# 非特異 2 次曲面および Del Pezzo 曲面上の ACM および Non ACM 曲線に対する考察

日本経済大学 経営学部 経営学科
矢城 信吾 (Shingo YASHIRO)

**概要**

本稿では [1][2] の結果である，非特異 2 次曲面・Del Pezzo 曲面上の ACM 曲線の分類について説明する．非特異 2 次曲面・Del Pezzo 曲面の一般論は [3][4] を基に概説し，ACM 曲線の分類について紹介する．

## 1　はじめに

非特異 2 次曲面および Del Pezzo 曲面については，古くから調べられてきた [4]．非特異 2 次曲面は射影空間の次に考察される対象であり，多重射影空間の例である $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ に同型な射影曲面である．さらに Del Pezzo 曲面も，$\mathbb{P}^2$，$\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ および $\mathbb{P}^2$ の一般の位置にある $r$ 点 $(1 \leq r \leq 6)$ を Blow-up して，反標準因子 $-K_X$ による射影空間への埋め込みで構成される射影曲面である．例えば，射影空間 $\mathbb{P}^3$ 内の非特異 3 次曲面は Del Pezzo 曲面の例である．これらは互いに（同型ではなく）双有理同値な関係にある．すなわち，関数体がすべて 2 変数有理関数体 $k(t_1, t_2)$ と同型となるものである．一方で，射影空間への埋め込みの立場では，偏極多様体 $(X, D)$ として 1970 年代から考察されてきた．偏極多様体とは，射影多様体 $X$ と $X$ 上の因子 $D$ によって定義される射の組を考察するものである．曲線の種数の一般化となる $\Delta$ 種数を基に研究が進められた [5]．$\Delta = 0$ のとき，このような非特異射影多様体は

1. 射影空間 $\mathbb{P}^n$
2. 2 次超曲面 $Q$
3. 射影平面 $\mathbb{P}^2$ の 2 次の Veronese 埋め込み
4. Rational Normal Scroll $\mathbb{P}(\mathcal{O}(a_1) \oplus \cdots \mathcal{O}(a_r))$ $(0 < a_1 \leq \cdots \leq a_r)$

である．より代数的な考察は，Minimal Degree（$\deg X = \operatorname{codim} X + 1$）と呼ばれる観点で考察が進められた．特異点集合がある場合も考察しており，上記射影多様体の錐体についても分類された．$\Delta = 1$ の場合や Almost Minimal Degree（$\deg X = \operatorname{codim} X + 2$）の場合も考察は進められた．

本稿で扱う非特異 2 次曲面は，Minimal Degree 多様体である．また，Del Pezzo 曲面については，Almost Minimal Degree 多様体である．これらの極小自由分解については，[6][7] により考察はされている．

# 2　2 次曲面の概説

$\mathbb{P}^3$ 内の非特異 2 次曲面について概説する．この節では，標数 2 でない代数的閉体とする．[*1][*2]

非特異 2 次曲面とは，既約な 2 次斉次多項式 $F(z_0, \ldots, z_3)$ で定義される曲面 $Q$ であり，特異点集合 $\operatorname{Sing} Q = V(\dfrac{\partial F}{\partial z_0}, \ldots, \dfrac{\partial F}{\partial z_3}) = \phi$ となるものである．

任意の非特異 2 次曲面は $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ に同型である．実際に，$\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ を Segre 埋め込みした像 $\sigma_{1,1}(\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1) \subset \mathbb{P}^3$ を考えたとき

$$\sigma_{1,1} : \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \ni ([x_0, x_1], [y_0, y_1]) \mapsto [x_0y_0, x_0y_1, x_1y_0, x_1y_1] \in \mathbb{P}^3$$

によって，$\mathbb{P}^3$ 内の非特異 2 次曲面 $Q : z_0z_3 - z_1z_2 = 0$ が定義される．この曲面に変数変換することで同型が示される．

直線束の同型類全体の集合（Picard 群）$\operatorname{Pic} Q$ は $\operatorname{Pic} Q \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ である．この生成系 $l_1, l_2$ とすると，Intersection Pairing として

$$l_1^2 = 0, l_1.l_2 = 1, l_2^2 = 0$$

の関係がある．さらに計算を行うことで，直線束 $\mathcal{O}_Q(a, b)$ の Cohomology 群は次のように決定される．

**命題 2.1.** 直線束 $\mathcal{O}_Q(a, b)$ $(a \geq b)$ の *Cohomology* 群は次のように決定される：

$$H^0(Q, \mathcal{O}_Q(a, b)) = \begin{cases} (a+1)(b+1) & (a, b \geq 0) \\ 0 & (otherwise) \end{cases},$$

$$H^1(Q, \mathcal{O}_Q(a, b)) = \begin{cases} 0 & (a, b \geq 0) \\ -(a+1)(b+1) & (otherwise) \\ 0 & (a, b \leq -2) \end{cases},$$

$$H^2(Q, \mathcal{O}_Q(a, b)) = \begin{cases} (a+1)(b+1) & (a, b \leq -2) \\ 0 & (otherwise) \end{cases}$$

