亜群 C^* 環の圏論的性質

慶應義塾大学大学院理工学研究科基礎理工学専攻
内村 朝樹 (Tomoki UCHIMURA)

1 導入

C^* 環論において, 数学的対象からそれらの性質を反映した C^* 環を構成する方法が数多く考えられてきた. 離散群から構成する群 C^* 環, 力学系から構成する接合積, グラフから構成するグラフ C^* 環などがその例である. これらを一般化する構成法として, 亜群から C^* 環を構成する方法が Renault によって提案された [Ren80]. これまでに亜群とその C^* 環の関係はよく調べられてきた [BO08],[Sim18].

一方, C^* 環のなす双圏 $\mathfrak{Corr}$ が Landsman によって導入され [Lan01], Albandik と Meyer により $\mathfrak{Corr}$ における図式の余極限が研究された [AM16].

Renault の提案した C^* 環の構成法は, 亜群のなす双圏 $\mathfrak{Gr}$ から双圏 $\mathfrak{Corr}$ への双関手をなしている. この双関手は特定の図式の余極限を保つなどよい性質が知られている [Alb15]. 本発表ではこの双関手の構成を [Alb15] に従って行う.

2 亜群とその作用

本節では亜群の定義と例を紹介し, 亜群の作用について考える. 亜群についての詳細は [Pat99] を参照せよ. 亜群の作用については [Alb15],[MZ15] が詳しい.

定義 2.1. 亜群 (groupoid) とは

- 集合 G,
- unit space と呼ばれる部分集合 $G^{(0)} \subset G$,
- それぞれ range map, source map と呼ばれる写像 $r_G, s_G : G \to G^{(0)}$,
- 集合 $G^{(2)} := \{(\alpha,\beta) \mid s_G(\alpha) = r_G(\beta)\}$[*1]の上で定義された, 積と呼ばれる写像 $\Phi_G : G^{(2)} \to G$,

の組で, 以下に述べる条件を満たすものをいう. 以下では $(\alpha,\beta) \in G^{(2)}$ に対して G の元 $\Phi_G(\alpha,\beta)$ を $\alpha\beta$ と書く。

(1) 任意の $(\alpha,\beta),(\beta,\gamma) \in G^{(2)}$ に対して $\alpha(\beta\gamma) = (\alpha\beta)\gamma$ が成り立つ,

---

[*1] 集合 $G^{(2)}$ を composables と呼ぶ.

(2) 任意の $\alpha \in G^{(0)}$ に対して $s_G(\alpha) = r_G(\alpha) = \alpha$ が成り立つ,

(3) 任意の $(\alpha, \beta) \in G^{(2)}$ に対して $s_G(\alpha\beta) = s_G(\beta),\ r_G(\alpha\beta) = r_G(\alpha)$ が成り立つ,

(4) 任意の $\alpha \in G$ に対して $\alpha s_G(\alpha) = \alpha,\ r_G(\alpha)\alpha = \alpha$ が成り立つ,

(5) 任意の $\alpha \in G$ に対してある $\beta \in G$ が存在し, $(\beta, \alpha), (\alpha, \beta) \in G^{(2)},\ \beta\alpha = s_G(\alpha),\ \alpha\beta = r_G(\alpha)$ が成り立つ.

各元の r_G, s_G の行き先をそれぞれ range, source と呼ぶ. 条件 (5) における β は α に対して一意であるため, α に対する β を α の逆元と呼び, α^{-1} と表す. 亜群 $(G, G^{(0)}, r_X, s_X, \Phi_G)$ を単に G と略記する.

$G^{(0)}$ を対象の集合, G を射の集合, 積を合成と見なせば, 亜群 G を全ての射が可逆な小圏と捉えることができる. この際 $G^{(0)}$ は対象の集合であると同時に, 各対象に唯一存在する単位射の集合であるとも見なされる.

例 2.2. 群 G は $G^{(0)}$ が 1 点である亜群である.

例 2.3. 集合 Λ に対し, 群の族 $\{G_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ を考える. 各 $\lambda \in \Lambda$ に対して G_λ の単位元を e_λ とする. 集合としての直和 $\bigsqcup_{\lambda\in\Lambda} G_\lambda$ には,

- unit space を $\{e_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$,
- 任意の $g \in G_\lambda$ に対する range と source をいずれも e_λ,
- 積を各 G_λ が持つ積,

とすることで亜群の構造が入る.

積や逆元をとる操作を連続にするような位相を入れた亜群を**位相亜群**と呼ぶ. 本稿では特に

$$\begin{cases} \text{range map, source map が局所同相,} \\ \text{unit space が局所コンパクトハウスドルフ,} \end{cases}$$

であるような位相亜群を考える. このような位相亜群を**局所コンパクトエタール亜群**という. 以下では局所コンパクトエタール亜群を単に亜群と呼ぶ.

次に亜群が両側から作用する空間について考える.

