Existence of ground state and blow up solution for the combined power type NLS with mass and energy critical nonlinearity*

津田塾大学大学院 理学研究科 数学専攻 後期博士課程 1 年
渡邉 南 (Minami WATANABE) †

Abstract

本研究の目標は質量臨界項とソボレフ臨界項の二重冪の非線形項を持つシュレディンガー方程式 (以下 (NLS) と書く) の解の大域挙動を解析することである．大域挙動を調べるためには，解の形状の変化の様子を調べる必要がある．そのため，基底状態 ((NLS) と定在波解から導出される楕円型方程式の非自明解の中で，対応する作用汎関数を最小にするもの) をビリアル恒等式 (解の分散性の振る舞いを表す式) で特徴付ける必要がある．本講演では，(NLS) の基底状態をビリアル恒等式で特徴付けし，その基底状態より下のエネルギーを持つ解が爆発することについて述べる．

1 Introduction

本講演では次の非線形シュレディンガー方程式について考察する．

$$i\frac{\partial\psi}{\partial t}+\Delta\psi+|\psi|^{\frac{4}{d}}\psi+|\psi|^{\frac{4}{d-2}}\psi=0. \tag{NLS}$$

ただし，$i=\sqrt{-1}$ で $\Delta=\sum_{j=1}^{d}\frac{\partial^2}{\partial x_j^2}$ はラプラシアンである．さらに (NLS) の質量 $\mathcal{M}(\psi)$ とハミルトニアン $\mathcal{H}(\psi)$ を次で導入する．

$$\mathcal{M}(\psi)=\frac{1}{2}\|\psi\|_{L^2}^2,\quad \mathcal{H}(\psi)=\frac{1}{2}\|\nabla\psi\|_{L^2}^2-\frac{d}{2(d+2)}\|\psi\|_{L^{\frac{2(d+2)}{d}}}^{\frac{2(d+2)}{d}}-\frac{d-2}{2d}\|\psi\|_{L^{\frac{2d}{d-2}}}^{\frac{2d}{d-2}}. \tag{1.1}$$

任意の $u_0\in H^1(\mathbb{R}^d)$ に対して，ある時間 $T_{\max},T_{\min}>0$ と，$\psi|_{t=0}=\psi_0$ を満たす (NLS) の解 $u\in C((-T_{\min},T_{\max}),H^1(\mathbb{R}^d))$ が存在して，質量とハミルトニアンに対して保存則が成り立つ．つまり

$$\mathcal{M}(\psi(t))=\mathcal{M}(\psi_0),\quad \mathcal{H}(\psi(t))=\mathcal{H}(\psi_0)\quad \text{for all}\quad t\in(-T_{\min},T_{\max}). \tag{1.2}$$

例えば，Cazenave and Weissler[4] を参照．さらに，(NLS) の解 $\psi(t,x)$ は $|x|^2\psi_0\in L^2(\mathbb{R}^d)$ であるとき，次のビリアル恒等式を満たす．

$$\frac{d^2}{dt^2}\int_{\mathbb{R}^d}|x|^2|\psi(t,x)|^2dx=8\mathcal{K}(\psi(t))\quad \text{for all}\quad t\in(-T_{\min},T_{\max}). \tag{1.3}$$

ただし

$$\mathcal{K}(\psi)=\|\nabla\psi\|_{L^2}^2-\frac{d}{d+2}\|\psi\|_{L^{\frac{d}{2(d+2)}}}^{\frac{d}{2(d+2)}}-\|\psi\|_{L^{\frac{2d}{d-2}}}^{\frac{2d}{d-2}}. \tag{1.4}$$

(NLS) に対して定在波解 $\psi(t,x)=\mathrm{e}^{i\omega t}u(x)(\omega>0)$ を考えると、u は次の非線形楕円型方程式を満たす．

$$-\Delta u+\omega u-|u|^{\frac{4}{d}}u-|u|^{\frac{4}{d-2}}u=0,\quad u\in H^1(\mathbb{R}^d)\backslash\{0\} \tag{SP}$$