がいえる．また，$(a, b)$ 型の曲線 $C$ の $Q$ 上でのイデアル層 $\mathcal{I}_{C/Q}$ に対して

$$H^1(Q, \mathcal{I}_{C/Q}) = 0 \iff |a - b| \leq 1$$

となる．

## 2.1　2 次超曲面について：補足

ここでは，一般の 2 次超曲面について補足する．多項式環 $S = k[z_0, \ldots, z_n]$ 内の斉次 2 次多項式

$$\sum_{0 \leq i \leq j \leq n} a_{i,j} z_i z_j$$

[*1] この仮定がないと，対称行列，2 次形式や階数による非特異判定などができなくなる．

[*2] 標数 2 のとき，$\mathbb{P}^3$ 内の任意の非特異 2 次曲面が $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ に同型か否かも調査中である．

で定義される $\mathbb{P}^n$ 内の 2 次曲面 $Q$ について考える．$Q$ には，対称行列 $A = (a_{i,j})$ が対応している．この $A$ の階数によって分類できる．

**命題 2.2.** $\mathbb{P}^n$ 内において，2 次曲面は次の形へ変数変換し帰着できる：

$$Q : z_0^2 + z_1^2 + z_2^2 + \cdots + z_r^2 = 0.$$

$r = n + 1$ のとき，非特異 2 次超曲面で非退化となり，$r < n + 1$ のときは，次のような 2 次錐が構成される：$\mathrm{Sing}\, Q \subset Q$ は $(n - r - 1)$ 次元線形多様体であり，$\mathbb{P}^{r-1}$ 内の非特異 2 次超曲面上の錐として構成できる．さらに

1. $r = 2$ のとき，$\mathrm{Cl}\, Q \cong \mathbb{Z}$
2. $r = 3$ のとき，$\mathrm{Cl}\, Q \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$
3. $r \geq 4$ のとき，$\mathrm{Cl}\, Q \cong \mathbb{Z}$

がいえる．

## 3 Del Pezzo 曲面の概説

この節では，Del Pezzo 曲面について概説する．Del Pezzo 曲面とは，反標準因子が非常に豊富な射影曲面をいう．主な結果は [4] などからの引き戻しである．このような曲面は次のように分類される．

**命題 3.1.** $X$ を次数 $d$ の *Del Pezzo* 曲面とする．このとき，$3 \leq d \leq 9$ である．また，次のことが成り立つ．

1. $d = 9$ のとき，これは射影平面 $\mathbb{P}_k^2$ に同型であり，これは $\mathbb{P}_k^9$ への 3 次の *Veronese* 埋め込みとなる．
2. $d = 8$ のとき，これは射影平面 $\mathbb{P}_k^2$ の 1 点 *Blow-up* または $\mathbb{P}_k^1 \times \mathbb{P}_k^1$ に同型である．
3. $3 \leq d \leq 6$ のとき，これは射影平面 $\mathbb{P}_k^2$ の一般の位置にある $9 - d$ 点 *Blow-up* と同型である．

この Del Pezzo 曲面の直線束の同型類 $\mathrm{Pic}\, X$ について，次のことがいえる．

**命題 3.2.** *Del Pezzo* 曲面の直線束の同型類 $\mathrm{Pic}\, X$ は次のようになる：

1. $d = 9$ のとき，$\mathrm{Pic}\, X \cong \mathbb{Z}l$ である．生成元 $l$ は $l^2 = 1$ となるものである．これは直線を因子としてみたものの同型類である．また超平面切断の同型類 $h$ は (3; ) 型である．
2. $d = 8$ のとき
   (*a*) 射影平面 $\mathbb{P}_k^2$ の 1 点 *Blow-up* では，$\mathrm{Pic}\, X \cong \mathbb{Z}l \oplus \mathbb{Z}e_1$ となる．これらは

$$l^2 = 1, l.e_1 = 0, e_1^2 = -1$$

   が成り立つ．$l$ は射影平面 $\mathbb{P}^2$ 上の直線 $L$ を $X$ 上への引き戻したものの同型類であり，$e_1$

は 1 点 $P_1$ を *Blow-up* することでできる例外因子 $E_1$[*3]の同型類である．また超平面切断の同型類 $h$ は $(3;1)$ 型である．

