

可積分確率過程を用いた非線形ゆらぐ流体力学の検証

東京工業大学 理学院 物理学系 物理学コース
白井 聖人 (Masato USUI)

概要

2012年に H. van Beijeren[21]、2013年に H.Spohn[14] によって提唱された「非線形ゆらぐ流体力学」(Nonlinear Fluctuating Hydrodynamics) は、低次元系における異常輸送現象をよく説明する。非線形ゆらぐ流体力学は様々な現象論的仮定を含んだ理論であり、数値的な検証は為されている [9] 一方で、微視的な理論からの正当化は不十分である。2018年に Z.Chen, J.de Gier, I.Hiki and T.Sasamoto [7] によって、空間 1 次元の可解な確率模型である AHR 模型を対象とした非線形ゆらぐ流体力学の最初の理論的検証が達成された。結果の導出において鍵となるのは、AHR 模型における基準モードの分離であるが、先行研究 [7] においては具体的な議論は与えられていなかった。我々は、Fredholm 行列式の恒等式を利用する新たなアイデアを用いることで、明快で厳密な証明を完成させた [8]。本稿では、主に先行研究 [7] に基づいて確率模型を用いた非線形ゆらぐ流体力学の理論的検証について解説し、第 3.4 節に最新の結果について簡単に紹介する。本研究は Zeying Chen 氏、Jan de Gier 教授 (Melbourne 大学) 及び笹本智弘教授、日置伊織氏 (東京工業大学) との共同研究に基づくものである。

1 導入

物質中の熱伝導現象を記述するものとして、Fourier の法則が経験的に知られている。Fourier の法則は、局所平衡の仮定のもとで、空間座標 $\vec{r} \in \mathbb{R}^d$ 、時刻 t における温度分布が $T(\vec{r}, t)$ であるとき、熱流 $\vec{J}(\vec{r}, t)$ が

$$\vec{J}(\vec{r}, t) = -\kappa \vec{\nabla} T(\vec{r}, t) \quad (1.1)$$

に従って発展するということを主張する。ここで、 κ は \vec{r} と t に依存しない熱伝導度である。Fourier の法則から、外部とのエネルギーのやりとりがなく、物質の熱容量が C であると仮定すれば

$$\frac{\partial}{\partial t} T(\vec{r}, t) = \frac{\kappa}{C} \vec{\nabla}^2 T(\vec{r}, t) \quad (1.2)$$

が得られる。(1.2) は拡散方程式であるから、解として得られる温度分布 $T(\vec{r}, t)$ は Gauss 分布に従って拡散することがわかる。線形応答理論より、熱伝導度 κ は平衡状態における熱流の 2 点相関を用いて

$$\kappa = \frac{1}{k_B T^2} \lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t d\tau \lim_{V \rightarrow \infty} \frac{1}{V} \langle J(\tau); J(0) \rangle_{\text{eq}} \quad (1.3)$$

と表すこともできる。熱伝導度 κ が物理的意味を持つためには、(1.3) の右辺が収束する必要がある。

B.J.Alder and T.E.Wainwright が 1970 年に行った数値計算 [1]、および M.H.Ernst, E.H.Hauge and J.M.J.van Leeuwen が 1976 年に行ったモード結合理論に基づいた解析 [10] によって、カレントの相関関数が次のような遅い減衰を示すことが知られている。

$$\langle J(t); J(0) \rangle_{\text{eq}} \sim t^{-d/2} \quad (1.4)$$

ただし、 d は系の空間次元である。(1.3) の右辺にこれを代入すると、 $d = 1, 2$ の場合には積分が発散してしまうことがわかる。このような問題はロングタイムテールの問題と呼ばれる。ここで、サイズ N の有限系に対し、時間に関する積分を $\tau_c = N/v_s$ で打ち切ることになると、

$$\kappa \sim \int_0^{\tau_c} d\tau \tau^{-d/2} \sim \begin{cases} \sqrt{N} & d = 1 \\ \ln N & d = 2 \\ < \infty & d \geq 3 \end{cases} \quad (1.5)$$

が得られる [13]。特に、 $d = 1$ の場合については、 $\kappa \sim N^\alpha$ ($0 < \alpha < 1$) となるような異常輸送現象に対応していることがわかる。このような、熱伝導率 κ が系のサイズに依存し、Fourier の法則を破るような異常熱輸送は、カーボンナノチューブ、グラフェン、シリコンナノワイヤーなどを用いた実験によっても観測されている [6],[11],[22]。

このことから、異常輸送現象の性質を調べるにあたってカレントの相関関数の振る舞いを理解することが重要であることがわかる。H.Spohn は、Fermi-Pasta-Ulam 鎖と呼ばれる非調和鎖に対し、エネルギー、運動量および伸長の3つを保存量として局所平衡の仮定のもとで流体力学を考え、マクロな保存量のまわりの微小なゆらぎがある非線形確率微分方程式に従って時間発展することを仮定し、各基準モードについての定常2点相関関数を計算した [14],[19]。この理論は、非線形ゆらぐ流体力学 (Nonlinear Fluctuating Hydrodynamics) と呼ばれ、非平衡系における定常2点相関関数の振る舞いの予測を与える有効な理論として期待されている。

2 AHR 模型と非線形ゆらぐ流体力学

この節では、本研究で解析対象としている AHR 模型を導入し、AHR 模型への非線形ゆらぐ流体力学の適用を簡単に紹介する。この節の内容は、主に C.B.Mendl and H.Spohn[15] および Z.Chen, J.de Gier, I.Hiki and T.Sasamoto[7] に基づいている。

2.1 AHR 模型

AHR 模型とは、P.F.Arndt, T.Heinzel and V.Rittenberg によって導入された、1次元格子上に配置された2種類の粒子が、時間連続 Markov 連鎖に従って時間発展する確率模型である [2],[3],[16]。2種類の粒子をそれぞれ + 粒子, - 粒子とラベル付けする。+ と - 粒子は以下のルールに従って格子点を確率的に移動する。まず、各格子には最大でも1つの粒子しか存在できないとする。このことは、同種粒子間には排他的相互作用が働いていることを意味する。次に、各粒子は微小時間間隔 dt の間に以下のような確率で遷移とする。+ 粒子は右隣の格子が空洞の場合に αdt の確率で右隣の格子に、- 粒子は左隣の格子が空洞の場合に βdt の確率で左隣の格子に遷移とする。また、+ 粒子が - 粒子の左隣の格子に存在するとき、 dt の確率で + 粒子と - 粒子の位置が交換され、逆の場合は qdt の確率で交換されるものとする。空洞を 0 とラベル付けするとき、この規則は以下のようにまとめられる。

