Koornwinder 多項式の Littlewood-Richardson 係数

名古屋大学大学院 多元数理科学研究科
山口 航平 (Kohei YAMAGUCHI)

概要

Koornwinder 多項式は Askey-Wilson 多項式の多変数版として導入された六つのパラメータを持つ q 直交多項式系であり, Macdonald-Cherednik 理論により $(C_n^\vee, C_n)$ 型アフィンルート系に付随した Macdonald 多項式として理解されている. 講演では Koornwinder 多項式の積に関する構造定数, 即ち Littlewood-Richardson 係数の明示公式を紹介する. 非振れ型の Macdonald 多項式については Yip が alcove walk と呼ばれる組合せ論的対象を用いた Littlewood-Richardson 係数公式を導出しているが, ちょうど我々の公式はその $(C_n^\vee, C_n)$ 型類似になっている.

1　はじめに

一変数の q 直交多項式として Askey-Wilson 多項式が良く知られている. これは q の他に a, b, c, d と書かれる四つのパラメータを持っていて, パラメータの特殊化で Jacobi 多項式の様々な q 類似を復元する.

Koornwinder は, Askey-Wildon 多項式の n 変数版である q 直交多項式系を導入した. 本論文ではこれを Koornwinder 多項式と呼ぶ. $n = 1$ なら Askey-Wilson 多項式そのものであり, $n \geq 2$ なら q の他に a, b, c, d, t という五つのパラメータを含む. またパラメータを特殊化することで BC_n 型, B_n 型そして C_n 型の Macdonald 多項式が復元できる.

さて, ([M03, Chap. 1] の意味での) アフィンルート系 に付随して得られる q 差分作用素族の同時固有関数である q 直交多項式 P_λ が構成できた. これが Macdonald 多項式であり, その構成はアフィン Hecke 環を基礎とした Macdonald-Cherednik 理論 [M03] として知られている.

Koornwinder 多項式に話を戻そう. 被約でないアフィンルート系のうち $(C_n^\vee, C_n)$ 型を考えると, その場合の Macdonald 多項式として Koornwinder 多項式を構成できることが野海 [野 95], Sahi [Sa99], Stokman [S00] らの研究により明らかになっている. 結果的に, Koornwinder 多項式は Macdonald 多項式のうち最も多くのパラメータを含むものである, という位置づけがなされた.

Macdonald 多項式に関する基本的な問題はいくつかあるが, その一つとして Macdonald 多項式の Littlewood-Richardson 係数, すなわち「Macdonald 多項式の積の展開係数の明示公式を与えよ」という問題がある. この問題は長らく未解決問題であったが, これに大きな進展をもたらしたのが Yip [Y12] である. そこでは非振れ型ルート系の場合に構造係数 $c_{\lambda,\mu}^{\nu}$ のアル

コーブ経路 (alcove walk) という組合せ論的対象による明示公式が与えられ [Y12, Theorem 4.4], また λ が minuscule ウェイトの場合に簡略化した公式が導出され [Y12, Corollary 4.7], 特に A 型の Pieri 係数の Macdonald 公式が復元された [Y12, Theorem 4.9]. 本稿では, 捩れ型のアフィンルート系 $(C_n^\vee, C_n)$ 型に付随する Macdonald 多項式, すなわち Koornwinder 多項式の Littlewood-Richardson 係数のアルコーブ経路を用いた明示公式について概説する [Y20, Theorem 3.4.2].

2 ルート系の設定

2.1 C_n 型ルート系

C_n 型のルートデータを $(R, \mathfrak{h}_\mathbb{Z}^*, R^\vee, \mathfrak{h}_\mathbb{Z})$ と書く. つまり $\mathfrak{h}_\mathbb{Z} = \bigoplus_{i=1}^n \mathbb{Z}\epsilon_i^\vee$ と $\mathfrak{h}_\mathbb{Z}^* = \bigoplus_{i=1}^n \mathbb{Z}\epsilon_i$ は階数 n の格子で, それらに非退化双線形型式 $\langle\ ,\ \rangle : \mathfrak{h}_\mathbb{Z} \times \mathfrak{h}_\mathbb{Z}^* \to \mathbb{Z}$, $\langle \epsilon_i^\vee, \epsilon_j \rangle = \delta_{i,j}$ が与えられている. 以下ではこの双線形型式により $\mathfrak{h}_\mathbb{Z}^*$ と $\mathfrak{h}_\mathbb{Z}$ を, また ϵ_i と $\epsilon_i^\vee$ を同一視する. ルートの集合 R と余ルートの集合 $R^\vee$ は $R = \{\pm\epsilon_i \pm \epsilon_j \mid i \neq j\} \cup \{\pm 2\epsilon_i \mid i = 1, \dots, n\} \subset \mathfrak{h}_\mathbb{Z}^*, R^\vee = \{\pm\epsilon_i \pm \epsilon_j \mid i \neq j\} \cup \{\pm\epsilon_i \mid i = 1, \dots, n\} \subset \mathfrak{h}_\mathbb{Z}$ である. 本稿では正ルートの集合 $R_+ \subset R$ と正余ルートの集合 $R_+^\vee \subset R^\vee$ を $R_+ := \{\epsilon_i \pm \epsilon_j \mid i < j\} \cup \{2\epsilon_i \mid i = 1, \dots, n\}$, $R_+^\vee := \{\epsilon_i \pm \epsilon_j \mid i < j\} \cup \{\epsilon_i \mid i = 1, \dots, n\}$ にとる. このとき $R = R_+ \sqcup -R_+$, $R^\vee = R_+^\vee \sqcup -R_+^\vee$ となる. また単純ルート $\alpha_i \in R$ $(i = 1, \dots, n)$ を $\alpha_1 := \epsilon_1 - \epsilon_2$, $\dots$, $\alpha_{n-1} := \epsilon_{n-1} - \epsilon_n$, $\alpha_n := 2\epsilon_n$ で定める. ルート $\alpha \in R$ に対して余ルート $\alpha^\vee \in R^\vee$ を $\alpha^\vee := 2\alpha/\langle \alpha, \alpha \rangle \in \mathfrak{h}_\mathbb{Z}^* = \mathfrak{h}_\mathbb{Z}$ で定める. 単純ルートに対応する余ルート達は $\alpha_1^\vee = \epsilon_1 - \epsilon_2, \dots, \alpha_{n-1}^\vee = \epsilon_{n-1} - \epsilon_n, \alpha_n^\vee = \epsilon_n$ である. $\alpha_i^\vee$ 達を単純余ルートという.