(*b*) $\mathbb{P}^1_k \times \mathbb{P}^1_k$ のときは，$\operatorname{Pic} X \cong \mathbb{Z}l_1 \oplus \mathbb{Z}l_2$ となる．これらは

$$l_1^2 = l_2^2 = 0, l_1.l_2 = 1$$

が成り立つ．また超平面切断の同型類 $h$ は $(2,2)$ 型である．

*3.* $3 \leq d \leq 7$ のときは，$\operatorname{Pic} X \cong \mathbb{Z}l \oplus \mathbb{Z}e_1 \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}e_r$ となる．これらは

$$l^2 = 1, l.e_i = 0, e_i.e_j = -\delta_{i,j}$$

である．ただし，$r = 9 - d$ とする．また超平面切断の同型類 $h$ は $(3;1,\ldots,1)$ 型である．

**注意 3.3.** 射影平面 $\mathbb{P}^2$ を $r$ 点 *Blow-up* して構成される *Del Pezzo* 曲面上の $(a;b_1,\ldots,b_r)$ 型の有効因子は，$\mathbb{P}^2$ 上の曲線 $C$ で次のようなものに対応している：$C$ は次数 $a$ で，各点 $P_i$ を $b_i$ 重点としてもつ曲線である．このことから，ある完備線形系の部分線形系に対応していることがいえる．

Del Pezzo 曲面上の因子 $C$ の算術種数 $p_a(C)$，そして射影空間内での曲線（有効因子）としての次数 $\deg C$ については，次のことがいえる．

**命題 3.4.** *Del Pezzo* 曲面上の因子 $C$ の算術種数 $p_a(C)$ および次数 $\deg C$ は次のようになる．

*1.* $d = 9$ のとき，$C$ を $(a;)$ 型の因子とすると

$$p_a(C) = \binom{a-1}{2}, \deg C = 3a$$

である．

*2.* $d = 8$ のとき

(*a*) 射影平面 $\mathbb{P}^2_k$ の 1 点 *Blow-up* では，$C$ を $(a;b_1)$ 型の因子とすると

$$p_a(C) = \binom{a-1}{2} - \binom{b_1}{2}, \deg C = 3a - b_1$$

である．

(*b*) $\mathbb{P}^1_k \times \mathbb{P}^1_k$ のときは，$C$ を $(a,b)$ 型の因子とすると

$$p_a(C) = (a-1)(b-1), \deg C = 2(a+b)$$

である．

*3.* $3 \leq d \leq 7$ のときは，$C$ を $(a;b_1,\ldots,b_r)$ 型の因子とすると

$$p_a(C) = \binom{a-1}{2} - \sum_{i=1}^{r} \binom{b_i}{2}, \deg C = 3a - b_1 - \cdots - b_r$$

である．ただし，$r = 9 - d$ とする．また

[*3] $E$ が例外直線とは，$E^2 = -1$ かつ $E \cong \mathbb{P}^1$ が成り立つものである．曲面上の 1 点を Blow-up することで構成される．

# 4　2 次曲面・Del Pezzo 曲面上にある曲線の例

この節では [8][9] を基に，$\mathbb{P}^3$ 内の非特異 2 次曲面および Del Pezzo 曲面上ある曲線の例を紹介する．

## 4.1　正規有理曲線（Rational Normal Curve）

$\mathbb{P}^1$ の斉次座標系を $[x_0, x_1]$ とする．すなわち，$H^0(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}(1)) = \langle x_0, x_1 \rangle$ とする．射影直線 $\mathbb{P}^1$ も次数 $n$ の因子 $D$ による大域切断

$$H^0(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}(D)) = \langle x_0^n, x_0^{n-1}x_1, \ldots, x_0x_1^{n-1}, x_1^n \rangle$$

を考える．この基底により構成される射 $\varphi_D : \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^n$ の閉埋め込みであり，その像 $C = \varphi_D(\mathbb{P}^1)$ は $n$ の有理曲線となる．これを正規有理曲線という．この曲線の定義イデアル $I_C$ は $\begin{pmatrix} n \\ 2 \end{pmatrix}$ 個の 2 次斉次多項式で生成される．別の表現として曲線 $C$ の定義イデアル $I_C$ は $2 \times n$ 行列

$$M_{n,1} = \begin{pmatrix} z_0 & z_1 & z_2 & \cdots & z_{n-1} \\ z_1 & z_2 & z_3 & \cdots & z_n \end{pmatrix}$$

の $2 \times 2$ 小行列式全体で生成されるイデアル $I_2(M_{n,1})$ に等しい．これは，$\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^{n-1}$ を Segre 埋め込みした射影多様体を線形多様体で切断したものである．実際に $X = \sigma_{1,1}(\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^{n-1})$ の定義イデアル $I_X$ は $2 \times n$ 行列

$$M = \begin{pmatrix} z_0 & z_1 & z_2 & \cdots & z_{n-1} \\ z_n & z_{n+1} & z_{n+2} & \cdots & z_{2n-1} \end{pmatrix}$$