$$(+, 0) \rightarrow (0, +) \text{ with rate } \alpha \quad (2.1a)$$

$$(0, -) \rightarrow (-, 0) \text{ with rate } \beta \quad (2.1b)$$

$$(+, -) \rightarrow (-, +) \text{ with rate } 1 \quad (2.1c)$$

$$(-, +) \rightarrow (+, -) \text{ with rate } q \quad (2.1d)$$



図1 AHR 模型

次に、AHR 模型の確率分布の時間発展について考える。全格子数を $L \in \mathbb{N}$ とすると、全ての配置の集合は $\{0, +, -\}^L$ 、時刻 t で配置 $C \in \{0, +, -\}^L$ をとる確率 $P_t(C)$ と表す。さらに、左端から数えて i 番目の格子に二次元ベクトル空間 V_i を割り当て、 V_i の基底ベクトルを $|0\rangle_i, |+\rangle_i, |-\rangle_i$ のようにとる。これを用いると、系全体の空間は $V = V_1 \otimes \cdots \otimes V_L$ と表せ、その空間内で配置 $C = (i_1, \dots, i_L) \in \{0, +, -\}^L$ に対応するベクトルは

$$|C\rangle = |i_1\rangle_1 \otimes |i_2\rangle_2 \otimes \cdots \otimes |i_L\rangle_L \in V_1 \otimes V_2 \otimes \cdots \otimes V_L \quad (2.2)$$

である。このとき、確率分布ベクトル $|P_t\rangle = \sum_{C \in \{0, +, -\}^L} P_t(C) |C\rangle$ の時間発展はマスター方程式

$$\frac{d}{dt} |P_t\rangle = M |P_t\rangle \quad (2.3)$$

に従って時間発展する。AHR 模型のように、粒子の遷移が隣合う格子間でしか起こらない確率粒子系の Markov 行列は、空間 $V_i \otimes V_j$ のみに非自明に作用し、他の物理空間には単位行列として作用する局所 Markov 行列 $M_{i,j}$ の和として

$$M = \sum_{i=1}^{L-1} M_{i,i+1} + M_{L,1} \quad (2.4)$$

と表せる。AHR 模型の場合、局所 Markov 行列は

$$\begin{aligned}
M_{i,j} = & q|+\rangle_i\langle-| \otimes |- \rangle_j\langle+| + |- \rangle_i\langle+| \otimes |+\rangle_j\langle-| \\
& + \beta|0\rangle_i\langle+| \otimes |+\rangle_j\langle 0| + \alpha|- \rangle_i\langle 0| \otimes |0\rangle_j\langle-| \\
& - q|- \rangle_i\langle-| \otimes |+\rangle_j\langle+| - |+\rangle_i\langle+| \otimes |- \rangle_j\langle-| \\
& - \beta|+\rangle_i\langle+| \otimes |0\rangle_j\langle 0| - \alpha|0\rangle_i\langle 0| \otimes |- \rangle_j\langle-|
\end{aligned} \tag{2.5}$$

で与えられる。ただし、 ${}_j\langle i_j| = |i_j\rangle_j^T, i_j = \{0, +, -\}$ 。

AHR 模型は ASEP(非対称単純排他過程) に第 2 粒子を混入させた模型と解釈することもできる。実際、ラベルを $(+, 0, -) \rightarrow (1, 2, 0)$ と付け替えると、(2.1c) と (2.1d) は ASEP 粒子に 1 とラベル付けしたものと一致し、さらに、(2.1b) は 2 とラベル付けされた第 2 粒子が右隣の格子が空洞の場合に βdt の確率で右隣の格子に遷移すること、(2.1a) は ASEP 粒子が第 2 粒子の左隣にあるときに αdt の確率で交換することを表している。 $q = 0$ のときの AHR 模型は、対応する Yang-Baxter 方程式の解が知られており、周期的境界条件のもとで可解模型である [5]。

2.2 非線形ゆらぐ流体力学の AHR 模型への応用

第 1 節で述べたように、C.B.Mendl and H.Spohn は Fermi-Pasta-Ulam 鎖と呼ばれる非調和鎖に対して非線形ゆらぐ流体力学の理論による解析を行った [14],[15]。C.B.Mendl and H.Spohn はまた、LeRoux Lattice gas 模型への応用も行った [15]。LeRoux Lattice gas 模型は、AHR 模型においてパラメータを $\alpha = \beta = 1/2, q = 0$ のように特殊化した模型と同一視できる。ここでは、主に C.B.Mendl and H.Spohn[15] および Z.Chen, J.de Gier, I.Hiki and T.Sasamoto[7] に基づき、AHR 模型における非線形ゆらぐ流体力学について概説する。

確率変数 $\eta(j, t)$ を以下のように定義する。

$$\eta(j, t) = \begin{cases} -1 & \text{site } j \text{ is occupied by } - \text{ particle at time } t \\ 0 & \text{site } j \text{ is empty at time } t \\ 1 & \text{site } j \text{ is occupied by } + \text{ particle at time } t \end{cases} \tag{2.6}$$

このとき、

$$g_{\pm}(j, t) = \frac{|\eta(j, t)| \pm \eta(j, t)}{2} \tag{2.7}$$

は、 j 番目の格子が時刻 t で $+(-)$ 粒子に占有されているとき、 $g_+(j, t) = 1, g_-(j, t) = 0 (g_-(j, t) = 1, g_+(j, t) = 0)$ となるような確率変数である。外部との粒子の出入りがなような境界条件を課す場合は、 $\vec{g}(j, t) = (g_+(j, t), g_-(j, t))^T$ について粒子数の保存に対応する連続の方程式

$$\frac{d}{dt} \vec{g}(j, t) + \vec{J}(j+1, t) - \vec{J}(j, t) = 0 \tag{2.8}$$

が成り立つ。ただし、 $\vec{J}(j, t) = (J_+(j, t), J_-(j, t))^T$ の各成分は各粒子のカレントを表す確率変数であり、具体的にはデルタ関数で与えられる。つぎに我々は、(2.8) の流体力学極限をとることを考える。まず、各配置についての確率分布 $P_t(C)$ に関する $\vec{g}(j, t)$ のアンサンブル平均 $\langle \vec{g}(j, t) \rangle$ は、次の方程式に従うことがマスター方程式よりわかる。

$$\frac{d}{dt} \langle \vec{g}(j, t) \rangle + \vec{J}(j+1, t) - \vec{J}(j, t) = 0 \tag{2.9}$$