各 $\alpha \in R$ に対して, $\mathfrak{h}_\mathbb{R}^* = \mathfrak{h}_\mathbb{Z}^* \otimes_\mathbb{Z} \mathbb{R}$ の超平面 $H_\alpha := \{x \in \mathfrak{h}_\mathbb{R}^* \mid \langle \alpha^\vee, x \rangle = 0\}$ に関する鏡映を s_α と書く. 即ち $s_\alpha.x := x - \langle \alpha^\vee, x \rangle \alpha$, $x \in \mathfrak{h}_\mathbb{R}^*$ である. また $i = 1, \dots, n$ に対して $s_i := s_{\alpha_i}$ と書く. C_n 型の有限 Weyl 群 W_0 とは, $s_1, \dots, s_n$ が生成する $\mathrm{GL}(\mathfrak{h}_\mathbb{R}^*)$ の部分群であった.

次に C_n 型ルート系のウェイトの記号を導入する. $\omega_i := \epsilon_1 + \dots + \epsilon_i \in \mathfrak{h}_\mathbb{Z}^* (i = 1, \dots, n)$ と定義し, これらを基本ウェイトと呼ぶ. また $\omega_i^\vee := \epsilon_1 + \dots + \epsilon_i$ $(i = 1, \dots, n-1)$, $\omega_n^\vee := \frac{1}{2}(\epsilon_1 + \dots + \epsilon_n)$ を基本余ウェイトという. 最後にルート格子 Q とウェイト格子 P を $Q := \mathbb{Z}\alpha_1 \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}\alpha_n \subset \mathfrak{h}_\mathbb{Z}^* = P := \mathbb{Z}\omega_1 \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}\omega_n \subset \mathfrak{h}_\mathbb{R}^*$ で定める. 有限 Weyl 群 $W_0 \subset \mathrm{GL}(\mathfrak{h}_\mathbb{R}^*)$ の $\mathfrak{h}_\mathbb{R}^*$ への作用はウェイト格子 $P = \mathfrak{h}_\mathbb{Z}^*$ を保つ. この作用を, $w \in W_0$, $\lambda \in P$ に対して $\lambda \mapsto w.\lambda$ と書く.

2.2 $(C_n^\vee, C_n)$ 型アフィンルート系

C_n 型ルート系のウェイト格子 $P = \mathfrak{h}_\mathbb{Z}^*$ の群環を $t(P)$ と書き, $\lambda \in P$ に対する元を $t(\lambda) \in t(P)$ と書く. つまり $t(P) = \{t(\lambda) \mid \lambda \in P\}$, $t(\lambda)t(\mu) = t(\lambda + \mu)$ $(\lambda, \mu \in P)$ である. $\mathfrak{h}_\mathbb{Z}^*$ の拡大 $\widetilde{\mathfrak{h}}_\mathbb{Z}^* := \mathfrak{h}_\mathbb{Z}^* \oplus \mathbb{Z}\delta$ とその係数拡大 $\widetilde{\mathfrak{h}}_\mathbb{R}^* := \widetilde{\mathfrak{h}}_\mathbb{Z}^* \otimes_\mathbb{Z} \mathbb{R}$ を考える. $t(P)$ の $\widetilde{\mathfrak{h}}_\mathbb{R}^*$ への作用を $t(\lambda).(\mu + m\delta) := \mu + (m - \langle \mu, \lambda \rangle)\delta$, $\mu + m\delta \in \widetilde{\mathfrak{h}}_\mathbb{R}^* = \mathfrak{h}_\mathbb{R}^* \oplus \mathbb{R}\delta$ で定義する. このとき有限 Weyl 群の元 $w \in W_0$ と $t(\lambda) \in t(P)$ の $\mathrm{GL}(\widetilde{\mathfrak{h}}_\mathbb{R}^*)$ における交換関係は $wt(\lambda)w^{-1} = t(w.\lambda)$ である. $t(P)$ と W_0 で生成され

る $\mathrm{GL}(\widetilde{\mathfrak{h}}_{\mathbb{R}}^*)$ の部分群 W を拡大アフィン Weyl 群と呼ぶ. 即ち $W := t(P) \rtimes W_0 \subset \mathrm{GL}(\widetilde{\mathfrak{h}}_{\mathbb{R}}^*)$ である. 元 $s := t(\epsilon_1)s_{2\epsilon_1} \in W$ の $P = \mathfrak{h}_{\mathbb{Z}}^*$ への作用は $s.\epsilon_1 = \delta - \epsilon_1, \quad s.\epsilon_i = \epsilon_i \quad (i = 2, \dots, n)$ となるが, これはアフィンルート $\alpha_0 := \delta - 2\epsilon_1 \in \widetilde{\mathfrak{h}}_{\mathbb{Z}}^*$ が決める超平面 $H_{\alpha_0} := \{x \in \mathfrak{h}_{\mathbb{R}}^* \mid \langle \alpha_0^\vee, x\rangle = 0\}$ に関する鏡映 $s_0 := s_{\alpha_0}$ と同じものである. ここで $\alpha_0^\vee$ は $\mathfrak{h}_{\mathbb{R}} := \mathfrak{h}_{\mathbb{Z}} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$ の 1 次元拡大 $\widetilde{\mathfrak{h}}_{\mathbb{R}} := \mathfrak{h}_{\mathbb{R}} \oplus \mathbb{R}c$ の元 $\alpha_0^\vee := \frac{1}{2}c - \epsilon_1$ であり, 任意の $x \in \mathfrak{h}_{\mathbb{R}}^*$ に対して $\langle c, x\rangle = 1$ としている. (レベル 1 作用).

W は生成元 $s_0, s_1, \dots, s_n$ と次の関係式で定まる群と同型である.

$$
\begin{aligned}
s_i^2 &= 1 \qquad (i = 0, \dots, n), & s_is_j &= s_js_i \qquad (|i-j| > 1),\\
s_is_{i+1}s_i &= s_{i+1}s_is_{i+1} \qquad (i = 1, \dots, n-2), & s_is_{i+1}s_is_{i+1} &= s_{i+1}s_is_{i+1}s_i \qquad (i = 0, n-1)
\end{aligned}
$$

以下 W の元の長さといったら, これらの生成元による最短表示の長さのことを意味するものとする. また, $t(\epsilon_i)$ $(i = 1, \dots, n)$ の s_i 達による最短表示は $t(\epsilon_i) = s_{i-1} \cdots s_0s_1 \cdots s_ns_{n-1} \cdots s_i$ である.