の $2 \times 2$ 小行列式全体で生成されるイデアル $I_2(M)$ となる．さらに，線形多様体 $H$ は $n$ 次元で

$$H : z_{n+i-1} - z_i = 0 \quad (i = 1, \ldots, n-1)$$

で定義される．これより $C = X \cap H$ および，$I_C = I_X + I_H$ がいえる．

正規有理曲線 $C \subset \mathbb{P}^n$ の極小自由分解については，Eagon-Northcott 複体が対応する：

$$0 \longrightarrow S(-n)^{\oplus(n-1)} \longrightarrow \cdots \longrightarrow S(-r-1)^{\oplus r\begin{pmatrix} n \\ r+1 \end{pmatrix}} \longrightarrow \cdots$$

$$\longrightarrow S(-2)^{\oplus\begin{pmatrix} n \\ 2 \end{pmatrix}} \longrightarrow S \longrightarrow S_C \longrightarrow 0.$$

ただし，$r \geq 1$ とする．これを Betti 数 $\beta_{i,j}$ で表すと，$\beta_{0,0} = 1$

$$\beta_{i,i+1} = i\begin{pmatrix} n \\ i+1 \end{pmatrix} \ (1 \leq i \leq n-1)$$

であり，それ以外は $\beta_{i,j} = 0$ である．

**例 4.1.** 正規有理曲線の簡単な例として，$v_2 : \mathbb{P}^1 \ni [x_0, x_1] \mapsto [x_0^2, x_0x_1, x_1^2] \in \mathbb{P}^2$ を考えると，平面 2 次曲線 $C : z_0z_2 - z_1^2 = 0$ が定義できる．

**例 4.2.** 同様に，$v_3 : \mathbb{P}^1 \ni [x_0, x_1] \mapsto [x_0^3, x_0^2x_1, x_0x_1^2, x_1^3] \in \mathbb{P}^3$ を考えると，捩れ 3 次曲線 $C$ が定義できる．これは $C : z_0z_2 - z_1^2 = 0, z_0z_3 - z_1z_2 = 0, z_1z_3 - z_2^2 = 0$ により定義される．

より一般的な結果として，Rational Normal Scroll の極小自由分解を考えることができる．Rational Normal Scroll とは，$\mathbb{P}^1$ 上の階数 $n$ のベクトル束 $\mathcal{E}$ の射影化 $\pi : \mathbb{P}(\mathcal{E}) \to \mathbb{P}^1$ をある射影空間 $\mathbb{P}^N$ に埋め込んだものである．具体的には

$$\mathcal{E} = \mathcal{O}(a_1) \oplus \cdots \oplus \mathcal{O}(a_n)\ \ (0 < a_1 \leq \cdots \leq a_n)$$

に対して，$N = \sum_{i=1}^n a_i + n - 1$ とおいて埋め込むものである．$X = \mathbb{P}(\mathcal{E})$ の定義イデアル $I_X$ を考える．$D = \sum_{i=1}^n a_i + n$ として $2 \times D$ 行列

$$M_{D,1} = \left( \begin{array}{ccc|ccc|c|ccc} z_{1,0} & \cdots & z_{1,a_1-1} & z_{2,0} & \cdots & z_{2,a_2-1} & \cdots & z_{n,0} & \cdots & z_{n,a_n-1} \\ z_{1,1} & \cdots & z_{1,a_1} & z_{2,1} & \cdots & z_{2,a_2} & \cdots & z_{n,1} & \cdots & z_{n,a_n} \end{array} \right)$$

の $2 \times 2$ 小行列式全体で生成されるイデアル $I_2(M_{D,1})$ に等しい．$S = k[z_{1,0}, \ldots, z_{n,a_n}]$ における定義イデアル $I_X$ の極小自由分解は

$$0 \longrightarrow S(-N)^{\oplus(N-1)} \longrightarrow \cdots \longrightarrow S(-i-1)^{\oplus i\begin{pmatrix} N \\ i+1 \end{pmatrix}} \longrightarrow \cdots$$

$$\longrightarrow S(-2)^{\oplus\begin{pmatrix} N \\ 2 \end{pmatrix}} \longrightarrow S \longrightarrow S_X \longrightarrow 0.$$

である．

**注意 4.3.** 階数 1 のベクトル束 $\mathcal{O}(a_1)(a_1 > 0)$ のとき，$X = \mathbb{P}(\mathcal{O}(a_1)) \cong \mathbb{P}^1$ であり，埋め込みは $X \subset \mathbb{P}^{a_1}$ となるから，正規有理曲線を意味する．

