Affine Super Yangians and rectangular W-superalgebras

京都大学大学院 理学研究科 数学・数理解析専攻　数理解析系
上田衛 (MAMORU UEDA)

概要

講演者はアファインスーパーヤンギアンから rectangular W 代数の普遍包絡代数への全射写像の構成について説明を行う。この結果は、A 型の有限型ヤンギアンから A 型の rectanugular 有限 W 代数への全射写像を構成した Ragoucy-Sorba の結果のスーパーアファイン版である。

1　背景

1980 年代から物理学者と数学者の双方により W 代数の研究が開始された。W（スーパー）代数 $\mathcal{W}^k(\mathfrak{g}, f)$ は

$$\begin{cases} \mathfrak{g}; \text{有限次元簡約 (スーパー) リー代数}, \\ f; \mathfrak{g} \text{ の (even) な冪零元}, \\ k; \text{レベルと呼ばれる複素数} \end{cases}$$

に付随する頂点代数であり、ヴィラソロ代数の一般化となっている。具体例を二つの場合に挙げておく。

Example 1.1.
1. $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(2), f \neq 0$ の時、$\mathcal{W}^k(\mathfrak{g}, f) =$ ヴィラソロ代数。
2. $f = 0$ の時、$\mathcal{W}^k(\mathfrak{g}, f) = V^k(\mathfrak{g})$; アフィン頂点代数。

W(スーパー) 代数の難点の一つは、定義関係式が複雑すぎて直接書き下すことが非常に難しいことがある。その難点は、W(スーパー) 代数 $\mathcal{W}^k(\mathfrak{g}, f)$ の有限次元版である有限 W(スーパー) 代数 $\mathcal{W}^{\mathrm{fin}}(\mathfrak{g}, f)$ では A 型の場合に解消されている ([4]　etc.)。[4] で Brundan と Kleshchev は、$\mathfrak{g}$ が A 型の場合に、「ヤンギアン」と呼ばれるホップ代数を使用して、この問題を解決した。

ヤンギアンは Drinfeld([6],[7]) により量子ヤンバクスター方程式を解く道具として導入された。有限次元単純リー代数 $\mathfrak{g}$ に付随するヤンギアン $Y_h(\mathfrak{g})$ は、以下の性質を持ち、量子群と呼ばれるものの一種である。すなわち、

1. $Y_h(\mathfrak{g})$ は $\mathfrak{g}$ と複素数 h により定まるホップ代数である。
2. $h = 0$ と定めると、カレント代数 $\mathfrak{g} \otimes \mathbb{C}[u]$ と一致する。

Brundan と Kleshchev は $\mathfrak{g}$ が $\mathfrak{gl}(n)$,f が任意の冪零元の場合に、A 型のヤンギアンの部分代数である shifted ヤンギアンの商代数として $\mathfrak{g}$ と f に付随する有限 W 代数を書き下した。[4] の論文のより特別な場合、すなわち、

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}_{nl} = \mathfrak{gl}_n \otimes \mathfrak{gl}_l, \qquad f = \begin{pmatrix} O_n & & & & \\ 1_n & O_n & & 0 & \\ O_n & 1_n & \ddots & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \\ O_n & \cdots & O_n & 1_n & O_n \end{pmatrix} \tag{1.2}$$

の場合に関しては Ragoucy と Sorba による先行研究 [14] がある。ただし、O_n(resp. 1_n) は n 次の零 (resp.

単位) 行列である。

Theorem 1.3 (Ragoucy-Sorba, [14])**.** ヤンギアン $Y_h(\mathfrak{sl}(n))$ から (1.2) に付随する有限 W 代数 $\mathcal{W}^{fin}(\mathfrak{g}, f)$ への全射が存在する。

本講演では、この結果のスーパーアファイン版の構成を行う。

2 ヤンギアン

有限次元単純リー代数に付随するヤンギアンは量子群として定義することが出来たが、一般の対称化可能カッツムーディーリー代数に付随するヤンギアンを量子群として定義することが出来るかということは未だに未解決の問題になっている。しかし、アファインリー代数 $\widehat{\mathfrak{sl}}(n)$ の場合には Guay([8]) が量子群として構成している。(より一般にアファインリー代数に付随するヤンギアンの量子群としての構成は [10],[19],[2] で完成している。)