以上の記号を用いて, $(C_n^\vee, C_n)$ **型アフィンルート系** [M03, (1.3.18)], [S00] を

$$
S := \{\pm\epsilon_i + \frac{k}{2}\delta, \pm 2\epsilon_i + k\delta \mid k \in \mathbb{Z},\ i = 1, \dots, n\} \cup \{\pm\epsilon_i \pm \epsilon_j + k\delta \mid k \in \mathbb{Z}, 1 \le i < j \le n\} \subset \widetilde{\mathfrak{h}}_{\mathbb{R}}^* \tag{2.1}
$$

で定義する. 正ルートの集合を

$$
S_+ := \{\alpha + k\delta, \alpha^\vee + \frac{k}{2}\delta \mid \alpha \in R_+, \alpha^\vee \in R_+^\vee, k \in \mathbb{N}\} \cup \{\alpha + k\delta, \alpha^\vee + \frac{k}{2}\delta \mid \alpha \in R_-, \alpha^\vee \in R_-^\vee, k \in \mathbb{N}\} \tag{2.2}
$$

で定義し, $S_- := -S_+$ とすれば, $S = S_+ \sqcup S_-$ となる. また $\widetilde{R} := R \cup R^\vee$ とし, 任意の $\beta = \alpha + k\delta \in S$ $(\alpha \in \widetilde{R}, k \in \frac{1}{2}\mathbb{Z})$ に対して, 自然な射影 $S \ni \beta \mapsto \alpha \in \widetilde{R}$ を $\overline{\beta} := \alpha$ で表す. また $\widetilde{R}_+ := R_+ \cup R_+^\vee$, $\widetilde{R}_- := -\widetilde{R}_+$ としておく.

3　アルコーブ経路

Ram が 導入した alcove walk は Littelmann パスのアフィン Hecke 環における類似物で, Macdonald-Koornwinder 多項式の Ram-Yip 型公式 [RY11, OS18] や非捩れ型 Macdonald 多項式の LR 係数に関する Yip の公式 [Y12] で用いられる, 重要な組み合わせ論的対象である. 本稿ではその alcove walk のことをアルコーブ経路と呼ぶ. ここではアルコーブ経路に関する記号や用語を導入する.

まず $(C_n^\vee, C_n)$ 系のアフィンルート系のアルコーブを定義しよう. $\beta = \alpha + k\delta \in S$, $k \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}$ を $\beta(v) = \langle \alpha, v\rangle + k \quad (v \in \mathfrak{h}_{\mathbb{R}}^*)$ によって $\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}^*$ 上の一次函数とみなす. アルコーブとは, $\alpha \in S$ が決める超平面 $H_\alpha := \{x \in \mathfrak{h}_{\mathbb{R}}^* \mid \alpha(x) = 0\}$ の補集合 $\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}^* \setminus \bigcup_{\alpha \in S} H_\alpha$ の連結成分のことをいう. 特にアルコーブ $A := \{x \in \mathfrak{h}_{\mathbb{R}}^* \mid \alpha_i(x) > 0\ (i = 0, \dots, n)\}$ を基本アルコーブという. 各アルコーブ wA $(w \in W)$ の境界は $n+1$ 個の超平面の部分集合からなるが, それらを wA の辺と呼ぶ.

アルコーブの各辺に対して, 符号を次のように割り振る. アルコーブ wA は $n+1$ 枚の超平面 $\{H_{\gamma_i} \mid i = 0, \dots, n\}$ で囲まれており, 各 $i = 0, \dots, n$ に対して H_{γ_i} は wA と ws_iA を隔てている

ものとする．このとき §2.2 の最後の段落の記号を用いて, $\overline{\gamma_i} \in \widetilde{R}_+$ ならば wA 側に $+$, ws_iA 側に $-$ また, $\overline{\gamma_i} \in \widetilde{R}_-$ ならば wA 側に $-$, ws_iA 側に $+$ とする．

$w \in W$ の最短表示 $w = s_{i_1} \cdots s_{i_r}$ を固定する． [Y12, (2.2.1)] にならってルートの集合 $\mathcal{L}(w) := \left\{\alpha_{i_1},\, s_{i_1}\alpha_{i_2},\, \ldots,\, s_{i_1}\cdots s_{i_{r-1}}\alpha_{i_r}\right\}$ を導入する．$\{H_\beta \mid \beta \in \mathcal{L}(w)\}$ は A と wA を隔てている超平面全体と解釈できる．また [Y12, (2.2.2)] にならって, $v, w \in W$ に対して, ルートの集合 $\mathcal{L}(v,w) := (\mathcal{L}(v) \cup \mathcal{L}(w)) \setminus (\mathcal{L}(v) \cap \mathcal{L}(w))$ を導入すると, $\{H_\beta \mid \beta \in \mathcal{L}(v,w)\}$ は, アルコーブ vA と wA を隔てている超平面全体となる．再び最短表示 $w = s_{i_1} \cdots s_{i_r} \in W$ を固定する．このとき W の中で w より Bruhat 順序 $\preccurlyeq_B$ で小さいもの全体 $\{v \in W \mid v \preccurlyeq_B w\}$ と長さ r のビット全体 $\{0,1\}^r$ の間には全単射 $\{0,1\}^r \ni (b_1, \ldots, b_r) \longmapsto s_{i_1}^{b_1} \cdots s_{i_r}^{b_r} \in \{v \in W \mid v \preccurlyeq_B w\}$ があることに注意する．ここで新たに $z \in W$ と $v \in W$, $v \preccurlyeq_B w$ を取る．上の全単射で v に対応するビット $b = (b_1, \ldots, b_r)$ をとり, $v = s_{i_1}^{b_1} \cdots s_{i_r}^{b_r}$ と書き直す．このときアルコーブ zA から開始するアルコーブの列 $p = \left(p_0 := zA,\ p_1 := zs_{i_1}^{b_1}A,\ p_2 := zs_{i_1}^{b_1}s_{i_2}^{b_2}A,\ \ldots,\ p_r := zs_{i_1}^{b_1}\cdots s_{i_r}^{b_r}A\right)$ のことを, z を始点とする $\overrightarrow{w} := (i_1, \ldots, i_r)$ 型のアルコーブ経路という．アルコーブ経路全体の集合を $\Gamma(\overrightarrow{w}, z)$ と書く．

以下, アルコーブ経路 $p \in \Gamma(\overrightarrow{w}, z)$ と $k = 1, \ldots, r$ に対して p の k 番目のステップとは遷移 $p_{k-1} \to p_k$ のことと約束する．$b_k = 1$ の場合のステップを通過 (crossing), $b_k = 0$ の場合のステップを折り返し (folding) と呼ぶ．

$z, w \in W$ および最短表示 $w = s_{i_1} \cdots s_{i_r}$ を固定する． アルコーブ経路 $p = (zA, \ldots, zs_{i_1}^{b_1} \cdots s_{i_r}^{b_r}A) \in \Gamma(\overrightarrow{w}, z)$ に対し, $e(p) \in W$ を $e(p) := zs_{i_1}^{b_1} \cdots s_{i_r}^{b_r}$ と定義する．つまり p の終点に対応した W の元とする．アルコーブの辺に対してつけた符号によって, $p \in \Gamma(\overrightarrow{w}, z)$ の各ステップを表 3.1 の四種類に分類する．