**注意 4.4.** 階数 2 のベクトル束 $\mathcal{E} = \mathcal{O}(a_1) \oplus \mathcal{O}(a_2)(0 < a_1 \leq a_2)$ のとき，$\pi : X = \mathbb{P}(\mathcal{E}) \to \mathbb{P}^1$ に対して，$\mathcal{E}' = \mathcal{E} \otimes \mathcal{O}(-a_2)$ とすると，$X \cong \mathbb{P}(\mathcal{E}')$ となる．これは，*Hirzebruch* 曲面に同型であることがいえる．

## 4.2 正規楕円曲線（Elliptic Normal Curve）

$C$ を楕円曲線 $(g = 1)$ とし，$P_0 \in C$ とする．$C$ 上の次数 $n$ の因子 $D = nP_0(n \geq 3)$ に対応する埋め込み $\varphi_D : C \to \mathbb{P}^{n-1}$ における像は $n$ 次曲線となる．これを正規楕円曲線という．$H^0(C, \mathcal{O}_C(P_0) = \langle 1 \rangle, H^0(C, \mathcal{O}_C(2P_0)) = \langle 1, f \rangle, H^0(C, \mathcal{O}_C(3P_0)) = \langle 1, f, g \rangle$ とすると Riemann-Roch の定理より

$$H^0(C, \mathcal{O}_C(D)) = \langle 1, f, \ldots, f^i, g, gf, \ldots, gf^j \rangle\ \ (0 \leq i \leq \lfloor n/2 \rfloor, 0 \leq j \leq \lfloor (n-3)/2 \rfloor)$$

と基底を選ぶことができる．$n=3$ のとき，$\mathbb{P}^2$ 内の非特異 3 次曲線が得られる．$n=4$ のときは，4 次曲線となり，2 つの 2 次曲面の完全交叉となる．

この関係式を導出するために，Rational Normal Scroll Surface を構成する．上記の基底の構成を利用して

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & \cdots & f^{a-1} & g & \cdots & f^{b-1} \\ f & \cdots & f^a & gf & \cdots & f^b \end{array}\right)$$

を考えると，$2\times(a+b)$ 行列

$$M(\mathcal{O}_C(2P_0),\mathcal{O}_C((n-2)P_0))=\left(\begin{array}{ccc|ccc} z_{1,0} & \cdots & z_{1,a-1} & z_{2,0} & \cdots & z_{2,b-1} \\ z_{1,1} & \cdots & z_{1,a} & z_{2,1} & \cdots & z_{2,b} \end{array}\right)$$

が構成される．ただし，$a=\lfloor n/2\rfloor, b=\lfloor (n-3)/2\rfloor$ であり，$\lfloor n/2\rfloor+1+\lfloor (n-3)/2\rfloor+1=n$ である．この $2\times 2$ 小行列式全体で定義される $\mathbb{P}^{n-1}(n\geq 4)$ 内の射影曲面が定義できる．

1. $n=4$ のときは，$\pi:\mathbb{P}(\mathcal{O}\oplus\mathcal{O}(2))\to Q_0\subset\mathbb{P}^3$（$Q_0$ は 2 次錐）となる．[*4]
2. $n\geq 5$ のとき，埋め込み $\varphi:\mathbb{P}(\mathcal{O}(a)\oplus\mathcal{O}(b)))\to X\subset\mathbb{P}^{n-1}$ が構成できて，$X$ は非特異射影曲面（次数 $n-1$ の Hirzebruch 曲面）となる．

先述の通り $X$ は Hirzebruch 曲面に同型であり，その Picard 群は

$$\operatorname{Pic}X\cong\mathbb{Z}h\oplus\mathbb{Z}f$$

で与えられる．ただし，$h$ は超平面切断 $H(\cong\mathbb{P}^1)$ に対応する直線束 $\mathcal{O}_X(1)$ の同型類，$f$ は $\pi:X\to\mathbb{P}^1$ 上のファイバーに対応する直線束 $\mathcal{O}_X(F)(F\cong\mathbb{P}^1)$ の同型類であり，$h^2=n-1, h.f=1, f^2=0$ である．この曲面上において，正規楕円曲線 $C$ に対応する $X$ 上の因子は $C=2H-(n-3)F$ である．すなわち，$I_X$ の生成系から，$I_C$ の生成系を構成することを考える．より一般的には，$X$ の極小自由分解を利用して，$C$ の極小自由分解を構成することとなる．$X$ の斉次座標環 $S_X$ 上での $C$ の定義イデアルを $I_{C/X}$ とし，その層化を考えると