まず、アファインリー代数 $\widehat{\mathfrak{sl}}(n)$ について復習をする。$\widehat{\mathfrak{sl}}(n)$ は無限次元のリー代数であり、次のような構成法を持つ。

ベクトル空間:

$$\widehat{\mathfrak{sl}}(n) = \mathfrak{sl}(n) \otimes \mathbb{C}[u^{\pm 1}] \oplus \mathbb{C}c$$

commutator relation

$$[x \otimes u^t, y \otimes u^s] = [x, y] \otimes u^{t+s} + \delta_{t+s,0} t\mathrm{tr}(xy)c,$$
$$c \text{ は中心元.}$$

$\widehat{\mathfrak{sl}}(n)$ は Chevalley generator と呼ばれる生成元を用いて次のような表示を与えることが出来る。

生成元: $\{x_i^{\pm}, h_i \mid 0 \leq i \leq n-1\}$

commutator relation:

$$[h_i, h_j] = 0, [h_i, x_j^{\pm}] = \pm a_{i,j} x_j^{\pm},$$
$$[x_i^+, x_j^-] = \delta_{ij} h_i, \mathrm{ad}(x_i^{\pm})^{1-a_{i,j}} x_j^{\pm} = 0, (i \neq j)$$

where $a_{ij} = \begin{cases} 2 & \text{if } i = j, \\ -1 & \text{if } i = j \pm 1, \\ 0 & \text{otherwise,} \end{cases}$

この表示を用いると、カレント代数 $\mathfrak{g}[u]$ の普遍包絡代数は以下のような表示を持つ。

生成元　$\{x_{i,s}^{\pm}, h_{i,s} \mid 0 \leq i \leq n-1, s \in \mathbb{Z}_{\geq 0}\}$

定義関係式

$$[h_{i,s}, h_{j,r}] = 0,$$
$$[h_{i,0}, x_{j,s}^{\pm}] = \pm(\alpha_i, \alpha_j) x_{j,s}^{\pm},$$
$$[x_{i,r}^+, x_{j,s}^-] = \delta_{ij} h_{i,r+s},$$
$$[h_{i,r+1}, x_{j,s}^{\pm}] - [h_{i,r}, x_{j,s+1}^{\pm}] = 0,$$
$$[x_{i,r+1}^{\pm}, x_{j,s}^{\pm}] - [x_{i,r}^{\pm}, x_{j,s+1}^{\pm}] = 0,$$
$$\sum_{\sigma \in S_{1-a_{ij}}} [x_{i,r_{\sigma(1)}}^{\pm}, \cdots, [x_{i,r_{\sigma(1-a_{ij})}}^{\pm}, x_{j,s}^{\pm}]] = 0.$$

ここで、$x_{i,s}^{\pm}$ と $h_{i,s}$ はそれぞれ $x_i^{\pm} \otimes u^s$,$h_i \otimes u^s$ に対応する。(正確に言えば中心拡大の普遍包絡代数になるが、ここでは簡単のためにカレント代数自身とする。)

これを変形した Guay's affine Yangian と呼ばれるヤンギアンの定義を述べる。

Definition 2.1. $Y_{\varepsilon_1,\varepsilon_2}(\widehat{\mathfrak{sl}}(n))$ は $\mathbb{C}$ 上の結合代数で、以下の生成元と定義関係式を持つ結合代数である。
<u>生成元</u>: $\{x^{\pm}_{i,s}, h_{i,s} \mid 0 \leq i \leq n-1, s \in \mathbb{Z}_{\geq 0}\}$
<u>定義関係式</u>:

$$[h_{i,r}, h_{j,s}] = 0, \quad [x^{+}_{i,r}, x^{-}_{j,s}] = \delta_{ij} h_{i,r+s}, \quad [h_{i,0}, x^{\pm}_{j,r}] = \pm a_{ij} x^{\pm}_{j,r},$$