与えられた $\omega>0$ に対して，(SP) の作用汎関数 $\mathcal{S}_\omega$ を次で定義する．

$$\mathcal{S}_\omega(u):=\omega\mathcal{M}(u)+\mathcal{H}(u). \tag{1.5}$$

---

*本研究は菊池 弘明氏 (津田塾大学) との共同研究に基づく．

†m18mwata@gm.tsuda.ac.jp

$\mathcal{S}'_\omega(Q_\omega)=0$ であることと，$Q_\omega \in H^1(\mathbb{R}^d)$ が (SP) の弱解であることは同値である．また，基底状態とは，(SP) の非自明な解の中で対応する汎関数 $\mathcal{S}_\omega$ を最小にするものである．

ここで，質量臨界とソボレフ臨界について説明する．以下の単純冪の非線形シュレディンガー方程式を考える．

$$i\frac{\partial u}{\partial t}+\Delta u+|u|^{p-1}u=0. \tag{1.6}$$

この方程式の解を u とし，$u_\lambda(t,x) = \lambda^{\frac{2}{p-1}}u(\lambda^2 t,\lambda x)(\lambda>0)$ とおくと，u_λ も解となる．質量臨界 $p=1+\frac{4}{d}$ とは，$\mathcal{M}(u_\lambda)=\mathcal{M}(u)$ を満たし，ソボレフ臨界 $p=1+\frac{4}{d-2}$ とは，$\mathcal{H}(u_\lambda)=\mathcal{H}(u)$ を満たす指数である．

本研究の目的は，質量臨界項とソボレフ臨界項の二重冪の非線形項を持つシュレディンガー方程式 (NLS) の解の大域挙動を解析することである．先行研究 [1] では，非線形項が質量超臨界 (質量臨界よりも大きい指数を持つ) 項かつソボレフ臨界項の二重冪の場合について，解の大域挙動が考察されている．さらに，質量臨界項とソボレフ臨界項の二重冪の場合も，基底状態の存在のみは示されている．しかし，このときの解の大域挙動については知られていない．質量臨界項のみの場合，基底状態が線形安定であるため，解析が困難になる．しかしソボレフ臨界項を含むと，その影響により基底状態が線形不安定であることがわかっている．そのため，二重冪の場合を考察することにした．

解の大域挙動を調べるためには，解の形状の変化の様子を調べる必要がある．そのため解の分散性の振る舞いを表すビリアル恒等式によって基底状態を特徴付ける必要がある．つまり，基底状態の存在を次の最小化問題を考えることにより示すことが必要である．

$$m_\omega := \inf\{\mathcal{S}_\omega(u)\colon u\in H^1(\mathbb{R}^d)\backslash\{0\},\ \mathcal{K}(u)=0\} \tag{1.7}$$

本研究では，質量臨界項とソボレフ臨界項の二重冪の非線形項を持つ楕円型方程式の基底状態について、上の最小化問題の考察を行い，ビリアル恒等式による特徴付けに成功した．さらに，得られた基底状態について，基底状態より小さいエネルギーに関するポテンシャル井戸を定義し，それが時間に関して不変集合になることを示した．そして，その集合から出発する解が爆発することについて考察した．

2 Main theorem

次の結果が得られた．

定理 2.1. $d\geq 4$ のとき，任意の $\omega>0$ に対して，$m_\omega>0$ であり，m_ω の最小元が存在する．さらに，m_ω の最小元は (SP) の基底状態である．

注意 2.2. $d=3$ のときも，十分小さい $\omega>0$ に対して，定理 *2.1* と同様のことを示すことができた．

さらに、得られた基底状態に対してポテンシャル井戸を次のように定義する．

$$\mathcal{A}_{\omega,+} := \{u\in H^1(\mathbb{R}^d)\colon \mathcal{S}_\omega(u)<m_\omega,\ \mathcal{K}(u)>0\}, \tag{2.1}$$

$$\mathcal{A}_{\omega,-} := \{u\in H^1(\mathbb{R}^d)\colon \mathcal{S}_\omega(u)<m_\omega,\ \mathcal{K}(u)<0\}. \tag{2.2}$$

$\mathcal{A}_{\omega,+}$ と $\mathcal{A}_{\omega,-}$ はともに (NLS) の時間に関する不変集合であることが分かり，さらに基底状態の変分法的特徴付けを用いて次の $\mathcal{K}(\psi(t))$ の一様評価が得られた．