$$\widetilde{I_{C/X}}=\mathcal{O}_X((n-3)F-2H)=\mathcal{O}_X((n-3)F)(-2)$$

を意味する．これより，$I_{C/X}$ の極小自由分解は

$$\bigoplus_{m\geq 0}H^0(X,\mathcal{O}_X((n-3)F)(m))$$

の極小自由分解を $-2$ シフトしたものだと考えられる．これは Eagon-Northcott 複体の Mapping Cone として構成することができる．

**定理 4.5.** $C\subset\mathbb{P}^n(n\geq 3)$ を $n+1$ 次の正規楕円曲線とする．このとき，$S=k[z_0,\dots,z_n]$ における $X$ の極小自由分解は次で与えられる．

[*4] この射は，特異点 $O\in Q_0$ を中心とした Blow-up を意味する．

$$
\begin{aligned}
0 \to & S(-n-1) \to S(-n+1)^{\oplus (n-2)+\begin{pmatrix} n-1 \\ 2 \end{pmatrix}} \to S(-i-1)^{\oplus i\begin{pmatrix} n-1 \\ i+1 \end{pmatrix}+(n-i-1)\begin{pmatrix} n-1 \\ i-1 \end{pmatrix}} \to \cdots \\
\to & S(-2)^{\oplus \begin{pmatrix} n-1 \\ 2 \end{pmatrix}+(n-2)} \to S \to S_C \to 0.
\end{aligned}
$$

また，*Betti* 数 $\beta_{i,j}$ について，$\beta_{0,0}=1$ であり

$$\beta_{i,i+1} = i\binom{n-1}{i+1} + (n-i-1)\binom{n-1}{i-1} \, (1 \le i \le n-2), \beta_{n-1,n+1} = 1$$

であり，その他は $\beta_{i,j}=0$ となる．

## 5　結果の概略

この節では，[1][2] の結果の概略を述べる．まず射影曲面 $X$ 上の曲線 $C$ が ACM（Arithmetically Cohen-Macaulay (for short:ACM)）な曲線であるとは

$$H^1(X, \mathcal{I}_{C/X}(m)) = 0 \ \ (m \in \mathbb{Z})$$

が成り立つことである．このことを基にして，まずは非特異 2 次曲面 $Q$ 上の分類について述べる．

**補題 5.1.** 非特異 2 次曲面 $Q$ 上の $(a,b)$ 型の因子 $C$ が *ACM* であるとは，$|a-b| \le 1$ となることと同値である．

次に，Del Pezzo 曲面上の因子 $C$ の分類である．これは次の手順で進める：

1. 射影平面 $\mathbb{P}^2$ の 3 次の Veronese 埋め込み $v_3 : \mathbb{P}^2 \to \mathbb{P}^9$. この場合は，すべての因子が ACM である．
2. 射影直線の直積 $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ の埋め込み $\sigma_{2,2}(\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1) \subset \mathbb{P}^8$ においては，非特異 2 次曲面の場合と同じように，次のことがいえる：
   $(a,b)$ 型の因子 $C$ が ACM であるとは，$|a-b| \le 2$ となることと同値である．
3. 射影平面 $\mathbb{P}^2$ の $r$ 点 Blow-up（$1 \le r \le 6$）については，次の方法で分類を考える．$\pi : X \to \mathbb{P}^2$ を $r$ 点 Blow-up とし，$\mathcal{L}$ を $(a; b_1, \ldots, b_r)$ 型の因子に対応する $X$ 上の直線束とする．このとき，$\mathbb{P}^2$ 上の層の完全系列が存在する：

$$0 \to \pi_* \mathcal{L} \to \mathcal{O}(a) \to \bigoplus_{i=1}^{r} \mathcal{O}_{P_i}/\mathcal{M}_{P_i}^{b_i} \to 0.$$

   これにより評価すると，表 1 の結果を得る．

[*5]

[*5] [1][2] は極小自由分解についての結果をまとめている．non-ACM タイプについては，層の極小自由分解と次数付き加群の極小自由分解との違いをまとめた．