$$\sum_{w \in \mathfrak{S}_{1-a_{ij}}} [x^{\pm}_{i,r_{w(1)}}, [x^{\pm}_{i,r_{w(2)}}, \dots, [x^{\pm}_{i,r_{w(1-a_{ij})}}, x^{\pm}_{j,s}] \dots]] = 0 \quad (i \neq j),$$

$$[h_{i,r+1}, x^{\pm}_{j,s}] - [h_{i,r}, x^{\pm}_{j,s+1}] = \pm a_{ij} \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{2} \{h_{i,r}, x^{\pm}_{j,s}\} - m_{ij} \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{2} [h_{i,r}, x^{\pm}_{j,s}],$$

$$[x^{\pm}_{i,r+1}, x^{\pm}_{j,s}] - [x^{\pm}_{i,r}, x^{\pm}_{j,s+1}] = \pm a_{ij} \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{2} \{x^{\pm}_{i,r}, x^{\pm}_{j,s}\} - m_{ij} \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{2} [x^{\pm}_{i,r}, x^{\pm}_{j,s}].$$

ただし、$a_{ij} = \begin{cases} 2 & \text{if } i = j, \\ -1 & \text{if } i = j \pm 1, \\ 0 & \text{otherwise,} \end{cases} \quad m_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{if } j = i-1, \\ -1 & \text{if } j = i+1, \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$ とする。

[9],[8],[13],[12] により以下の特徴を持つことが示されている。

1. $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0$ とすると、$Y_{0,0}(\widehat{\mathfrak{sl}}(n))$ はカレント代数 $\widehat{\mathfrak{sl}}(n)[u]$ に一致する。
2. $Y_{\varepsilon_1,\varepsilon_2}(\widehat{\mathfrak{sl}}(n))$ はホップ代数である。
3. "evaluation map" と呼ばれる $Y_{\varepsilon_1,\varepsilon_2}(\widehat{\mathfrak{sl}}(n))$ から $U(\widehat{\mathfrak{gl}}(n))$ の degreewise completion への全射準同型写像が存在する。

このスーパー版はアファインスーパーヤンギアンと呼ばれ、[17] で導入された。まず、スーパーリー代数の定義について述べる。$\mathfrak{g}$ がスーパーリー代数であるとは以下のような性質を持つ場合である。

1. $\mathfrak{g}$ は $\mathfrak{g}_0$ と $\mathfrak{g}_1$ という二つの部分空間への分解が与えられている。それぞれ、$\mathfrak{g}$ の even 部分、odd 部分と呼ぶ。また、$v \in \mathfrak{g}_i$ の時、$p(v) = i$ と定め、v の parity という。
2. $\mathfrak{g}$ には双線形写像 $[\ ,\ ]$ が入り、以下の条件を満たす；

$$[\mathfrak{g}_i, \mathfrak{g}_j] \subset \mathfrak{g}_{i+j} (i, j \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}),$$
$$[y, x] = (-1)^{p(x)p(y)} [x, y],$$
$$[x, [y, z]] = (-1)^{p(x)p(y)} [y, [x, z]] + [[x, y], z].$$

この最たる具体例が $\mathfrak{gl}(n)$ と $\mathfrak{sl}(n)$ である。この二つのスーパーリー代数は次のように定義される。
<u>次数付きベクトル空間</u>

$$\mathfrak{gl}(m|n) = \left\{ \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \middle| A \in \mathfrak{gl}_m, B \in M_{m,n}(\mathbb{C}), C \in M_{n,m}(\mathbb{C}), D \in \mathfrak{gl}_n \right\},$$
$$\mathfrak{sl}(m|n) = \left\{ \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in \mathfrak{gl}(m|n) \middle| tr(A) - tr(D) = 0 \right\},$$

A と D にあたる部分が even、B と C にあたる部分が odd にあたるように取る。
<u>the commutator relation</u>

$$[E_{i,j}, E_{k,l}] = \delta_{j,k} E_{i,l} - \delta_{i,l} (-1)^{(p(i)+p(j))(p(k)+p(l))} E_{k,j}$$

where

$$p(i)=\begin{cases}0 \text{ if } 1\le i\le m,\\ 1 \text{ if } m+1\le i\le m+n.\end{cases}$$