ただし、 $\vec{J}(j, t) = (J_+(j, t), J_-(j, t))^T$ の各成分は以下のように与えられる。

$$J_+(j, t) = \frac{1}{2} \langle g_+(j, t) [1 - g_+(j+1, t) - g_-(j+1, t)] \rangle - \langle g_+(j, t) g_-(j+1, t) \rangle \tag{2.10a}$$

$$J_-(j, t) = -\frac{1}{2} \langle g_-(j+1, t) [1 - g_+(j, t) - g_-(j, t)] \rangle - \langle g_-(j+1, t) g_+(j, t) \rangle \tag{2.10b}$$

ここで、平均場近似をとることで、 $g_{\pm}(j, t)$ についての 2 点相関を無視すると、

$$J_+(j, t) \simeq \frac{1}{2} \langle g_+(j, t) \rangle \langle [1 - g_+(j+1, t) - g_-(j+1, t)] \rangle - \langle g_+(j, t) \rangle \langle g_-(j+1, t) \rangle \tag{2.11a}$$

$$J_-(j, t) \simeq -\frac{1}{2} \langle g_-(j+1, t) \rangle \langle [1 - g_+(j, t) - g_-(j, t)] \rangle - \langle g_-(j+1, t) \rangle \langle g_+(j, t) \rangle \tag{2.11b}$$

さらに、双曲型スケーリング $(x, t') = (\epsilon j, \epsilon t)$ のもとで空間連続極限 $\epsilon \rightarrow 0$ を考える、すなわち、2 変数関数 $u_{\pm}(x, t')$ を用いて

$$\langle g_{\pm}(j, t) \rangle = u_{\pm}(\epsilon j, \epsilon t) \tag{2.12}$$

と表した上で極限 $\epsilon \rightarrow 0$ をとると、連続の方程式 (2.8) は $\vec{u}(x, t) = (u_+(x, t), u_-(x, t))^T$ についての方程式として

$$\frac{\partial}{\partial t'} \vec{u}(x, t') + \frac{\partial}{\partial x} \vec{J}(\vec{u}(x, t')) = 0 \quad (2.13)$$

のように書き換えられる。ただし、カレントベクトル $\vec{J}(\vec{u})$ は

$$\vec{J}(\vec{u}) = \begin{pmatrix} J_+(\vec{u}) \\ J_-(\vec{u}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}u_+(1-u_+-u_-) + u_+u_- \\ -\frac{1}{2}u_-(1-u_+-u_-) - u_+u_- \end{pmatrix} \quad (2.14)$$

で与えられる。なお、簡単のため (2.13) 中の t' は再び t と表記し直す。式 (2.13) は、マクロな粒子密度の時間発展を記述する Euler 方程式であり、本来ゆらぎ等の情報は含んでいない。非線形ゆらぐ流体力学では、粒子密度を $\vec{u} = \vec{\rho} + \vec{u}$ のように、マクロな粒子密度 $\vec{\rho}$ とそのまわりのゆらぎ \vec{u} に分けられるとし、さらにゆらぎ \vec{u} が次の確率微分方程式に従って時間発展すると仮定する。

$$\partial_t \vec{u} + \partial_x \left(A(\vec{\rho}) \vec{u} + \frac{1}{2} \sum_{\beta=\pm} (\vec{u}^T H^\beta(\vec{\rho}) \vec{u}) \vec{e}_\beta - D \partial_x \vec{u} + B \vec{\xi} \right) = 0 \quad (2.15)$$

ここで、 $\vec{\xi}(x, t) = (\xi_+(x, t), \xi_-(x, t))^T$ は

$$\langle \xi_\alpha(x, t) \xi_\beta(x', t') \rangle_\xi = \delta_{\alpha, \beta} \delta(x - x') \delta(t - t'), \quad \alpha, \beta = \pm \quad (2.16)$$

を満たす平均 0 のガウシアンホワイトノイズであり、行列 $A(\vec{\rho})$ と $H^\beta(\vec{\rho})$ は次のように与えられる。

$$(A(\vec{\rho}))_{\alpha, \beta} = \left. \frac{\partial J_\alpha(\vec{u})}{\partial u_\beta} \right|_{\vec{u}=\vec{\rho}}, \quad (H^\alpha(\vec{\rho}))_{\beta, \gamma} = \left. \frac{\partial^2 J_\alpha(\vec{u})}{\partial u_\beta \partial u_\gamma} \right|_{\vec{u}=\vec{\rho}}, \quad \alpha, \beta, \gamma = \pm \quad (2.17)$$

方程式 (2.15) の左辺の第 2 項および第 3 項はカレント $\vec{J}(\vec{\rho} + \vec{u})$ を $\vec{\rho}$ のまわりで展開したときの 2 次の微小量までを考えることで得られるものである。AHR 模型の場合、(2.14) から明らかなように $\vec{J}(\vec{u})$ は u_\pm について高々 2 次式であるから、 $\vec{\rho}$ のまわりで展開したところでそもそも 3 次以降の項は現れない。しかし、そうでない場合でも、非線形ゆらぐ流体力学では 3 次以降のゆらぎは無視できると仮定している。一方、第 4 項と第 5 項はそれぞれ拡散とノイズを表す項であり、現象論的に付け加えたものである。

$A(\vec{\rho})$ の対角化行列 R を、左から (2.15) にかけることで、 $\vec{\phi} = R \vec{u}$ についての方程式に書き換えることができる。

$$\partial_t \vec{\phi} + \partial_x \left(\text{diag}\{c_+, c_-\} \vec{\phi} + \sum_{\beta=\pm} (\vec{\phi}^T G^\beta(\vec{\rho}) \vec{\phi}) \vec{e}_\beta - \tilde{D} \partial_x \vec{\phi} + \tilde{B} \vec{\xi} \right) = 0 \quad (2.18)$$

ただし、 c_\pm は $A(\vec{\rho})$ の固有値である。 $\vec{\phi}$ は基準モードであり、 ϕ_+ と ϕ_- をそれぞれ + モードと - モードと呼ぶことにする。(2.18) を各基準モードについての式に書き換えると次のようになる。

$$\partial_t \phi_\alpha + \partial_x \left(c_\alpha(\vec{\rho}) \phi_\alpha + (\vec{\phi}^T G^\alpha(\vec{\rho}) \vec{\phi}) - (\tilde{D} \partial_x \vec{\phi})_\alpha + (\tilde{B} \vec{\xi})_\alpha \right) = 0, \quad \alpha = \pm \quad (2.19)$$