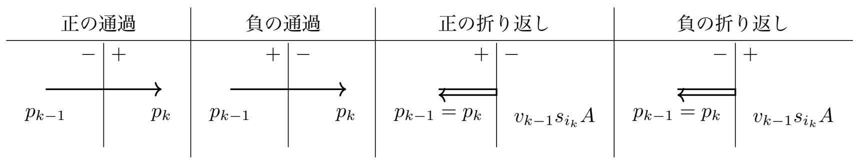

表 3.1: アルコーブ経路のステップの分類

4　アフィン Hecke 環と Koornwinder 多項式

この節では, [野 95] による C_n 型のアフィン Hecke 環の表現を用いた非対称 Koornwinder 多項式の実現を解説し, その対称化でもって Koornwinder 多項式を導入する．

4.1　$(C_n^\vee, C_n)$ 型アフィン Hecke 環とその多項式表現

§2.2 で導入した $(C_n^\vee, C_n)$ 型ルート系 S 及び拡大アフィン Weyl 群 W を思い出そう．パラメーター $\{t_\alpha \mid \alpha \in S\}$ は条件 $t_\alpha = t_\beta \Rightarrow \beta \in W.\alpha$ を満たすものとする．$(C_n^\vee, C_n)$ 型のアフィンルート系 S の W の軌道は $W.\alpha_i = W.\alpha_i^\vee$ $(i = 1, \ldots, n-1)$, $W.\alpha_n$, $W.\alpha_n^\vee$, $W.\alpha_0$, $W.\alpha_0^\vee$ の五つで

ある．それに応じてパラメータ五つを $(t_{\alpha_0}, t_{\alpha_i} = t_{\alpha_i^\vee}, t_{\alpha_n}, t_{\alpha_0^\vee}, t_{\alpha_n^\vee}) = (t_0, t, t_n, u_0, u_n)$ と置き直す．また $t_1, \ldots, t_{n-1} := t$ とも書く．そして基礎体 $\mathbb{K}$ を, それらの平方根 $t_i^{\frac{1}{2}}, u_i^{\frac{1}{2}}$ 及びパラメータ $q^{\frac{1}{2}}$ を付け加えた有理函数体 $\mathbb{K} := \mathbb{Q}(q^{\frac{1}{2}}, t^{\frac{1}{2}}, t_0^{\frac{1}{2}}, t_n^{\frac{1}{2}}, u_0^{\frac{1}{2}}, u_n^{\frac{1}{2}})$ とする．以下, 線形空間やそれらのテンソル積 $\otimes$ は全て $\mathbb{K}$ 上で考える．

さて, アフィン Hecke 環 $H(W)$ は $T_0, T_1, \ldots, T_n$ で生成され以下の関係式で定義される $\mathbb{K}$ 代数であった．

$$
\begin{aligned}
(T_i - t_i^{\frac{1}{2}})(T_i + t_i^{-\frac{1}{2}}) &= 0 && (i = 0, \ldots, n), \\
T_i T_j &= T_j T_i && (|i-j| > 1, (i,j) \notin \{(n,0),(0,n)\}), && (4.1) \\
T_i T_{i+1} T_i &= T_{i+1} T_i T_{i+1} && (i = 1, \ldots, n-2), && (4.2) \\
T_i T_{i+1} T_i T_{i+1} &= T_{i+1} T_i T_{i+1} T_i && (i = 0, n-1). && (4.3)
\end{aligned}
$$

関係式 (4.1)–(4.3) を組紐関係式と呼ぶ． また $w \in W$ に対して $Y^w \in H(W)$ を次で定義する． w の最短表示 $w = s_{i_1} \cdots s_{i_r}$ をとり, p を A から wA へのアルコーブ経路 $(A, s_{i_1}A, \ldots, s_{i_1} \cdots s_{i_r}A = wA) \in \Gamma(\overrightarrow{w}, e)$ とする．このとき $Y^w := T_{i_1}^{\epsilon_1} \cdots T_{i_r}^{\epsilon_r}$ とする．但し ϵ_k は, 表 3.1 の分類において, p の k 番目のステップが正の通過なら 1, 負の通過なら -1 とする．これは $w \in W$ の最短表示の取り方によらない．また $H(W)$ の関係式から $\{Y^w \mid w \in W\}$ は互いに可換であることが従う [野 95, §2].

ここで $t(\epsilon_i)$ $(i = 1, \ldots, n)$ の最短表示を用いて $Y^{t(\epsilon_i)}$ を計算すると $Y^{t(\epsilon_i)} = T_{i-1}^{-1} \cdots T_1^{-1} T_0 \cdots T_{n-1} T_n T_{n-1} \cdots T_i$ となる． 以下 $\mathbb{K}[Y^{\pm 1}] = \mathbb{K}[Y_1^{\pm 1}, \ldots, Y_n^{\pm 1}] \subset H(W)$, $Y_i := Y^{t(\epsilon_i)}$ $(i = 1, \ldots, n)$ で $Y_1, \ldots, Y_n$ の Laurent 多項式環を表す． このとき $\mathbb{K}$ 線形空間としての同型 $H(W) \simeq H(W_0) \otimes \mathbb{K}[Y^{\pm 1}]$ が成立する．

次に [野 95] によって導入された $H(W)$ の基本表現を思い出す．n 変数有理函数体 $\mathbb{K}(x) = \mathbb{K}(x_1, \ldots, x_n)$ への代数準同型 $H(W) \mapsto \mathrm{End}_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}(x))$ が

$$
\begin{aligned}
T_i &\longmapsto t_i^{\frac{1}{2}} + t_i^{-\frac{1}{2}} \frac{1 - t_i x_i / x_{i+1}}{1 - x_i / x_{i+1}} (s_i - 1) \quad (i = 1, \ldots, n-1), \\
T_0 &\longmapsto t_0^{\frac{1}{2}} + t_0^{-\frac{1}{2}} \frac{(1 - u_0^{\frac{1}{2}} t_0^{\frac{1}{2}} q^{\frac{1}{2}} x_1^{-1})(1 + u_0^{-\frac{1}{2}} t_0^{\frac{1}{2}} q^{\frac{1}{2}} x_1^{-1})}{1 - q x_1^{-2}} (s_0 - 1), \qquad (4.4) \\
T_n &\longmapsto t_n^{\frac{1}{2}} + t_n^{-\frac{1}{2}} \frac{(1 - u_n^{\frac{1}{2}} t_n^{\frac{1}{2}} x_n)(1 + u_n^{-\frac{1}{2}} t_n^{\frac{1}{2}} x_n)}{1 - x_n^2} (s_n - 1)
\end{aligned}
$$