Definition 2.2. $Y_{\varepsilon_1,\varepsilon_2}(\widehat{\mathfrak{sl}}(m|n))$ は $\mathbb{C}$ 上の結合代数で、以下の生成元と定義関係式を持つスーパー結合代数である。

<u>生成元</u> $\{x^{\pm}_{i,s}, h_{i,s}\mid 0\le i\le m+n-1, s\in\mathbb{Z}_{\ge 0}\}$

ただし、$x^{\pm}_{0,s}$ と $x^{\pm}_{m,s}$ は odd, その他の元は even とする。

<u>定義関係式</u>

$$[h_{i,r},h_{j,s}]=0,\qquad [x^+_{i,r},x^-_{j,s}]=\delta_{ij}h_{i,r+s},\qquad [h_{i,0},x^{\pm}_{j,r}]=\pm a_{ij}x^{\pm}_{j,r},$$

$$[h_{i,r+1},x^{\pm}_{j,s}]-[h_{i,r},x^{\pm}_{j,s+1}]=\pm a_{ij}\frac{\varepsilon_1+\varepsilon_2}{2}\{h_{i,r},x^{\pm}_{j,s}\}-m_{ij}\frac{\varepsilon_1-\varepsilon_2}{2}[h_{i,r},x^{\pm}_{j,s}],$$

$$[x^{\pm}_{i,r+1},x^{\pm}_{j,s}]-[x^{\pm}_{i,r},x^{\pm}_{j,s+1}]=\pm a_{ij}\frac{\varepsilon_1+\varepsilon_2}{2}\{x^{\pm}_{i,r},x^{\pm}_{j,s}\}-m_{ij}\frac{\varepsilon_1-\varepsilon_2}{2}[x^{\pm}_{i,r},x^{\pm}_{j,s}],$$

$$\sum_{w\in\mathfrak{S}_{1+|a_{ij}|}}[x^{\pm}_{i,r_{w(1)}},[x^{\pm}_{i,r_{w(2)}},\dots,[x^{\pm}_{i,r_{w(1-a_{ij})}},x^{\pm}_{j,s}]\dots]]=0(i\neq j),$$

$$[x^{\pm}_{i,r},x^{\pm}_{i,s}]=0\ (i=0,m),$$

$$[[x^{\pm}_{i-1,r},x^{\pm}_{i,0}],[x^{\pm}_{i,0},x^{\pm}_{i+1,s}]]=0\ (i=0,m).$$

ただし、

$$p(i)=\begin{cases}0 \text{ if } 1\le i\le m,\\ 1 \text{ if } m+1\le i\le m+n,\end{cases}$$

$$a_{ij}=\begin{cases}(-1)^{p(i)}+(-1)^{p(i+1)} \text{ if } i=j,\\ -(-1)^{p(i+1)} \text{ if } j=i+1,\\ -(-1)^{p(i)} \text{ if } j=i-1,\\ 0 \text{ otherwise,}\end{cases}\qquad m_{i,j}=\begin{cases}-(-1)^{p(i+1)} \text{ if } i=j+1,\\ (-1)^{p(i)} \text{ if } i=j-1,\\ 0 \text{ otherwise,}\end{cases}$$

とおく。

[17] と [20] により、以下の性質が知られている。

1. $Y_{\varepsilon_1,\varepsilon_2}(\widehat{\mathfrak{sl}}(m|n))$ はホップ代数である.
2. $\varepsilon_1=\varepsilon_2=0$ とおくと、$Y_{0,0}(\widehat{\mathfrak{sl}}(m|n))$ はカレント代数 $\widehat{\mathfrak{sl}}(m|n)[u]$ の普遍包絡代数である。
3. "evaluation map" と呼ばれる $Y_{\varepsilon_1,\varepsilon_2}(\hat{\mathfrak{sl}}(m|n))$ から $U(\hat{\mathfrak{gl}}(m|n))$ の degreewise completion への全射準同型写像が存在する。