この式は、 $\phi_\alpha = \partial_x h_\alpha$ のように定義した関数 h_α についての方程式としてみると、第 2 項を変換 $x \rightarrow x - c_\alpha t$ によって消去すれば、 h_α が従う方程式は Coupled KPZ 方程式と呼ばれる方程式となっている。ここで、KPZ(Kardar-Parisi-Zhang) 方程式とは、界面成長における高さ関数 $h = h(x, t)$ の時間発展を記述する以下のような方程式である [12]。

$$\partial_t h = \frac{\lambda}{2} (\partial_x h)^2 + \nu \partial_x^2 h + \xi = 0 \quad (2.20)$$

(2.19) については、第 3 項にみられる行列 G^α は $G_{\alpha, \alpha}^\alpha$ 以外にも 0 でない成分があるため、各基準モードについて独立した KPZ 方程式にはなっていない。ところが、 $c_- < c_+$ の関係があることから、長時間極限においては各基準モードが分離していると仮定することができる。モード分離に関してはモード結合理論を用いたより詳細な議論が [19] で述べられている。

AHR 模型において、点 (x, t) での高さ関数 h_α に対応する量は、空間座標 x の点を時刻 t までの間に正の方向に通過した粒子の数 (積算カレント) のゆらぎの各基準モード方向の成分 $\vec{\psi}_\alpha \cdot (\vec{N}(x, t) - \vec{N}(x, t))$ である。したがって、長時間ではモードが分離するとすれば、積算カレントゆらぎの各基準モード方向成分は漸近的に $\vec{\psi}_\alpha \cdot (\vec{N}(x, t) - \vec{N}(x, t)) \sim \Gamma \xi t^{1/3}$ のように振る舞うと期待される。 Γ は定数、 ξ は初期条件に依存して決まる確率変数である。

以上が AHR 模型における非線形ゆらぐ流体力学であるが、ゆらぎ \vec{u} が従う方程式 (2.18) を得る過程には様々な物理的仮定があった。非調和鎖などいくつかの模型について、(2.15) に基づいて得られた結果に対して数値的には妥当性が確認されているが、理論的基礎づけは不十分である。先行研究 [7] および本研究 [8] の目的は、非線形ゆらぐ流体力学から得られる予想が正しいことを AHR 模型の厳密解を用いて検証することである。確率分布関数の厳密解を得ることが可能な初期条件として、step-Bernoulli 初期条件を課す。step-Bernoulli 初期条件は、無限個の + 粒子を原点より左側に密度 $\rho (< 1)$ の Bernoulli 分布に従って配置し、無限個の - 粒子を原点から右側に敷き詰めたような初期条件である。この初期条件のもと、原点における積算カレントのゆらぎの分布について考える。



図2 step-Bernoulli 初期条件

まず、マクロな粒子密度 $\bar{\rho}$ についての時間発展を考える。マクロな粒子密度が従う Euler 方程式 (2.13) は連鎖律より

$$\partial_t \bar{\rho}(x, t) + A(\bar{\rho}(x, t)) \partial_x \bar{\rho}(x, t) = 0 \quad (2.21)$$

とも書ける。step-Bernoulli 初期条件は、マクロに見れば

$$\bar{\rho}(x, 0) = \begin{cases} \bar{\rho}_l = \begin{pmatrix} \rho \\ 0 \end{pmatrix} & x \leq 0 \\ \bar{\rho}_r = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} & 0 < x \end{cases} \quad (2.22)$$

のように表すことができる。従って、マクロな粒子密度の時間発展は、(2.21) を境界条件 (2.22) のもとでの Riemann 問題として解くことで得られる [15]。得られる解から、原点は任意の時刻 t において - モードについての膨張波領域内にあるため、時刻 t における原点での - モード方向での積算カレントは、時刻 0 における原点での密度分布の響を受ける。初期条件が階段型密度分布で与えられているため、- モード方向の積算カレントは曲がった界面を初期条件とする界面成長の振る舞いと対応していると考えられ、

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{P}_{\infty, \infty} \left[\frac{\vec{\psi}_-(\bar{\rho}(0, t)) \cdot (\vec{N}(0, t) - \vec{N}(0, t))}{(\Gamma_-(\bar{\rho}(0, t))t)^{1/3}} \leq \eta_2 \right] = F_2(\eta_2) \quad (2.23)$$

に従うと予想される。一方、原点は + モードについての膨張波領域内の点ではないため、時刻 t での原点における + モード方向の積算カレントは、時刻 0 における原点より左側の密度分布からの影響を受けている。時刻 0 において + 粒子は原点より左側に Bernoulli 分布にしたがって配置されていることから、ゆらぎの大きさは $\mathcal{O}(t^{1/2})$ であり、Gauss 分布に従っていると考えることができる。これより、

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{P}_{\infty, \infty} \left[\frac{\vec{\psi}_+(\bar{\rho}(0, t)) \cdot (\vec{N}(0, t) - \vec{N}(0, t))}{(\chi(\rho)t)^{1/2}} \leq \eta_g \right] = F_G(\eta_g) \quad (2.24)$$

が予想される。ただし、 F_2 と F_G はそれぞれ GUE Tracy Widom 分布と Gauss 分布の累積分布関数である。GUE Tracy Widom 分布は、ランダム行列理論において、各要素の実部と虚部が Gauss 分布に従う確率変数であるような Hermite 行列の最大固有値分布として現れる確率分布である [20]。 F_2 の明示的な表式は (3.14), (3.15) で与えられる。

ここで、 $A(\bar{\rho})$ の左固有ベクトル $\vec{\psi}_\sigma(\bar{\rho})$ やマクロな積算カレント $\vec{N}(0, t)$ は、(2.21) の解から ρ, t の関数として得ることができる。従って、ミクロな積算カレントが $\vec{N}(0, t) = (n, -m)^T$ であるとすると、(2.23) と (2.24) は

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{P}_{\infty, \infty} [s_{-1}(n, m, t) \leq \eta_2] = F_2(\eta_2) \quad (2.25a)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{P}_{\infty, \infty} [s_{+1}(n, m, t) \leq \eta_g] = F_G(\eta_g) \quad (2.25b)$$

と表せる。ただし、

$$s_{-1}(n, m, t) := \frac{1}{c_2 t^{1/3}} \left((1 + \rho)n - (3 - \rho)m + \frac{1}{2}(1 - \rho)(1 - (1 - \rho)^2/4)t \right), \quad (2.26a)$$

$$s_{+1}(n, m, t) := \frac{1}{c_g t^{1/2}} (-2(2-\rho)n + 2\rho m + (2-\rho)(1-\rho)\rho t) \quad (2.26b)$$