で定まり, 更にその像は Laurent 多項式の自己準同型環 $\mathrm{End}_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}[x^{\pm 1}]) \subset \mathrm{End}_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}(x))$ に含まれる． この $H(W)$ の表現を多項式表現と呼ぶ． 以降, この多項式表現により $H(W)$ を $\mathrm{End}_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}[x^{\pm 1}])$ の部分環とみなす．(4.4) の右辺は q 差分作用素であるが, それらは $(C_n^\vee, C_n)$ 型の Dunkl 作用素と呼ばれている．

多項式表現 (4.4) は次のようによりコンパクトに書ける．

$$
u_i := \begin{cases} 1 & (i = 1, \ldots, n-1) \\ u_0 & (i = 0) \\ u_n & (i = n) \end{cases}, \quad x^{\alpha_i} := \begin{cases} x_i / x_{i+1} & (i = 1, \ldots, n-1) \\ q x_1^{-2} & (i = 0) \\ x_n^2 & (i = n) \end{cases}
$$

とし, $c_i(z), d_i(z) \in \mathbb{K}(z)$ を

$$c_i(z) := t_i^{-\frac{1}{2}} \frac{(1-u_i^{\frac{1}{2}} t_i^{\frac{1}{2}} z^{\frac{1}{2}})(1+u_i^{-\frac{1}{2}} t_i^{\frac{1}{2}} z^{\frac{1}{2}})}{1-z}, \quad d_i(z) := t_i^{\frac{1}{2}} - c_i(z) = \frac{(t_i^{\frac{1}{2}} - t_i^{-\frac{1}{2}}) + (u_i^{\frac{1}{2}} - u_i^{-\frac{1}{2}}) z^{\frac{1}{2}}}{1-z} \tag{4.5}$$

と定義すれば, つぎのようにかける.

$$T_i = t_i^{\frac{1}{2}} + c_i(x^{\alpha_i})(s_i - 1) = t_i^{\frac{1}{2}} s_i + d_i(x^{\alpha_i})(1-s_i) = c_i(x^{\alpha_i}) s_i + d_i(x^{\alpha_i}). \tag{4.6}$$

更にアフィンルート $\alpha + k\delta \in S$ に対して

$$q^{\mathrm{sh}(\alpha+k\delta)} := q^{-k}, \quad t^{\mathrm{ht}(\alpha+k\delta)} := \prod_{\beta \in R_+^s} t^{\frac{1}{2}\langle \beta^\vee, \alpha \rangle} \prod_{\beta \in R_+^\ell} (t_0 t_n)^{\frac{1}{2}\langle \beta^\vee, \alpha \rangle} \tag{4.7}$$

と定義する. 但し $R_+^s := \{\epsilon_i \pm \epsilon_j \mid 1 \le i < j \le n\}$, $R_+^\ell := \{2\epsilon_i \mid 1 \le i \le n\}$. このとき $\lambda \in S$ に対して $Y^\lambda 1 = q^{\mathrm{sh}(\lambda)} t^{\mathrm{ht}(\lambda)}$ が成立する.

最後にアフィン Hecke 環の多項式表現における Lusztig 関係式を思い出しておこう. ウェイト格子 $P = \mathfrak{h}_{\mathbb{Z}}^*$ の各元 $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ に対して $x^\lambda \in \mathbb{K}[x^{\pm 1}]$ を $x^\lambda := x_1^{\lambda_1} \cdots x_n^{\lambda_n} \in \mathbb{K}[x^{\pm 1}]$ で定義する.

事実 4.1 (Lusztig 関係式)**.** 任意の $i = 0, \dots, n$ と $\lambda \in \mathfrak{h}_{\mathbb{Z}}^*$ に対し $T_i x^\lambda - x^{s_i \cdot \lambda} T_i = d_i(x^{\alpha_i})(x^\lambda - x^{s_i \cdot \lambda})$ が成り立つ. 但し $d_i(z)$ は (4.5) で定義した有理式.

4.2 ダブルアフィン Hecke 環と非対称 Koornwinder 多項式

次にダブルアフィン Hecke 環 $DH(W)$ を導入しよう. 多項式表現 (4.4) を用いてアフィン Hecke 環を部分 $\mathbb{K}$ 代数 $H(W) \subset \mathrm{End}_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}[x^{\pm 1}])$ と見なす. そして有限 Hecke 環 $H(W_0) \subset H(W)$ を, $T_1, \dots, T_n$ の生成する部分 $\mathbb{K}$ 代数として定義する. そして $DH(W) \subset \mathrm{End}_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}[x^{\pm 1}])$ を $\mathbb{K}[x^{\pm 1}]$, $H(W_0)$, $\mathbb{K}[Y^{\pm 1}]$ の生成する部分 $\mathbb{K}$ 代数として定義する. つまり $DH(W) := \langle \mathbb{K}[x^{\pm 1}], H(W_0), \mathbb{K}[Y^{\pm 1}] \rangle \subset \mathrm{End}_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}[x^{\pm 1}])$ である. 非捩れ型のダブルアフィン Hecke 環に Cherednik 反対合が存在するように, $DH(W)$ にも次で決まる反対合が存在する [Sa99, §3].

$$\begin{aligned} &\phi(x_i) = Y_i^{-1}, \quad \phi(Y_i) = x_i^{-1}, \quad \phi(T_i) = T_i \quad (i = 1, \dots, n), \\ &\phi(u_n) = t_0, \quad \phi(t_0) = u_n. \end{aligned} \tag{4.8}$$

このとき $\phi(T_0) = T_{s_{2\epsilon_1}}^{-1} x_1^{-1}$ となる. 実際, Y_i の最短表示より $T_0 = Y_1 T_{s_{2\epsilon_1}}^{-1}$, $T_{s_{2\epsilon_1}} = T_1 \cdots T_n T_{n-1} \cdots T_1$ である. 以後, $T_i^\vee := \phi(T_i)$ $(i = 0, \dots, n)$ という記号を用いる. 次に [M03, §5.6] にならって絡作用素を導入する. そのためにまず $DH(W)$ を拡大した $\widetilde{DH}(W) := \langle \mathbb{K}(x), H(W_0), \mathbb{K}(Y) \rangle \subset \mathrm{End}_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}(x))$ を考える. 但し $\mathbb{K}(x)$, $\mathbb{K}(Y)$ はそれぞれ x_i, Y_i $(i = 1, \dots, n)$ の有理関数体を表す. $i = 0, \dots, n$ に対して $S_i^x \in \widetilde{DH}(W)$ が $S_i^x := T_i + \varphi_i^+(x^{\alpha_i}) = T_i^{-1} + \varphi_i^-(x^{\alpha_i})$ で定まる. 但し

$$\varphi_i^\pm(z) := \mp \frac{(t_i^{\frac{1}{2}} - t_i^{-\frac{1}{2}}) + z^{\pm\frac{1}{2}}(u_i^{\frac{1}{2}} - u_i^{-\frac{1}{2}})}{1 - z^{\pm 1}} \in \mathbb{K}(z). \tag{4.9}$$