3 W 代数

頂点代数とは

$$\begin{cases}V: \text{ベクトル空間 「状態空間」},\\ |0\rangle\in V \text{ 「単位元」},\\ \partial\in\mathrm{End}(V) \text{ 「translation operator」},\\ \forall u\in V, Y(u,z)=\sum_{n\in\mathbb{Z}}u_{(n)}z^{-n-1}\in\mathrm{End}(V)((z)); \text{線形写像 「場」},\end{cases}$$

というデータの集合であり、

$$Y(|0\rangle,z)=\mathrm{id},\quad \forall u\in V, Y(u,z)|0\rangle=u+V[[z]],$$

$$\partial|0\rangle = 0, \quad [\partial, Y(u,z)]v = \frac{d}{dz}Y(u,z)v,$$
$$\forall u, v \in V, \quad Y(u,z), Y(v,z) \text{ は互いに局所的である}.$$

という条件を持つ。

互いに局所的であるという条件をより詳しく見る。V を任意のベクトル空間、$a(z)$ と $b(z)$ を $\mathrm{End}(V)((z))$ の元とする。この時、

$$\begin{aligned} a(z), b(z) \text{ が互いに局所的である。} &\Leftrightarrow N >> 0, \quad (z-w)^N[a(z), b(w)] = 0, \\ &\Leftrightarrow \exists \{c_i(z)\}_{0 \le i \le N-1}; \text{ 場 s.t.} \\ &\qquad [a(z), b(w)] = \sum_{j=0}^{N-1} c_j(w) \frac{\partial^j}{j! \partial^j w} \sum_{n \in \mathbb{Z}} z^{-n-1} w^n. \end{aligned} \tag{3.1}$$

$a(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_{(n)} z^{-n-1}, b(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} b_{(n)} z^{-n-1}$ とすると、(3.1) を次のように書き直すことが出来、OPE (operator product expansion) と呼ぶ。

$$a(z)b(w) \sim \sum_{j=0}^{N-1} \frac{c_j(w)}{(z-w)^{j+1}}.$$

特に、V が頂点代数の時、

$$Y(u,z)Y(v,w) \sim \sum_{j \ge 0} \frac{Y(u_{(j)}v, w)}{(z-w)^j}, \tag{3.2}$$
$$Y(u_{(j)}v, w) = \mathrm{Res}_w (z-w)^j [Y(u,z), Y(v,w)]. \tag{3.3}$$

が成り立つ。この二つの式はそれぞれ

$$(3.2) \Leftrightarrow [u_{(a)}, v_{(b)}] = \sum_{r \ge 0} \binom{a}{r} (u_{(r)}v)_{(a+b-r)},$$
$$(3.3) \Leftrightarrow (u_{(m)}v)_{(n)}w = \sum_{i \ge 0} \binom{a}{i} (-1)^i (u_{(a-i)}(v_{(b+i)}w) - (-1)^{p(u)p(v)}(-1)^a v_{(a+b-i)}(u_{(i)}w))$$

と書き直せる。これらは頂点代数の普遍包絡代数の構成のところに関係してくる。

頂点代数の具体例として最も簡単なものの一つにアファイン頂点代数というものがある。

Example 3.4.
$$\begin{cases} \mathfrak{g}; \text{有限次元スーパーリー代数}, \\ \kappa; \mathfrak{g} \text{ の内積}, \\ \hat{\mathfrak{g}} = \mathfrak{g}[t^{\pm 1}] \oplus \mathbb{C}x; \mathfrak{g} \text{ の } \kappa \text{ に付随するアファイン化}, \\ \mathbb{C}_1; \mathfrak{g}[t] \oplus \mathbb{C}x \text{ の一次元表現で、} \mathfrak{g}[t] \text{ が } 0\text{、} x \text{ が } 1 \text{ で作用するもの}. \end{cases}$$

