Fokker–Planck 方程式の定常解を計算することができる。この定常解をもとに臨界点と秩序変数の立ち上がりの仕方を計算すると、中心多様体縮約の結果と一致することが確認できる。また、Cauchy ノイズにおいては Fokker–Planck 方程式のダイナミクスを低次元力学系に縮約することができる。この縮約された解をもとに臨界点と秩序変数の立ち上がりを計算すると、やはり中心多様体縮約の結果と一致することを確認できる。今後、数値計算を行って理論結果の確認を行うつもりである。

参考文献

[1] Y. Kuramoto, Self-entertainment of a population of coupled non-linear oscillators, *International Symposium on Mathematical Problems in Theoretical Physics, Lecture Notes in Physics* **39**, 420 (1975).

[2] S. H. Strogatz, From Kuramoto to Crawford: exploring the onset of synchronization in populations of coupled oscillators, *Physica D* **143**, 1 (2000).

[3] J. D. Crawford, Scaling and Singularities in the Entrainment of Globally Coupled Oscillators, *Phys. Rev. Lett.* **74**, 4341 (1995).

[4] H. Chiba and I. Nishikawa, Center manifold reduction for large populations of globally coupled phase oscillators, *Chaos* **21**, 043103 (2011).

[5] T. Tanaka, Low-dimensional dynamics of phase oscillators driven by Cauchy noise, arXiv: 2009.04273.

[6] R. Tönjes and A. Pikovsky, Low-dimensional description for ensembles of identical phase oscillators subject to Cauchy noise, arXiv: 2009.04725.

[7] P. P. Lévy, Calcul des Probabilités (Gauthier Villars, Paris, 1925); Théorie del'addition des Variables Aléatoires, 2nd ed. (Gauthier Villars, Paris, 1937).

[8] S. I. Denisov, W. Horsthemke, and P. Hänggi, Steady-state Lévy flights in a confined domain, *Phys. Rev. E* **77**, 061112 (2008).