および

$$c_2 = (3/32)^{1/3} (1-\rho)(3-\rho)^{2/3} (1+\rho)^{2/3} \quad (2.27a)$$

$$c_g = 2^{-1/2} 3(1-\rho)^{3/2} \sqrt{\rho(2-\rho)} \quad (2.27b)$$

これらのモードが独立であると仮定し、 $s_{-1}(n, m, t) = \eta_2$ と $s_{+1}(n, m, t) = \eta_g$ を n と m について解くと、結局

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{P}_{\infty, \infty}[N_+(t) = n_t, N_-(t) = -m_t] = F'_G(\eta_g) F'_2(\eta_2) \quad (2.28)$$

を得る。ただし、

$$n_t = j_+(\rho)t - \frac{1}{12(1-\rho)} \left(2\rho c_2 \eta_2 t^{1/3} + (3-\rho)c_g \eta_g t^{1/2} \right) \quad (2.29a)$$

$$m_t = j_-(\rho)t - \frac{1}{12(1-\rho)} \left(2(2-\rho)c_2 \eta_2 t^{1/3} + (1+\rho)c_g \eta_g t^{1/2} \right) \quad (2.29b)$$

であり、 $j_+(\rho) = \rho(3-\rho)^2/16$, $j_-(\rho) = (1+\rho)^2(2-\rho)/16$ である。この予想が正しいかどうかを、AHR 模型の厳密解を利用して確かめたい。しかしながら、粒子数が無限大の場合には Green 関数の厳密表示を得ることは困難であり、(2.28) の左辺を厳密に評価することは難しい。実は、[7] で述べられているように、 t が十分大きい場合には (2.28) から

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{P}_{n_t, m_t}[N_+(t) = n_t, N_-(t) = -m_t] = F_G(\eta_g) F_2(\eta_2) \quad (2.30)$$

が得られると予想されており、少なくとも数値的には正しいとみられている。このことを認め、(2.30) の左辺の厳密な表式を導出し、長時間極限で右辺に収束することが示すことができれば、この場合における非線形ゆらぐ流体力学の理論的検証となっている。次節で述べるように、(2.30) の左辺の確率分布については厳密な表式が得られる。

3 厳密解を用いた解析

この節では、前節で得られた非線形ゆらぐ流体力学による予想を、AHR 模型の厳密解を用いて検証する過程を概説する。この節の内容は、主に Z.Chen, J.de Gier, I.Hiki and T.Sasamoto[7] に基づいている。

3.1 確率分布の多重積分表示

パラメータの特殊化 $\alpha = \beta = 1/2, q = 0$ のもとの、マスター方程式 (2.3) の解である Green 関数を積分表示で得ることができる。+ 粒子と - 粒子の個数をそれぞれ n と m とし、+ 粒子の座標を左端から x_1, x_2, \dots, x_n 、- 粒子の座標を左端から y_1, y_2, \dots, y_m と表記する。ここで、初期配置が

$$x_1^{(0)} < \dots < x_n^{(0)} < y_1^{(0)} < \dots < y_m^{(0)} \quad (3.1)$$

であり、時刻 t での配置

$$y_1 < \dots < y_m < x_1 < \dots < x_n \quad (3.2)$$

となるような軌跡に対応する Green 関数は次のように与えられる。

$$\begin{aligned} G(\vec{x} - \vec{x}^{(0)}, \vec{y} - \vec{y}^{(0)}; t) &= \oint_0^n \prod_{j=1}^n \frac{dz_j}{2\pi i} \prod_{k=1}^m \frac{dw_k}{2\pi i} e^{\Lambda_{n,m} t} S(\{z\}, \{w\}) \\ &\times \det \left[\left(\frac{z_j - 1}{z_i - 1} \right)^{j-1} z_i^{x_j} \right]_{j=1}^n \prod_{j=1}^n z_j^{-x_j^{(0)} - 1} \det \left[\left(\frac{w_k - 1}{w_l - 1} \right)^{m-k} w_l^{-y_k} \right]_{k=1}^m \prod_{k=1}^m w_k^{y_k^{(0)} - 1} \end{aligned} \quad (3.3)$$

ただし、

$$\Lambda_{n,m} = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n (z_j^{-1} - 1) + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^m (w_k^{-1} - 1), \quad S(\{z\}, \{w\}) = \prod_{j=1}^n \prod_{k=1}^m \frac{1}{(z_j + w_k)/2} \quad (3.4)$$

である。確率 $P_{n,m,\rho}(t) := \mathbb{P}_{n,m}(N_+(t) = n, N_-(t) = -m)$ は、初期配置を step-Bernoulli 配置とし、 t における配置について Green 関数 (3.3) の和をとることによって次のように得られる。

$$P_{n,m,\rho}(t) = \oint_0 \prod_{j=1}^n \frac{dz_j}{2\pi i} \prod_{k=1}^m \frac{dw_k}{2\pi i} \frac{e^{\Lambda_{n,m,t}} \rho^n \Delta_n(-\vec{z}) \Delta_m(\vec{w}) \prod_{j=1}^n z_j^{n-j} \prod_{k=1}^m w_k^{k-1}}{\prod_{j=1}^n (z_j - 1)^{n+1-j} [1 - (1-\rho)z_j] \prod_{k=1}^m (w_k - 1)^k S_{n,m}(\vec{z}, \vec{w})} \quad (3.5)$$

ただし、

$$\Delta_n(\vec{z}) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (z_j - z_i), \quad \Delta_m(\vec{w}) = \prod_{1 \leq k < l \leq m} (w_l - w_k), \quad S_{n,m}(\vec{z}, \vec{w}) = \prod_{j=1}^n \prod_{k=1}^m \left[\frac{1}{2}(z_j + w_k) \right] \quad (3.6)$$

非線形ゆらぐ流体力学の予想 (2.30) を検証するためには、 n, m を (2.29) のようにスケールした上で $P_{n,m,\rho}(t)$ の長時間極限 $t \rightarrow \infty$ を調べる必要がある。しかしながら、式 (3.5) の右辺は $n + m$ 重積分であるから、この形のままで $n_t, m_t \rightarrow \infty (t \rightarrow \infty)$ における漸近解析を行うことは困難である。したがって、漸近解析を実行する前に (3.5) をさらに変形する必要がある。 $n < m + 4$ の条件のもとで、以下のように変形することができる。

$$P_{n,m,\rho}(t) = I_1(n, m, t) - I_z(n, m, t) \times I_2(n, m, t, \vec{z}) \quad (3.7)$$