とおく。今、$V^\kappa(\mathfrak{g})$ を $U(\hat{\mathfrak{g}}) \otimes_{U(\mathfrak{g}[t] \oplus \mathbb{C}x)} \mathbb{C}_1 \cong U(\mathfrak{g}[t^{-1}]t^{-1})$ とおくと、$V^\kappa(\mathfrak{g})$ は

$$|0\rangle = 1, \partial(at^s) = -sat^{s-1}, a(z) := Y(at^{-1}, z) = \sum_{s \in \mathbb{Z}} at^{-s}z^s,$$
$$a(z)b(w) \sim \frac{[a,b]}{(z-w)} + \frac{\kappa(a,b)}{(z-w)^2}$$

という頂点代数の構造を持ち、アファイン頂点代数と呼ばれる。

このアファイン頂点代数を用いて、今回の主役である rectangular W スーパー代数の定義を述べる (この述べ方は [11] による)。以後、$\mathfrak{g}$ と f を次のように固定する。

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}(ml|nl) = \mathfrak{gl}(m|n) \otimes \mathfrak{gl}_l,$$

$$f = \begin{pmatrix} O_{m+n} & & & & \\ 1_{m+n} & O_{m+n} & & 0 & \\ O_{m+n} & 1_{m+n} & \ddots & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \\ O_{m+n} & \cdots & O_{m+n} & 1_{m+n} & O_{m+n} \end{pmatrix},$$

ただし、O_{m+n} (resp. 1_{m+n}) は $(m|n) \times (m|n)$-零 (resp. 単位) 行列とする。この $\mathfrak{g}$ と f に付随する W スーパー代数 $\mathcal{W}^k(\mathfrak{g}, f)$ に rectangular W スーパー代数と呼び、$\mathcal{W}^k(\mathfrak{gl}(ml|nl), (l^{(m|n)}))$ と書く。特に、$(m, n) = (1, 0)$ の時、W 代数を principal W 代数と呼ぶ。

Kac-Roan-Wakimoto ([11]) の結果により、$\mathcal{W}^k(\mathfrak{gl}(ml|nl), (l^{(m|n)}))$ は以下のようなスーパーリー代数 $\mathfrak{b}$ とその不変対称内積 κ を取ると、$V^\kappa(\mathfrak{g})$ の部分代数として実現される;

$$\mathfrak{b} = \bigoplus_{s \geq t} \bigoplus_{1 \leq i,j \leq m+n} e_{s(m+n)+i, t(m+n)+j},$$

$$\begin{aligned} &\kappa(e_{s_1(m+n)+i_1, t_1(m+n)+j_1}, e_{s_2(m+n)+i_2, t_2(m+n)+j_2}) \\ &= \delta_{s_1,t_2}\delta_{t_1,s_2}\delta_{i_1,j_2}\delta_{j_1,i_2}(-1)^{p(i_1)}(k + (l-1)(m-n)) \\ &\qquad - \delta_{s_1,t_1}\delta_{s_2,t_2}\delta_{i_1,j_1}\delta_{i_2,j_2}(-1)^{p(i_1)+p(i_2)}(c - \delta_{s_1,s_2}). \end{aligned}$$

さらに、生成元を $V^\kappa(\mathfrak{g})$ の中で具体的に与えることが、non-super の場合 [1] により, super の場合 [18] によりされている。この生成元を用いて、今回の主定理の証明は行う。

4 主結果

Theorem 1.3 のスーパーアファイン版の構成を目指していく。次ページの図のように、ヤンギアンと rectangular W 代数には対応関係がある。左上同士の関係を構成したのが、Ragoucy-Sorba ([14]) であり、左下同士の関係を構成したのが、Briot-Ragoucy ([3]) である。右側の場合、すなわち、アファインの場合に関して、最初に結果を出したのが [15] であり、principal W 代数に対して対応関係を与えた。講演者の [18] の結果はアファインの場合の一般の場合に関して対応付けを与えている。<u>ヤンギアンの関係図</u>

$$\begin{tikzcd} \boxed{\text{有限型ヤンギアン}} \arrow[r, dashed, "\text{アファイン化}"] \arrow[d, dashed, "\text{スーパー化}"] & \boxed{\text{アファインヤンギアン}} \arrow[d, dashed, "\text{スーパー化}"] \\ \boxed{\text{スーパーヤンギアン}} \arrow[r, dashed, "\text{アフィン化}"] & \boxed{\text{アファインスーパーヤンギアン}} \end{tikzcd}$$