定理 2.3. $d\geq 4$ とする．$\omega>0$，$\psi_0\in\mathcal{A}_{\omega,+}$ とし，$\psi|_{t=0}=\psi_0$ とする (NLS) の解とする．このとき，任意の $t\in(-T_{min},T_{max})$ に対して $\mathcal{K}(\psi(t))>0$ であり，ある $\varepsilon_0>0$ が存在して

$$\inf_{t\in(-T_{min},T_{max})}\mathcal{K}(\psi(t))\geq\varepsilon_0 \tag{2.3}$$

定理 2.4. $d\geq 4$ とする．$\omega>0$，$\psi_0\in\mathcal{A}_{\omega,-}$ とし，$\psi|_{t=0}=\psi_0$ とする (NLS) の解とする．このとき，任意の $t\in(-T_{min},T_{max})$ に対して $\mathcal{K}(\psi(t))<0$ であり，ある $\varepsilon_1>0$ が存在して

$$\sup_{t\in(-T_{min},T_{max})}\mathcal{K}(\psi(t))\leq-\varepsilon_1 \tag{2.4}$$

さらに，時間に関して不変集合であるという結果を用いて次が得られた．

定理 2.5 (爆発). $d \geq 4$ とする．任意の $\omega > 0$ に対して，$\psi(t)$ を $\psi|_{t=0} = \psi_0 \in \mathcal{A}_{\omega,-}$ を満たす (NLS) の解とする．さらに I_{max} を $\psi(t)$ が存在する最大区間とする．このとき，$\psi_0 \in L^2(\mathbb{R}^d, |x|^2dx)$ かもしくは $\psi_0 \in H^1(\mathbb{R}^d)$ が球対称関数であれば，I_{max} は有界である．

また，上の定理 2.5 から，次の基底状態の強不安定性に関する結果も得られた．

系 2.6. $d \geq 4$ とする．また，Q_ω を定理 2.1 で得られた基底状態とする．このとき，任意の $\omega > 0$ に対して定在波解 $\mathrm{e}^{i\omega t}Q_\omega$ は強不安定である：任意の $\varepsilon > 0$ に対し，ある $\psi_0 \in H^1(\mathbb{R}^d)$ が存在して，$\|\psi_0 - Q_\omega\|_{H^1} < \varepsilon$ であり，$\psi|_{t=0} = \psi_0$ を満たす (NLS) の解 $\psi(t)$ は有限時間で爆発する．

注意 2.7. 以上の結果は，講演者の修士論文にて，質量臨界項とソボレフ臨界項の二重冪を含むような一般の非線形項 $f(u)$ を持つシュレディンガー方程式に対しても成り立つことがわかった．時間の都合上，発表は二重冪についてのみにした．

3 Key lemma

ここでは証明に用いた主な定理と得られた幾つかの不等式評価について述べる．

定理 3.1 (Brezis-Lieb の補題 [2])**.** $1 < q < \infty$ とする．$\{u_n\}$ は $L^q(\mathbb{R}^d)$ の有界列で，$u_n \to u$ *a.e. in* $\mathbb{R}^d$ とする．このとき，$u \in L^q(\mathbb{R}^d)$ であり

$$\lim_{n\to\infty} \{\|u_n\|_{L^q}^q - \|u_n - u\|_{L^q}^q\} = \|u\|_{L^q}^q \tag{3.1}$$

定理 3.2 (Lieb のコンパクト性定理 [5])**.** $\{u_n\}$ は $H^1(\mathbb{R}^d)$ の有界列で，ある $q \in (2, 2^*)$ に対して，$\inf_{n\in\mathbb{R}^d} \|u_n\|_{L^q(\mathbb{R}^d)} > 0$ を満たすとする．このとき，$\mathbb{R}^d$ の点列 $\{y_n\}$，$v \in H^1(\mathbb{R}^d)\backslash\{0\}$，部分列 $\{n_j\}$ で，$u_{n_j}(\cdot - y_{n_j}) \to v$ *weakly in* $H^1(\mathbb{R}^d)$ を満たすものが存在する．