S_i^x を x 側の絡作用素と呼ぶ. (4.5) と (4.6) から $\varphi_i^+(z) = d_i(z), S_i^x = T_i - d_i(x^{\alpha_i}) = c_i(x^{\alpha_i})s_i$ となることに注意しておく. また Lusztig 関係式 (事実 4.1) から, S_i^x は任意の $\lambda \in \mathfrak{h}_{\mathbb{Z}}^*$ に対して関係式 $S_i^x x^\lambda = x^{s_i(\lambda)} S_i^x$ を満たす. また [M03, (5.5.2)] より, S_i^x $(i = 0, \ldots, n)$ は (4.1)–(4.3) と同じ組紐関係式を満たす:

$$\begin{aligned} S_i^x S_j^x &= S_j^x S_i^x (|i-j| > 1), \\ S_i^x S_{i+1}^x S_i^x &= S_{i+1}^x S_i^x S_{i+1}^x (i = 1, \ldots, n-2), \\ S_i^x S_{i+1}^x S_i^x S_{i+1}^x &= S_{i+1}^x S_i^x S_{i+1}^x S_i^x (i = 0, n-1). \end{aligned} \tag{4.10}$$

特に任意の $w \in W$ に対して, 最短表示 $w = s_{i_1} \cdots s_{i_p}$ を一つ取って $S_w^x := S_{i_1}^x \cdots S_{i_p}^x \in \widetilde{DH}(W)$ とすれば, これは最短表示の取り方によらず, well-defined に定まる.

また ϕ は $\widetilde{DH}(W)$ に延長できる. 実際, $\widetilde{DH}(W)$ は非可換環 $DH(W)$ の可換部分環 $\mathbb{K}[x^{\pm 1}]$ 及び $\mathbb{K}[Y^{\pm 1}]$ での Ore 局所化であり, ϕ はこれら可換部分環上で同型である. 得られた $\widetilde{DH}(W)$ 上の反対合も同じ記号 ϕ で表す. この延長した ϕ により Y 側の絡作用素 $S_i^Y \in \widetilde{DH}(W)$ を導入する:

$$\begin{aligned} S_i^Y &:= \phi(S_i^x) = T_i + \psi_i^+(Y^{-\alpha_i}) = T_i^{-1} + \psi_i^-(Y^{-\alpha_i}) \quad (i = 1, \ldots, n), \\ S_0^Y &:= \phi(S_0^x) = T_0^\vee + \psi_0^+(qY_1^2) = (T_0^\vee)^{-1} + \psi_0^-(qY_1^2). \end{aligned} \tag{4.11}$$

但し (4.9) の $\varphi_i^{\pm}(z)$ の ϕ による像を

$$\begin{aligned} \psi_i^{\pm}(z) &:= \varphi_i^{\pm 1}(z) = \mp \frac{t^{\frac{1}{2}} - t^{-\frac{1}{2}}}{1 - z^{\pm 1}} \quad (i = 1, \ldots, n-1), \\ \psi_0^{\pm}(z) &:= \mp \frac{(u_n^{\frac{1}{2}} - u_n^{-\frac{1}{2}}) + z^{\pm\frac{1}{2}}(u_0^{\frac{1}{2}} - u_0^{-\frac{1}{2}})}{1 - z^{\pm 1}}, \\ \psi_n^{\pm}(z) &:= \mp \frac{(t_n^{\frac{1}{2}} - t_n^{-\frac{1}{2}}) + z^{\pm\frac{1}{2}}(t_0^{\frac{1}{2}} - t_0^{-\frac{1}{2}})}{1 - z^{\pm 1}} \end{aligned} \tag{4.12}$$

と表した. また, 任意の $i = 0, \ldots, n$ と $\lambda \in \mathfrak{h}_{\mathbb{Z}}^*$ に対して関係式 $S_i^Y Y^\lambda = Y^{s_i \lambda} S_i^Y$ が成り立つ. S_i^Y 達も (4.10) と同じ組紐関係式を満たすから, 任意の $w \in W$ に対して最短表示 $w = s_{i_1} \cdots s_{i_p}$ を一つ取って $S_w^Y = S_{i_1}^Y \cdots S_{i_p}^Y \in \widetilde{DH}(W)$ とすれば, これは最短表示によらず well-defined である. また, $\mu \in \mathfrak{h}_{\mathbb{Z}}^*$ について,$t(\mu)W_0 \subset W$ とみなし, $w(\mu) \in W$ を次で定める.

$$w(\mu) \text{ は } t(\mu)W_0 \text{ の元であって, } W \text{ の元と見たときに長さが最短のもの.} \tag{4.13}$$

事実 4.2 ([Sa99, §6], [S00, Theorem 4.8])**.** $\mu \in \mathfrak{h}_{\mathbb{Z}}^*$ に対し $E_\mu(x) := S_{w(\mu)}^Y 1$ は $\mathbb{K}[x^{\pm 1}]$ の元である. これを非対称 Koornwinder 多項式という.

$E_\mu(x)$ $(\mu \in \mathfrak{h}_{\mathbb{Z}}^*)$ は $\{Y^\lambda \mid \lambda \in \mathfrak{h}_{\mathbb{Z}}^*\}$ の同時固有函数である. また, $E_\mu(x)$ の最高次 x^μ の係数を 1 に正規化すれば, [Sa99, S00] で定義されている非対称 Koornwinder 多項式と一致する.

4.3 Koornwinder 多項式

最後に非対称 Koornwinder 多項式を対称化して得られる Koornwinder 多項式を紹介する.

§2.1 の記号を用いて, 支配的ウェイト (dominant weight) の集合 $(\mathfrak{h}^*_{\mathbb{Z}})_+ \subset \mathfrak{h}^*_{\mathbb{Z}}$ を次で定める:

$$(\mathfrak{h}^*_{\mathbb{Z}})_+ := \{\mu \in \mathfrak{h}^*_{\mathbb{Z}} \mid \langle \alpha_i^\vee, \mu\rangle \geq 0,\ i = 1, \ldots, n\}.$$

$\mu \in (\mathfrak{h}^*_{\mathbb{Z}})_+$ に対して $W_\mu := \{w \in W_0 \mid w.\mu = \mu\} \subset W_0$ を C_n 型 Weyl 群 W_0 における μ の安定化部分群とする. また, その最長元を $w_\mu \in W_\mu$ とかく.