| $r=6$ | the types of an invertible sheaf $\mathcal{L}$ | $r=5$ | the types of an invertible sheaf $\mathcal{L}$ |
|---|---|---|---|
| $(A_{6,1})$ | $(3m;m,m,m,m,m,m)\ (m\in\mathbb{Z})$ | $(A_{5,1})$ | $(3m;m,m,m,m,m)\ (m\in\mathbb{Z})$ |
| $(A_{6,2})$ | $(3m;m+1,m,m,m,m,m)\ (m\in\mathbb{Z})$ | $(A_{5,2})$ | $(3m;m+1,m,m,m,m)\ (m\in\mathbb{Z})$ |
| $(A_{6,3})$ | $(3m;m,m,m,m,m,m-1)\ (m\in\mathbb{Z})$ | $(A_{5,3})$ | $(3m;m,m,m,m,m-1)\ (m\in\mathbb{Z})$ |
| $(A_{6,4})$ | $(3m;m+1,m,m,m,m,m-1)\ (m\in\mathbb{Z})$ | $(A_{5,4})$ | $(3m;m+1,m,m,m,m-1)\ (m\in\mathbb{Z})$ |
| $(B_{6,1})$ | $(3m+1;m,m,m,m,m,m)\ (m\in\mathbb{Z})$ | $(B_{5,1})$ | $(3m+1;m,m,m,m,m)\ (m\in\mathbb{Z})$ |
| $(B_{6,2})$ | $(3m+1;m+1,m,m,m,m,m)\ (m\in\mathbb{Z})$ | $(B_{5,2})$ | $(3m+1;m+1,m,m,m,m)\ (m\in\mathbb{Z})$ |
| $(B_{6,3})$ | $(3m+1;m+1,m+1,m,m,m,m)\ (m\in\mathbb{Z})$ | $(B_{5,3})$ | $(3m+1;m+1,m+1,m,m,m)\ (m\in\mathbb{Z})$ |
| $(B_{6,4})$ | $(3m+1;m+1,m+1,m+1,m,m,m)\ (m\in\mathbb{Z})$ | $(B_{5,4})$ | $(3m+1;m+1,m+1,m+1,m,m)\ (m\in\mathbb{Z})$ |
| $(C_{6,1})$ | $(3m+2;m+1,m+1,m+1,m+1,m+1,m+1)\ (m\in\mathbb{Z})$ | $(C_{5,1})$ | $(3m+2;m+1,m+1,m+1,m+1,m+1)\ (m\in\mathbb{Z})$ |
| $(C_{6,2})$ | $(3m+2;m+1,m+1,m+1,m+1,m+1,m)\ (m\in\mathbb{Z})$ | $(C_{5,2})$ | $(3m+2;m+1,m+1,m+1,m+1,m)\ (m\in\mathbb{Z})$ |
| $(C_{6,3})$ | $(3m+2;m+1,m+1,m+1,m+1,m,m)\ (m\in\mathbb{Z})$ | $(C_{5,3})$ | $(3m+2;m+1,m+1,m+1,m,m)\ (m\in\mathbb{Z})$ |
| $(C_{6,4})$ | $(3m+2;m+1,m+1,m+1,m,m,m)\ (m\in\mathbb{Z})$ | $(C_{5,4})$ | $(3m+2;m+1,m+1,m,m,m)\ (m\in\mathbb{Z})$ |
| | | | |
| $r=4$ | the types of an invertible sheaf $\mathcal{L}$ | $r=3$ | the types of an invertible sheaf $\mathcal{L}$ |
| $(A_{4,1})$ | $(3m;m,m,m,m)\ (m\in\mathbb{Z})$ | $(A_{3,1})$ | $(3m;m,m,m)\ (m\in\mathbb{Z})$ |
| $(A_{4,2})$ | $(3m;m+1,m,m,m)\ (m\in\mathbb{Z})$ | $(A_{3,2})$ | $(3m;m+1,m,m)\ (m\in\mathbb{Z})$ |
| $(A_{4,3})$ | $(3m;m,m,m,m-1)\ (m\in\mathbb{Z})$ | $(A_{3,3})$ | $(3m;m,m,m-1)\ (m\in\mathbb{Z})$ |
| $(A_{4,4})$ | $(3m;m+1,m,m,m-1)\ (m\in\mathbb{Z})$ | $(A_{3,4})$ | $(3m;m+1,m,m-1)\ (m\in\mathbb{Z})$ |
| $(B_{4,1})$ | $(3m+1;m,m,m,m)\ (m\in\mathbb{Z})$ | $(B_{3,1})$ | $(3m+1;m,m,m)\ (m\in\mathbb{Z})$ |
| $(B_{4,2})$ | $(3m+1;m+1,m,m,m)\ (m\in\mathbb{Z})$ | $(B_{3,2})$ | $(3m+1;m+1,m,m)\ (m\in\mathbb{Z})$ |
| $(B_{4,3})$ | $(3m+1;m+1,m+1,m,m)\ (m\in\mathbb{Z})$ | $(B_{3,3})$ | $(3m+1;m+1,m+1,m)\ (m\in\mathbb{Z})$ |
| $(B_{4,4})$ | $(3m+1;m+1,m+1,m+1,m)\ (m\in\mathbb{Z})$ | $(B_{3,4})$ | $(3m+1;m+1,m+1,m+1)\ (m\in\mathbb{Z})$ |
| $(C_{4,1})$ | $(3m+2;m+1,m+1,m+1,m+1)\ (m\in\mathbb{Z})$ | $(C_{3,1})$ | $(3m+2;m+1,m+1,m+1)\ (m\in\mathbb{Z})$ |
| $(C_{4,2})$ | $(3m+2;m+1,m+1,m+1,m)\ (m\in\mathbb{Z})$ | $(C_{3,2})$ | $(3m+2;m+1,m+1,m)\ (m\in\mathbb{Z})$ |
| $(C_{4,3})$ | $(3m+2;m+1,m+1,m,m)\ (m\in\mathbb{Z})$ | $(C_{3,3})$ | $(3m+2;m+1,m,m)\ (m\in\mathbb{Z})$ |
| $(C_{4,4})$ | $(3m+2;m+1,m,m,m)\ (m\in\mathbb{Z})$ | $(C_{3,4})$ | $(3m+2;m,m,m)\ (m\in\mathbb{Z})$ |
| | | | |
| $r=2$ | the types of an invertible sheaf $\mathcal{L}$ | $r=1$ | the types of an invertible sheaf $\mathcal{L}$ |
| $(A_{2,1})$ | $(3m;m,m)\ (m\in\mathbb{Z})$ | $(A_{1,1})$ | $(3m;m)\ (m\in\mathbb{Z})$ |
| $(A_{2,2})$ | $(3m;m+1,m)\ (m\in\mathbb{Z})$ | $(A_{1,2})$ | $(3m;m+1)\ (m\in\mathbb{Z})$ |
| $(A_{2,3})$ | $(3m;m,m-1)\ (m\in\mathbb{Z})$ | $(A_{1,3})$ | $(3m;m-1)\ (m\in\mathbb{Z})$ |
| $(A_{2,4})$ | $(3m;m+1,m-1)\ (m\in\mathbb{Z})$ | | |
| $(B_{2,1})$ | $(3m+1;m,m)\ (m\in\mathbb{Z})$ | $(B_{1,1})$ | $(3m+1;m)\ (m\in\mathbb{Z})$ |
| $(B_{2,2})$ | $(3m+1;m+1,m)\ (m\in\mathbb{Z})$ | $(B_{1,2})$ | $(3m+1;m+1)\ (m\in\mathbb{Z})$ |
| $(B_{2,3})$ | $(3m+1;m+1,m+1)\ (m\in\mathbb{Z})$ | | |
| $(C_{2,1})$ | $(3m+2;m+1,m+1)\ (m\in\mathbb{Z})$ | $(C_{1,1})$ | $(3m+2;m+1)\ (m\in\mathbb{Z})$ |
| $(C_{2,2})$ | $(3m+2;m+1,m)\ (m\in\mathbb{Z})$ | $(C_{1,2})$ | $(3m+2;m)\ (m\in\mathbb{Z})$ |
| $(C_{2,3})$ | $(3m+2;m,m)\ (m\in\mathbb{Z})$ | | |
| | | | |
| $r=0$ | the types of an invertible sheaf $\mathcal{L}$ | $X=\sigma_{2,2}(\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^1)$ | the types of an invertible sheaf $\mathcal{L}$ |
| $(A_{0,1})$ | $(3m)\ (m\in\mathbb{Z})$ | $(D_{0,1})$ | $(2m,2m)\ (m\in\mathbb{Z})$ |
| $(B_{0,1})$ | $(3m+1)\ (m\in\mathbb{Z})$ | $(E_{0,1})$ | $(2m+1,2m)\ (m\in\mathbb{Z})$ |
| $(C_{0,1})$ | $(3m+2)\ (m\in\mathbb{Z})$ | $(F_{0,1})$ | $(2m+1,2m+1)\ (m\in\mathbb{Z})$ |
| | | $(G_{0,1})$ | $(2m+2,2m)\ (m\in\mathbb{Z})$ |