以下では不等式評価を紹介していく．まずは Sobolev 不等式の最良定数を用いた次の評価である．

補題 3.3. $d \geq 4$ とする．任意の $\omega > 0$ に対して次が成り立つ．

$$m_\omega < \frac{1}{d}\sigma^{\frac{d}{2}} \tag{3.2}$$

ただし σ は *Sobolev* 不等式の最良定数である：

$$\sigma := \inf\{\|\nabla u\|_{L^2}^2 \colon u \in \dot{H}^1(\mathbb{R}^d),\ \|u\|_{L^{\frac{2d}{d-2}}} = 1\} \tag{3.3}$$

注意 3.4. 証明には *Talenti* 関数を用いた．*Talenti* 関数 W は，以下の楕円型方程式の対称性を除いた一意な正値解である．

$$\Delta w + |w|^{\frac{4}{d-2}} w = 0 \tag{3.4}$$

さらに次を満たす．

$$\sigma^{\frac{d}{2}} = \|\nabla W\|_{L^2}^2 = \|W\|_{L^{\frac{2d}{d-2}}}^{\frac{2d}{d-2}} \tag{3.5}$$

例えば，*[3]* を参照．

次に，Gagliardo-Nirenberg 不等式の最良定数を用いた評価を紹介する．今回，定理 2.1 を証明する際，質量臨界を含んだため，上述したコンパクト性定理を用いて最小元を示す際に vanishing を否定する時に困難が生じた．そのため，この評価を必要とした．

補題 3.5. $d \geq 4$ とする．任意の $\omega > 0$ に対して次が成り立つ．

$$m_\omega < \frac{\omega}{2}\left(\frac{d+2}{dC_{GN}}\right)^{\frac{d}{2}} \tag{3.6}$$

ただし，C_{GN} は *Gagliardo-Nirenberg* 不等式の最良定数である：

$$\frac{1}{C_{GN}} := \inf\left\{\frac{\|\nabla u\|_{L^2}^2 \|u\|_{L^2}^{\frac{4}{d}}}{\|u\|_{L^{\frac{2(d+2)}{d}}}^{\frac{2(d+2)}{d}}} \colon u \in H^1(\mathbb{R}^d)\backslash\{0\}\right\} \tag{3.7}$$

注意 3.6. 証明には次の非線形楕円型方程式を用いた.

$$-\Delta U + U - |U|^{\frac{4}{d}} U = 0 \tag{3.8}$$

ここで，この方程式の一意な正値球対称解を U_1 とすると，次を満たすことがわかっている.

$$\|U_1\|_{L^2}^2 = \left(\frac{d+2}{dC_{GN}}\right)^{\frac{d}{2}}, \quad \|\nabla U_1\|_{L^2}^2 - \frac{d}{d+2}\|U_1\|_{L^{\frac{2(d+2)}{d}}}^{\frac{2(d+2)}{d}} = 0 \tag{3.9}$$

例えば，*Weinstein[6]* を参照.

参考文献

[1] T. Akahori, S. Ibrahim, H. Kikuchi and H. Nawa, *Scattering and blowup problems for a class of nonlinear Schrodinger equation above a ground state with small frequency.* to appear in Memoir of AMS. (arxiv:1510.08034).

[2] H. Brezis and E. H. Lieb, *A relation between pointwise convergence of functions and convergence of functionals.* Proc. Amer. Math. Soc. **88** (1983), 486–490.

[3] L. Caffarelli, B. Gidas and J. Spruck, *Asymptotic symmetry and local behavior of semilinear elliptic equations with critical Sobolev growth.* Comm. Pure Appl. Math. **42** (1989), 271–297.

[4] T. Cazenave and F. Weissler, *The Cauchy problem for the critical nonlinear Schödinger equation in Hs.* Nonlinear Anal. **14** (1990), 807–836.

[5] E. H. Lieb, *On the lowest eigenvalue of the Laplacian for the intersection of two domains.* Invent. Math. **74** (1983), 441–448.

[6] M. Weinstein, *Nonlinear Schrödinger equations and sharp interpolation estimates.* Comm. Math. Phys. **87** (1982/83), 567–576.