次に §2.2 及び §4.1 の記号を思い出そう. 特に W は拡大アフィン Weyl 群, S はアフィンルート系 (2.1), $\{t_\alpha \mid \alpha \in S\}$ は W 不変なパラメータ, $\mathbb{K} = \mathbb{Q}(q^{\frac{1}{2}}, t_\alpha^{\frac{1}{2}})$ は基礎体であった. 各 $w \in W$ に対して $t_w := \prod_{\beta \in \mathcal{L}(w)} t_\beta \in \mathbb{K}$ と定義する. もし $w = s_{i_1} \cdots s_{i_r} \in W$ が最短表示ならば $t_w = t_{i_1} \cdots t_{i_r}$ となる. そして $\mu \in (\mathfrak{h}^*_{\mathbb{Z}})_+$ に対して安定化部分群 W_μ の Poincaré 多項式 $W_\mu(t) \in \mathbb{K}$ を $W_\mu(t) := \sum_{u \in W_\mu} t_u$ で定義する. 次に対称化作用素 $U \in H(W_0)$ を $U := \sum_{w \in W_0} t_{w_0 w}^{-\frac{1}{2}} T_w$ で定義する. 以下 $\mathbb{K}[x^{\pm 1}]^{W_0} := \left\{f \in \mathbb{K}[x^{\pm 1}] \mid w.f = f,\, w \in W_0\right\}$ で対称 Laurent 多項式環を表す. また $\mu \in (\mathfrak{h}^*_{\mathbb{Z}})_+ \subset P$ なので, (4.13) より $w(\mu) \in t(\mu)W_0 \subset W$ が定まることに注意する.

事実 4.3 ([S00, Theorem 6.6])**.** 任意の $\mu \in (\mathfrak{h}^*_{\mathbb{Z}})_+$ に対して

$$P_\mu(x) := \frac{1}{t_{w_\mu}^{-\frac{1}{2}} W_\mu(t)} U S^Y_{w(\mu)} 1 = \frac{1}{t_{w_\mu}^{-\frac{1}{2}} W_\mu(t)} U E_\mu(x)$$

は $\mathbb{K}[x^{\pm 1}]^{W_0}$ の元である. これをモニック対称 Koornwinder 多項式, または単に **Koornwinder 多項式**と呼ぶ.

5 Koornwinder 多項式の Littlewood-Richardson 係数

この節では主結果である Koornwinder 多項式の Littlewood-Richardson 係数の組合せ論的明示式を紹介する. その明示式は Yip [Y12] が導入した色付きアルコーブ経路を用いる. それは, アルコーブ経路の折り返しステップに黒色または灰色の色を付けたもののことである. 色付きアルコーブ経路 p のうち全ての p_k が dominant chamber C に含まれるもののなす集合を $\Gamma_2^C(\overrightarrow{w}, z)$ と書く.

定理 1 ([Y20, Theorem 3.4.2])**.** $\lambda, \mu \in (\mathfrak{h}^*_{\mathbb{Z}})_+$ を任意の支配的ウェイトとする. W_λ を有限 Weyl 群 W_0 の λ に関する安定化部分群とし, W^λ を商 W_0/W_λ の完全代表系であって各元の長さが最短であるものとする. また, (4.13) で定められる拡大アフィン Weyl 群 W の元 $w(\mu)$ について, その最短表示を一つ取る. このとき

$$P_\mu(x) P_\lambda(x) = \frac{1}{t_{w_\mu}^{-\frac{1}{2}} W_\mu(t)} \sum_{v \in W^\lambda} \sum_{p \in \Gamma_2^C(\overrightarrow{w(\mu)}^{-1}, (v w(\lambda))^{-1})} A_p B_p C_p P_{-w_0.\mathrm{wt}(p)}(x).$$

但し $w_0 \in W_0$ は最長元であり, $\mathrm{wt}(p) \in \mathfrak{h}^*_{\mathbb{Z}}$ は色付きアルコーブ経路 p の終点に対応する元 $e(p) \in W$ から定まるウェイト. 各係数 A_p, B_p, C_p は因子化していて, A_p と B_p は

$$A_p := \prod_{\alpha \in w(\lambda)^{-1} \mathcal{L}(v^{-1}, v_\lambda^{-1})} \rho(\alpha), \quad B_p := \prod_{\alpha \in \mathcal{L}(t(\mathrm{wt}(p)) w_0, e(p))} \rho(-\alpha).$$

と書ける．ここで ρ は $R^s_+ := \{\epsilon_i \pm \epsilon_j \mid 1 \le i < j \le n\}$, $R^\ell_+ := \{2\epsilon_i \mid 1 \le i \le n\}$ を用いて

$$\rho(\alpha) := \begin{cases} t^{\frac12} \dfrac{1 - t^{-1} q^{\mathrm{sh}(-\alpha)} t^{\mathrm{ht}(-\alpha)}}{1 - q^{\mathrm{sh}(-\alpha)} t^{\mathrm{ht}(-\alpha)}} & (\alpha \notin W.\alpha_n) \\ t_n^{\frac12} \dfrac{(1 + t_0^{\frac12} t_n^{-\frac12} q^{\frac12 \mathrm{sh}(-\alpha)} t^{\frac12 \mathrm{ht}(-\alpha)})(1 - t_0^{-\frac12} t_n^{-\frac12} q^{\frac12 \mathrm{sh}(-\alpha)} t^{\frac12 \mathrm{ht}(-\alpha)})}{1 - q^{\mathrm{sh}(-\alpha)} t^{\mathrm{ht}(-\alpha)}} & (\alpha \in W.\alpha_n) \end{cases},$$

$$q^{\mathrm{sh}(\alpha)} := q^{-k},\ t^{\mathrm{ht}(\alpha)} := \textstyle\prod_{\gamma \in R^s_+} t^{\frac12 \langle \gamma^\vee, \beta\rangle} \prod_{\gamma \in R^\ell_+} (t_0 t_n)^{\frac12 \langle \gamma^\vee, \beta\rangle} \quad (\alpha = \beta + k\delta \in S)$$