ただし、

$$I_1(n, m, t) = \frac{(-1)^m}{m!} \oint_0 \prod_{k=1}^m \frac{dw_k}{2\pi i} \frac{e^{\Lambda_{0,m,t}} \Delta_m(\vec{w}) \Delta_m(-\vec{w})}{\prod_{k=1}^m (w_k - 1)^m [(1 + w_k)/2]^n} \quad (3.8a)$$

$$I_z(n, m, t) = \left(\frac{2(1-\rho)}{2-\rho} \right)^m \frac{e^{-\rho t/2}}{(1-\rho)^{n-1} (n-1)!} \oint_1 \prod_{j=1}^{n-1} \frac{dz_j}{2\pi i} \frac{e^{\Lambda_{n-1,0,t}} \Delta_{n-1}(\vec{z}) \Delta_{n-1}(-\vec{z}) \prod_{j=1}^{n-1} [1 - (1-\rho)z_j]}{\prod_{j=1}^{n-1} (z_j - 1)^n \prod_{j=1}^{n-1} [(1+z_j)/2]^m} \quad (3.8b)$$

$$I_2(n, m, t, \vec{z}) = \frac{(-1)^m}{m!} \oint_0 \prod_{k=1}^m \frac{dw_k}{2\pi i} \frac{e^{\Lambda_{0,m,t}} \Delta_m(\vec{w}) \Delta_m(-\vec{w})}{\prod_{k=1}^m (w_k - 1)^m} \prod_{k=1}^m \frac{1 + 1/(1-\rho)}{w_k + 1/(1-\rho)} \prod_{j=1}^{n-1} \prod_{k=1}^m \frac{1 + z_j}{w_k + z_j} \quad (3.8c)$$

であり、 $\vec{z} = (z_1, \dots, z_{n-1})$, $\vec{w} = (w_1, \dots, w_m)$ と表記した。式 (3.16) の右辺においては、便宜上第 2 項を $I_z \times I_2(\vec{z})$ と表記したが、ここでの記号 " \times " は通常の積ではないことに注意する必要がある。 I_z は $\{z\}$ 変数についての多重積分であり、 $I_2(\vec{z})$ は $\{z\}$ 変数に依存するため、実際には $I_2(\vec{z})$ は (3.8b) の右辺の積分の被積分関数に含まれている。先行研究 [7] では、(3.7) の右辺第 2 項が十分大きな t において

$$I_z \times I_2(\vec{z}) \sim I_z \times I_2(\vec{1}) \quad (3.9)$$

のように振る舞うという事実に加えて、

$$\lim_{t \rightarrow \infty} I_1 = F_2(\eta_2) \quad (3.10a)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} I_z = 1 - F_G(\eta_g) \quad (3.10b)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} I_2(\vec{1}) = F_2(\eta_2) \quad (3.10c)$$

を示すことによって、非線形ゆらぐ流体力学の予想 (2.30) の検証が行われた。式 (3.9) の右辺に見られる積 " \times " はもはや通常の積であり、この漸近挙動が異なる基準モード同士の分離に対応している。先行研究 [7] ではモード分離 (3.9) の具体的な証明については扱われていなかった。我々は、Fredholm 行列式の恒等式を利用してその厳密な証明を与えた。詳細な議論は [8] を参照されたい。式 (3.7) は未だ多重積分表示であり漸近解析は困難であるが、後述するように I_1 と I_2 は Fredholm 行列式として表すことができ、その表現においては $n_t, m_t \rightarrow \infty$ の極限を評価することができる。

3.2 Fredholm 行列式

この節では、Fredholm 行列式を導入する。 I 上の複素数値関数の集合 $L^2(I)$ が、 $\forall f \in L^2(I) : \int_I dx |f(x)|^2 < \infty$ を満たすとする。 $L^2(I)$ は、

$$(f, g) = \int_I dx f(x)^* g(x), \quad f, g \in L^2(I) \quad (3.11)$$

のように定義される内積 (\cdot, \cdot) について、Hilbert 空間である。ここで、積分演算子 $\hat{K} : L^2(I) \rightarrow L^2(I)$ を考える。 \hat{K} の $f \in L^2(I)$ への作用は、カーネル $K(\cdot, \cdot)$ を用いて

$$(\hat{K}f)(x) := \int_I dy K(x, y)f(y) \quad (3.12)$$

と表せる。ここで、演算子 \hat{K} は、 $\text{Tr}|\hat{K}| < \infty$ を満たすとき、トレースクラスであるという。ただし、 $|\hat{K}| := \sqrt{\hat{K}\hat{K}^*}$ であり、半正定値演算子 $\hat{A} \geq 0$ について演算子 $\sqrt{\hat{A}}$ は $\hat{B}^2 = \hat{A}$ を満たす半正定値演算子 $\hat{B} \geq 0$ として定義される [18]。トレースクラスの演算子 \hat{K} について、 $n \times n$ 行列における行列式との類似的概念として、Fredholm 行列式 $\det[1 + \lambda\hat{K}]_{L^2(I)}$ が定義される。 $I \subset \mathbb{R}$ のとき、Fredholm 行列式 $\det[1 + \lambda\hat{K}]$ は以下の明示的な表示を持つ [17]。

$$\det[1 + \lambda\hat{K}]_{L^2(I)} = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} \int_I dx_1 \cdots \int_I dx_k \det[K(x_i, x_j)]_{1 \leq i, j \leq k} \quad (3.13)$$

通常の行列式と同様に、積分方程式 $((1 + \lambda\hat{K})f)(x) = g(x)$ の解 $f(x)$ が一意に定まることが $\det\{1 + \lambda\hat{K}\}_{L^2(I)} \neq 0$ は同値である。 $I \subset \mathbb{Z}$ のときは式 (3.12) および (3.13) の右辺で積分 $\int_I dx$ を和 $\sum_{x \in I}$ に置き換えればよい。

このように定義した Fredholm 行列式を用いて、第 2.2 節で導入した GUE Tracy-Widom 分布の累積分布関数 F_2 は以下のように表せる。

$$F_2(\eta) = \det[1 - \hat{K}_2]_{L^2(\mathbb{R}_{\geq \eta})} \quad (3.14)$$

ただし、演算子 \hat{K}_2 のカーネル K_2 は

$$K_2(\xi, \zeta) = \int_0^{\infty} \text{Ai}(\xi + \kappa) \text{Ai}(\zeta + \kappa) d\kappa \quad (3.15)$$