表 1　ACM line bundle の型

# 参考文献

[1] S. Yashiro. Minimal free resolution of acm curves on del pezzo surfaces. *Preprint.*

[2] S. Yashiro. Minimal free resolution of non-acm curves on del pezzo surfaces. *Preprint.*

[3] P. Griffiths and J. Harris. *Principles of Algebraic Geometry.* Wiley Classics Library. Wiley, 1978.

[4] R. Hartshorne. *Algebraic Geometry.* Graduate Texts in Mathematics. Springer, 1977.

[5] Takao Fujita. *Classification theory of polarized varieties*, volume 155. Cambridge University Press, 1990.

[6] Le Tuan Hoa, Jürgen Stückrad, and Wolfgang Vogel. Towards a structure theory for projective varieties of degree = codimension + 2. *Journal of Pure and Applied Algebra*, 71(2):203–231, 1991. Special Issue In Honor of H. Matsumura.

[7] Le Tuan Hoa. On minimal free resolutions of projective varieties of degree = codimension + 2. *Journal of Pure and Applied Algebra*, 87(3):241–250, 1993.

[8] D. Eisenbud. *The Geometry of Syzygies: A Second Course in Algebraic Geometry and Commutative Algebra.* Graduate Texts in Mathematics. Springer New York, 2006.

[9] J. Harris. *Algebraic Geometry: A First Course.* Graduate Texts in Mathematics. Springer, 1992.