で与えられる．また $C_p = \prod_{k=1}^r C_{p,k}$ の各 $C_{p,k}$ は, p の k 番目のステップに対して次のように定める．

$$C_{p,k} := \begin{cases} 1 & k\text{ 番目のステップが正の通過} \\ \prod_{k \in \xi_{\mathrm{des}}(p)} n_{i_k}(q^{\mathrm{sh}(-h_k(p))} t^{\mathrm{ht}(-h_k(p))}) & \text{負の通過} \\ \psi^+_{i_k}(q^{\mathrm{sh}(-h_k(p))} t^{\mathrm{ht}(-h_k(p))}) & \text{灰色で正の折り返し} \\ \psi^-_{i_k}(q^{\mathrm{sh}(-h_k(p))} t^{\mathrm{ht}(-h_k(p))}) & \text{灰色で負の折り返し} \\ -\psi^+_{i_k}(q^{\mathrm{sh}(-\beta_k)} t^{\mathrm{ht}(-\beta_k)}) & \text{黒色の折り返しで } p^* \text{ の } k \text{ 番目のステップが正} \\ -\psi^-_{i_k}(q^{\mathrm{sh}(-\beta_k)} t^{\mathrm{ht}(-\beta_k)}) & \text{黒色の折り返しで } p^* \text{ の } k \text{ 番目のステップが負} \end{cases}$$

ここに $\psi^\pm_i(z)$, $n_i(z)$ は

$$\psi^\pm_i(z) := \mp \frac{t^{\frac12} - t^{-\frac12}}{1 - z^{\pm 1}} \qquad (i = 1, \dots, n-1),$$
$$\psi^\pm_0(z) := \mp \frac{(u_n^{\frac12} - u_n^{-\frac12}) + z^{\pm\frac12}(u_0^{\frac12} - u_0^{-\frac12})}{1 - z^{\pm 1}}, \quad \psi^\pm_n(z) := \mp \frac{(t_n^{\frac12} - t_n^{-\frac12}) + z^{\pm\frac12}(t_0^{\frac12} - t_0^{-\frac12})}{1 - z^{\pm 1}}$$

及び

$$n_i(z) := \frac{1 - tz}{1 - z} \frac{1 - t^{-1} z}{1 - z} \qquad (\beta \in W.\alpha_i,\ i = 1, \dots, n-1),$$
$$n_0(z) := \frac{(1 - u_n^{\frac12} u_0^{\frac12} z^{\frac12})(1 + u_n^{\frac12} u_0^{-\frac12} z^{\frac12})}{1 - z} \frac{(1 + u_n^{-\frac12} u_0^{\frac12} z^{\frac12})(1 - u_n^{-\frac12} u_0^{-\frac12} z^{\frac12})}{1 - z} \quad (\beta \in W.\alpha_0),$$
$$n_n(z) := \frac{(1 - t_n^{\frac12} t_0^{\frac12} z^{\frac12})(1 + t_n^{\frac12} t_0^{-\frac12} z^{\frac12})}{1 - z} \frac{(1 + t_n^{-\frac12} t_0^{\frac12} z^{\frac12})(1 - t_n^{-\frac12} t_0^{-\frac12} z^{\frac12})}{1 - z} \qquad (\beta \in W.\alpha_n).$$

である．

定理 1 の証明の方針を説明しよう．非対称 Koornwinder 多項式 [Sa99, S00] を $E_\mu(x) \in \mathbb{K}[X^{\pm 1}]$ と書く．

- $\{E_\mu(x) \mid \mu \in (\mathfrak{h}^*_{\mathbb{Z}})_+\}$ は $\mathbb{K}[x^{\pm 1}]$ の $\mathbb{K}$ 基底.
- $E_\mu(x)$ を対称化して $P_\mu(x)$ が得られる (事実 4.2). 正確には, 対称化作用素 U を用いると

$$P_\mu(x) = \frac{1}{t_{w_\mu}^{-\frac12} W_\mu(t)} U E_\mu(x).$$

証明の大筋は Yip [Y12] の議論の安直な $(C_n^\vee C_n)$ 類似であり, 四つのステップに分けられる．係数や和の範囲を略記して説明しよう．

(i) $\lambda, \mu \in (\mathfrak{h}_{\mathbb{Z}}^*)_+$ に対し, 非対称 Koornwinder 多項式と単項式の積の展開公式

$$x^\mu E_\lambda(x) = \sum_{p\in\Gamma^C} c_p E_{\varpi(p)}(x)$$

を求める ([Y20, corollary 3.1.5]). ここで p は dominant chamber C に含まれるアルコーブ経路を走る.

(ii) 非対称 Koornwinder 多項式の明示公式である Ram-Yip 型公式

$$E_\mu(x) = \sum_{p\in\Gamma} f_p t_{\mathrm{d}(p)}^{\frac{1}{2}} x^{\mathrm{wt}(p)}$$

を用いる. 和の p はアルコーブ経路を走る. これは Ram と Yip が [RY11] において非捩れ型の非対称 Macdonald 多項式に対して導出し, Orr と Shimozono が [OS18] において非対称 Koornwinder 多項式に対して導出したものである.

(iii) 以上を用いると非対称 Koornwinder 多項式と Koornwinder 多項式の積をダブルアフィン Hecke 環の拡大 $\widetilde{DH}(W)$ の中で計算することができて, そのアルコーブ経路に関する和として表示できる. 更に和を色付きアルコーブ経路に関する和に書き換えることができて, 最終的な結果は [Y20, Proposition 3.3.2] の

$$E_\mu(x)P_\lambda(x) = \sum_{v\in W^\lambda}\sum_{p\in\Gamma_2^C} A_p C_p E_{\varpi(p)}(x).$$

(iv) $E_\mu(x)$ を対称化して定理 1 が得られる.

参考文献

[M03] I. G. Macdonald, *Affine Hecke Algebras and Orthogonal Polynomials*, Cambridge Tracts in Mathematics **157**, Cambridge Univ. Press, 2003.

[OS18] D. Orr, M. Shimozono, *Specializations of nonsymmetric Macdonald-Koornwinder polynomials*, J. Algebraic Combin., **47** (2018), no. 1, 91–127.

[RY11] A. Ram, M. Yip, *A combinatorial formula for Macdonald polynomials*, Adv. Math., **226** (2011), 309–331.

[Sa99] S. Sahi, *Nonsymmetric Koornwinder polynomials and duality*, Ann. Math., **150** (1999), 267–282.

[S00] J.V. Stokman, *Koornwinder Polynomials and Affine Hecke Algebras*, Int. Math. Res. Not., **19** (2000), 1005–1042.

[Y12] M. Yip, *A Littlewood–Richardson rule for Macdonald polynomials*, Math. Z., **272** (2012), 1259–1290.

[Y20] K. Yamaguchi, *A Littlewood–Richardson rule for Koornwinder polynomials*, arXiv:2009.13963.

[野 95] 野海 正俊, *Macdonald-Koornwinder* 多項式と *affine Hecke* 環, 数理解析研究所講究録, **919** (1995), 44–55.