Ragoucy-Sorba'99, Briot-Ragoucy'03 $\updownarrow$ Schiffmann-Vasserot'13, U.'20

<u>rectangular W 代数の関係図</u>

$$\begin{tikzcd} \boxed{\text{rectangular 有限 } W \text{ 代数}} \arrow[r, dashed, "\text{アファイン化}"] \arrow[d, dashed, "\text{スーパー化}"] & \boxed{\text{rectangular } W \text{ 代数}} \arrow[d, dashed, "\text{スーパー化}"] \\ \boxed{\text{rectangular 有限 } W \text{ スーパー代数}} \arrow[r, dashed, "\text{アフィン化}"] & \boxed{\text{rectangular } W \text{ スーパー代数}} \end{tikzcd}$$

Theorem 4.1 (Briot-Ragoucy [3]). スーパーヤンギアン $Y_h(\mathfrak{sl}(m|n))$ から有限 W 代数 $\mathcal{W}^{fin}(\mathfrak{g}, f)$ への全射が存在する。

スーパーヤンギアン $Y_h(\mathfrak{sl}(m|n))$ は [16] で定義され、$Y_h(\mathfrak{sl}(n))$ 同様に以下のような特徴を持つ。

1. $Y_h(\mathfrak{sl}(m|n))$ は複素数 h に依存するホップ代数である。

2. $h=0$ とすると、カレント代数 $\mathfrak{sl}(m|n)[u]$ の普遍包絡代数と一致する。

図の右側を構成する際に問題となることの一つが、W 代数は単体ではただのベクトル空間であり、それそのものは結合代数ではないということである。このため、頂点代数の普遍包絡代数を考える。

V を頂点代数とする。次のようなリースーパー代数 $L(V)$ を考える。

ベクトル空間 $L(V) = V \otimes \mathbb{C}[t, t^{-1}]/\mathrm{Im}(\partial \otimes \mathrm{id} + \mathrm{id} \otimes \frac{d}{dt})$,

定義関係式

$$\forall u, v \in V, \forall a, b \in \mathbb{Z}[ut^a, vt^b] = \sum_{r \geq 0} \binom{a}{r} (u_{(r)}v) t^{a+b-r}. \tag{4.2}$$

$\mathcal{U}(V)$ は $U(L(V))$ の degreewise completion を

$$(u_{(a)}v)t^b - \sum_{i \geq 0} \binom{a}{i} (-1)^i (ut^{a-i}vt^{b+i} - (-1)^{p(u)p(v)}(-1)^a vt^{a+b-i}ut^i),$$
$$|0\rangle t^{-1} - 1,$$

で生成される両側イデアルの completion で割った商代数である。これらの関係式は全て頂点代数の関係式から来ている。

Example 4.3. 普遍アファイン頂点代数 $V^k(\mathfrak{g})$ に対しては、

$$\mathcal{U}(V^k(\mathfrak{g})) = U(\widehat{\mathfrak{g}}) \text{ の degreewise completion},$$
$$\mathrm{Zhu}(V^k(\mathfrak{g})) = U(\mathfrak{g})$$

となる。

図の右側に関わる場合、最も簡単な場合は $l=1$ の場合である。この時は、Example 1.1 と Example 4.3 により、$\mathcal{U}(\mathcal{W}^k(gl(m|n),(1^(m|n))))$ は $U(\widehat{\mathfrak{g}})$ の degreewise completion である。従って、evaluation map が条件を満たす写像である。

重要な例として、$(m,n)=(1,0)$ の時、[15] の論文で先行研究がある。

Theorem 4.4 (Schiffman-Vasserot [15])**.** $\widehat{\mathfrak{gl}}_1$ に付随するアファインヤンギアンから *principal* W 代数の普遍包絡代数への全射準同型写像が存在する。