3.3 漸近解析

式 (3.8a) と (3.8c) で定義される I_1 と $I_2(\bar{z})$ は Fredholm 行列式として表すことができる。

$$I_1 = \det[1 - \hat{K}^c]_{\ell^2(\mathbb{N})}, \quad I_2(\bar{z}) = \det[1 - \hat{K}^c(\bar{z})]_{\ell^2(\mathbb{N})} \quad (3.16)$$

演算子 \hat{K}^c と $\hat{K}^c(\bar{z})$ のカーネル $K^c(x, y)$ と $K^c(x, y, \bar{z})$ はそれぞれ以下のように与えられる。

$$K^c(x, y) := \sum_{k=0}^{m-1} \phi_k(x) \psi_k(y), \quad K^c(x, y, \bar{z}) := \sum_{k=0}^{m-1} \phi_k(x, \bar{z}) \psi_k(y, \bar{z}) \quad (3.17)$$

(3.17) に見られるように、自然数 m はカーネルを双直交多項式の和として表現した時の上限となっている。したがって、Fredholm 行列式の形式は $n_t, m_t \rightarrow \infty$ を考える上で $n + m$ 重積分形式よりも遥かに扱いやすい。 I_1 と $I_2(\bar{z})$ については上記のような Fredholm 行列式の表式を用いて (3.10) を示す。

まず、(3.7) の第 1 項 I_1 について考える。(2.29) のもとで $t \rightarrow \infty$ を評価するために、カーネル $K^c(x, y)$ を適切な形に再スケールをする必要がある。実数 ξ, ζ を $x = \lambda_c t^{1/3} \xi, y = \lambda_c t^{1/3} \zeta$ と定義すると、再スケールされたカーネル \bar{K}_t^c は以下のように定義される。

$$\bar{K}_t^c(\xi, \zeta) = (w_* + c)^{\lambda_c t^{1/3}(\xi - \zeta)} \lambda_c t^{1/3} K^c(\lambda_c t^{1/3} \xi, \lambda_c t^{1/3} \zeta) \quad (3.18)$$

ただし、 $w_* = (1 - \rho)/2, \lambda_c = (w_* + c)(6/((1 + \rho)(3 - \rho)))^{1/3}$ である。これを用いて、 I_1 は次のように書ける。

$$I_1 = \det[1 - \hat{K}]_{\ell(\mathbb{N})} = 1 + \sum_{k=1}^{m_t} \frac{(-1)^k}{k!} \sum_{x_1 \geq 1} \cdots \sum_{x_k \geq 1} \left(\frac{1}{\lambda_c t^{1/3}} \right)^k \det[\bar{K}_t^c(x_i/(\lambda_c t^{1/3}), x_j/(\lambda_c t^{1/3}))]_{1 \leq i, j \leq k} \quad (3.19)$$

この表式を用いて、(3.10a) を示したい。引数 $\xi, \zeta \in \mathbb{R}_{>0}$ を固定した場合、(3.18) で定義される $\bar{K}_t^c(\xi, \zeta)$ が $K_2(\xi + \eta_2, \zeta + \eta_2)$ に各点収束することは容易に示すことができる。しかしながら、(3.19) の右辺にはカーネル $\bar{K}_t^c(x_i, x_j)$ を要素とする $k \times k$ 行列式についての、 x_1, \dots, x_k に関する無限和があり、 $\lim_{t \rightarrow \infty} I_1$ を評価するためには、これらの無限和と長時間極限が交換可能であることを示さなければならない。このような問題は、A. Borodin, P.L. Ferrari and M. Prähofer [4] が用いた手法を応用する、すなわち、以下のような命題を示すことで解決することができる。

命題 1 (広義一様収束) L を任意の正の実数とする。カーネル $\bar{K}_t^c(\xi, \zeta)$ は有界区間 $[-L, L]^2$ 上で GUE カーネルに一様収束する。すなわち、

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \bar{K}_t^c(\xi, \zeta) = \int_0^\infty \text{Ai}(\xi + \eta_2 + \kappa) \text{Ai}(\zeta + \eta_2 + \kappa) d\kappa \quad (3.20)$$

命題 2 (一様上界) 十分大きい正の実数 $L, t > 0$ について、カーネル $\bar{K}_t^c(\xi, \zeta)$ の絶対値は非有界区間 $[0, \infty)^2 \setminus [0, L]^2$ 上で時刻 t に対して一様に以下のような上界を持つ。

$$|\bar{K}_t^c(\xi, \zeta)| \leq e^{-(\xi + \zeta)} \quad (3.21)$$

命題 1 より、非有界区間 \mathbb{R}^2 上で $\bar{K}_t^c(\xi, \zeta)$ は $K_2(\xi + \eta_2, \zeta + \eta_2)$ に各点収束することがいえる。また、 $z > 0$ について $|\text{Ai}(z)| \leq C_a e^{-az}$ を満たす $a \in \mathbb{R}_{>0}$ が存在する ($C_a \in \mathbb{R}_{>0}$ は a によって決まる定数) ため、不等式 (3.21) は $[-L, L]^2$ 上でも成立する。命題 2 より、十分大きな t で

$$M_t := \sum_{k=1}^{m_t} \frac{1}{k!} \sum_{x_1 \geq 1} \cdots \sum_{x_k \geq 1} \left(\frac{1}{\lambda_c t^{1/3}} \right)^k \left| \det \left[\bar{K}_t^c(x_i/(\lambda_c t^{1/3}), x_j/(\lambda_c t^{1/3})) \right]_{1 \leq i, j \leq k} \right| \leq \sum_{k=1}^{m_t} \frac{k^{k/2}}{k!} \quad (3.22)$$

が成立する。 $t \rightarrow \infty$ で $m_t \rightarrow \infty$ であり、かつ Stirling の公式より明らかに $\sum_{k=1}^\infty k^{k/2}/k! < \infty$ であるから、 $\lim_{t \rightarrow \infty} M_t < \infty$ である。(3.19) より、 $\left| \det \left[1 - \hat{K} \right]_{\ell(\mathbb{N})} \right| < 1 + M_t$ であるから、 $\lim_{t \rightarrow \infty} \det \left[1 - \hat{K} \right]_{\ell(\mathbb{N})} < \infty$ であることがわかる。これより、極限操作 $\lim_{t \rightarrow \infty}$ は x_1, \dots, x_k に関する無限和と交換することができ、さらに Riemann 和 $\sum_{x_i \geq 1} (\lambda_c t^{1/3})^{-1}$ を Riemann 積分 $\int_0^\infty d\xi_i$ に置き換えることによって、以下の結論を得る。