この写像を用いて、Schiffman-Vasserot は AGT 予想の解決を行っている。

今回の主定理は図の右側の対応付けを完全に行った次のようなものである

Theorem 4.5. $l \geq 2$, $\begin{cases} m, n \geq 2, m \neq n, \\ m \geq 3, n = 0 \end{cases}$ とする。今、

$$\tilde{\varepsilon}_1 = \frac{\alpha}{m-n}, \quad \tilde{\varepsilon}_2 = -1 - \frac{\alpha}{m-n}.$$

とおくと、準同型写像

$$\Phi \colon Y_{\tilde{\varepsilon}_1, \tilde{\varepsilon}_2}(\widehat{\mathfrak{sl}}(m|n)) \to \mathcal{U}(\mathcal{W}^k(\mathfrak{gl}(ml|nl), (l^{(m|n)}))).$$

が存在する。さらに、$\alpha = k + (l-1)(m-n) \neq 0$ とすると、Φ の像は $U(\mathcal{W}^k(\mathfrak{gl}(ml|nl), (l^{(m|n)})))$ の中で稠密となる。

参考文献

[1] T. Arakawa and A. Molev. Explicit generators in rectangular affine W-algebras of type A. *Lett. Math. Phys.*, 107(1):47–59, 2017.

[2] S. I. Boyarchenko and S. Z. Levendorskiĭ. On affine Yangians. *Lett. Math. Phys.*, 32(4):269–274, 1994.

[3] C. Briot and E. Ragoucy. W-superalgebras as truncations of super-Yangians. *J. Phys. A*, 36(4):1057–1081, 2003.

[4] J. Brundan and A. Kleshchev. Shifted Yangians and finite W-algebras. *Adv. Math.*, 200(1):136–195, 2006.

[5] A. De Sole, V. G. Kac, and D. Valeri. Structure of classical (finite and affine) W-algebras. *J. Eur. Math. Soc. (JEMS)*, 18(9):1873–1908, 2016.

[6] V. G. Drinfeld. Hopf algebras and the quantum Yang-Baxter equation. *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 283(5):1060–1064, 1985.

[7] V. G. Drinfeld. A new realization of Yangians and of quantum affine algebras. *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 296(1):13–17, 1987.

[8] N. Guay. Cherednik algebras and Yangians. *Int. Math. Res. Not.*, (57):3551–3593, 2005.

[9] N. Guay. Affine Yangians and deformed double current algebras in type A. *Adv. Math.*, 211(2):436–484, 2007.

[10] N. Guay, H. Nakajima, and C. Wendlandt. Coproduct for Yangians of affine Kac-Moody algebras. *Adv. Math.*, 338:865–911, 2018.

[11] V. Kac, S. S. Roan, and M. Wakimoto. Quantum reduction for affine superalgebras. *Comm. Math. Phys.*, 241(2-3):307–342, 2003.

[12] R. Kodera. Braid group action on affine Yangian. *SIGMA Symmetry Integrability Geom. Methods Appl.*, 15:Paper No. 020, 28, 2019.

[13] R. Kodera. On Guay's Evaluation Map for Affine Yangians. *Algebr Represent Theor*, 2020.

[14] E. Ragoucy and P. Sorba. Yangian realisations from finite W-algebras. *Comm. Math. Phys.*, 203(3):551–572, 1999.

[15] O. Schiffmann and E. Vasserot. Cherednik algebras, W-algebras and the equivariant cohomology of the moduli space of instantons on $\mathbf{A}^2$. *Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci.*, 118:213–342, 2013.

[16] V. Stukopin. Yangians of classical Lie superalgebras: basic constructions, quantum double and universal R-matrix. *Pr. Inst. Mat. Nats. Akad. Nauk Ukr. Mat. Zastos., 50, Part 1, 2*, 3:1195–1201, 2004.

[17] M. Ueda. Affine Super Yangians. arXiv:1911.06666.

[18] M. Ueda. Affine Super Yangians and Rectangular W-superalgebras. arXiv;2002.03749.

[19] M. Ueda. Coprodut for the Yangian of type $A_2^{(2)}$. in preparation.

[20] M. Ueda. The surjectivity of the evaluation map of the Affine. arXiv:2001.06398.