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} \det \left[1 - \hat{K} \right]_{\ell(\mathbb{N})} &= 1 + \sum_{k=1}^\infty \frac{(-1)^k}{k!} \sum_{x_1 \geq 1} \cdots \sum_{x_k \geq 1} \lim_{t \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{\lambda_c t^{1/3}} \right)^k \det \left[\bar{K}_t^c(x_i/(\lambda_c t^{1/3}), x_j/(\lambda_c t^{1/3})) \right]_{1 \leq i, j \leq k} \\ &= 1 + \sum_{k=1}^\infty \frac{(-1)^k}{k!} \int_{\eta_2}^\infty d\xi_1 \cdots \int_{\eta_2}^\infty d\xi_k \det [K_2(\xi_i, \xi_j)]_{1 \leq i, j \leq k} \\ &= \det \left[1 - \hat{K}_2 \right]_{\ell(\mathbb{R}_{\geq \eta_2})} \end{aligned} \quad (3.23)$$

次に、(3.7) の第 2 項について考える。前述したように、第 2 項についてモード分離 (3.9) を仮定すると、式 (3.8b) で与えられる I_z は、スケール (2.29) のもとでの長時間極限が Gauss 分布の累積分布関数に収束する形に変形することができ、(3.10b) が示すことができる。演算子 $\hat{K}(\vec{1})$ についても、命題 1 と 2 と同様の命題が成り立つことを示すことができるため、(3.10c) を得る。

3.4 基準モード分離の厳密証明

我々は、3.1 節でも述べたように、先行研究 [7] では具体的な証明が与えられていなかったモード分離 (3.9) について、Fredholm 行列式の恒等式を利用して厳密な証明を与えた。具体的には、以下の命題を証明した。

命題 3 $n < m + 4$ を満たす任意の $n, m \in \mathbb{N}$ について、以下の等式が成り立つ。

$$I_z \times \det \left[1 - \hat{K}^c(\vec{z}) \right]_{\ell^2(\mathbb{N})} = I_z \times \det \left[1 - \hat{K}^c(\vec{1}) \right]_{\ell^2(\mathbb{N})} + R(n, m, \rho) \quad (3.24)$$

また、関数 $R(n, m, \rho)$ はスケール (2.29) に基づいた長時間極限で 0 に収束する。

$$\lim_{t \rightarrow \infty} R(n_t, m_t, \rho) = 0 \quad (3.25)$$

この命題の証明については [8] を参照されたい。

参考文献

- [1] B. J. Alder and T. E. Wainwright, *Decay of the velocity autocorrelation function*, Phys. Rev. A **1** (1970), 18–21.
- [2] P. F. Arndt, T. Heinzl, and V. Rittenberg, *Spontaneous breaking of translational invariance in one-dimensional stationary states on a ring*, J. Phys. A: Math. Gen. **31** (1998), L45.

- [3] ———, *Spontaneous breaking of translational invariance and spatial condensation in stationary states on a ring: 1. the neutral system*, J. Stat. Phys. **97** (1999), 1–66.
- [4] A. Borodin, P. L. Ferrari, and M. Prähofer, *Fluctuations in the discrete tasep with periodic initial configurations and the airy1 process*, Int. Math. Res. Papers **2007** (2007).
- [5] L. Cantini, *Algebraic bethe ansatz for the two species asep with different hopping rates*, J. Phys. A: Math. Theor. **41** (2008), 095001.
- [6] C-W. Chang, D. Okawa, H. Garcia, A. Majumdar, and A. Zettl, *Breakdown of fourier's law in nanotube thermal conductors*, Physical review letters **101** (2008), 075903.
- [7] Z. Chen, J. de Gier, I Hiki, and T. Sasamoto, *Exact confirmation of 1d nonlinear fluctuating hydrodynamics for a two-species exclusion process*, Phys. Rev. Lett. **120** (2018), 240601.
- [8] Z. Chen, J. de Gier, I. Hiki, T. Sasamoto, and M. Usui, *in preparation*.
- [9] S. G. Das, A. Dhar, K. Saito, C. B. Mendl, and H. Spohn, *Numerical test of hydrodynamic fluctuation theory in the fermi-pasta-ulam chain*, Phys. Rev. E **90** (2014), 012124.
- [10] M. H. Ernst, E. H. Hauge, and J. M. J. van Leewen, *Asymptotic time behavior of correlation functions. ii. kinetic and potential terms*, J. Stat. Phys. **15** (1976).
- [11] S. Ghosh, W. Bao, D. L Nika, S. Subrina, E. P Pokatilov, C. N. Lau, and A. A Balandin, *Dimensional crossover of thermal transport in few-layer graphene*, Nature materials **9** (2010), 555–558.
- [12] M. Kardar, G. Parisi, and Y-C. Zhang, *Dynamic scaling of growing interfaces*, Phys. Rev. Lett. **56** (1986), 889–892.
- [13] S. Lepri, R. Livi, and A. Politi, *Thermal conduction in classical low-dimensional lattices*, Phys. Rep. **377** (2003), 1–80.
- [14] C. B. Mendl and H. Spohn, *Dynamic correlators of fermi-pasta-ulam chains and nonlinear fluctuating hydrodynamics*, Phys. Rev. Lett. **111** (2013), 230601.
- [15] ———, *Shocks, rarefaction waves, and current fluctuations for anharmonic chains*, J. Stat. Phys. **166** (2017), 841–875.
- [16] V. Rittenberg P. F. Arndt, T. Heinzl, *Spontaneous breaking of translational invariance and spatial condensation in stationary states on a ring: 2. the charged system and the two-component burgers equations*, J. Stat. Phys. **107** (2002), 989–1013.
- [17] M. Reed, *Analysis of operators*, vol. 4, Academic press, 1978.
- [18] M. Reed and B. Simon, *Methods of modern mathematical physics. vol. 1. functional analysis*, Academic New York, 1980.
- [19] H. Spohn, *Nonlinear fluctuating hydrodynamics for anharmonic chains*, Journal of Statistical Physics **154** (2014), 1191–1227.
- [20] C. A. Tracy and H. Widom, *Level-spacing distributions and the airy kernel*, Comm. Math. Phys. **159** (1994), 151–174.
- [21] H. van Beijeren, *Exact results for anomalous transport in one-dimensional hamiltonian systems*, Phys. Rev. Lett. **108** (2012), 180601.
- [22] N. Yang, G. Zhang, and B. Li, *Violation of fourier's law and anomalous heat diffusion in silicon nanowires*, Nano Today **5** (2010), 85–90.