定義 2.4. 亜群 G, H に対し, G から H への *groupoid correspondence* とは

- 位相空間 X,
- anchor map と呼ばれる連続写像 $r_X : X \to G^{(0)},\ s_X : X \to H^{(0)}$,
- 位相空間 $G \times_{G^{(0)}} X := \{(\alpha, \xi) \in G \times X \mid s_G(\alpha) = r_X(\xi)\}$ の上で定義された, 左作用と呼ばれる連続写像 $L_X : G \times_{G^{(0)}} X \to X$,
- 位相空間 $X \times_{H^{(0)}} H := \{(\xi, \beta) \in X \times H \mid s_X(\xi) = r_H(\beta)\}$ の上で定義された, 右作用と呼ばれる連続写像 $R_X : X \times_{H^{(0)}} H \to X$,

の組で, 以下に述べる条件を満たすものである. 任意の $(a, \xi) \in G \times_{G^{(0)}} X$ に対して X の元 $L_X(\alpha, \xi)$ を $a\xi$, 任意の $(\xi, \beta) \in X \times_{H^{(0)}} H$ に対して X の元 $R_X(\xi, \beta)$ を $\xi\beta$ と書く. 左作用と anchor map や G の構造との整合条件として

(1) 任意の $(\alpha, \xi) \in G \times_{G^{(0)}} X$ に対して $r_X(\alpha\xi) = r_G(\alpha)$,

(2) 任意の $\xi \in X$ に対して $r_X(\xi)\xi = \xi$,

(3) 任意の $(\alpha_1, \alpha_2) \in G^{(0)}, (\alpha_2, \xi) \in G \times_{G^{(0)}} X$ に対して $(\alpha_1\alpha_2)\xi = \alpha_1(\alpha_2\xi)$,

(4) 任意の $(\alpha, \xi) \in G \times_{G^{(0)}} X$ に対して $s_X(\alpha\xi) = s_X(\xi)$,

を課す. 右作用にも同様の条件を課す. また, 左右の作用の整合条件として任意の $(\alpha, \xi) \in G \times_{G^{(0)}} X$, $(\xi, \beta) \in X \times_{H^{(0)}} H$ に対して $\alpha(\xi\beta) = (\alpha\xi)\beta$ を課す.

上記の組 (X, r_X, s_X, L_X, R_X) を ${}_GX_H$ と略記する.

例 2.5. 亜群 G はその積によって両側から G が作用しており, G から G への groupoid correspondence と見なせる.

亜群 G, H, K と groupoid correspondence ${}_GX_H$, ${}_HY_K$ が与えられたとき, G から K への groupoid correspondence ${}_GX \circ_H Y_K$ が構成できる. 位相空間

$$X \times_{H^{(0)}} Y := \{(\xi, \eta) \in X \times Y \mid s_X(\xi) = r_Y(\eta)\}$$

に対して, H の作用を $s_X(\xi) = s_H(\beta) = r_Y(\eta)$ なる $\beta \in H$ と $(\xi, \eta) \in X \times_{H^{(0)}} Y$ に対して

$$\beta(\xi, \eta) := (\xi\beta^{-1}, \beta\eta)$$

で定める. この作用によって移り合う元を同一視した空間を $X \circ_H Y$ と表し, $(\xi, \eta) \in X \times_{H^{(0)}} Y$ の同値類を $[\xi, \eta]$ と表す. $X \circ_H Y$ に対して anchor map $r_{X\circ_H Y}, s_{X\circ_H Y}$ を

$$r_{X\circ_H Y}\big([\xi, \eta]\big) := r_X(\xi), \qquad s_{X\circ_H Y}\big([\xi, \eta]\big) := s_Y(\eta),$$

とする. $X \circ_H Y$ に対する G, K からの作用を,

- 任意の $[\xi, \eta] \in X \circ_H Y$ と, $(\alpha, \xi) \in G \times_{G^{(0)}} X$ を満たす $\alpha \in G$ に対して
$$\alpha[\xi, \eta] := [\alpha\xi, \eta],$$
- 任意の $[\xi, \eta] \in X \circ_H Y$ と, $(\eta, \gamma) \in Y \times_{K^{(0)}} K$ を満たす $\gamma \in K$ に対して
$$[\xi, \eta]\gamma := [\xi, \eta\gamma],$$

で定める. これらの定義は well-defined である. これらの構造により $X \circ_H Y$ は G から K への groupoid correspondence となる [Alb15, Proposition 2.27].

3 C^* 環とその作用

本節では C^* 環の定義と例を紹介し, C^* 環の作用について考える. C^* 環論の標準的な教科書として [Bla06] がある. 以下で線形空間の係数体は全て複素数体 $\mathbb{C}$ である.

定義 3.1. (1) $*$-代数とは積と対合を持つ線形空間である.

(2) $*$-代数 A と A 上のノルムの組で, 任意の $a,b \in A$ に対して

$$\|ab\| \leq \|a\|\|b\|, \qquad \|a^*a\| = \|a\|^2,$$

を満たすものを C^* 環と呼ぶ.

例 3.2. X をコンパクトハウスドルフ空間とする. X 上の複素数値連続関数全体のなす線形空間を $C(X)$ としたとき, $C(X)$ は各点での積と複素共役により $*$-代数になる. $C(X)$ 上のノルムを $f \in C(X)$ に対して $\|f\| := \sup_{x \in X} |f(x)|$ で定めると, $C(X)$ は C^* 環になる.

例 3.3. H を Hilbert 空間とし, H 上の有界線形作用素全体のなす線形空間を $B(H)$ とする. 合成を積とし, $T \in B(H)$ に対してその随伴作用素 $T^* \in B(H)$ をとる操作を対合とすると, $B(H)$ は $*$-代数になる. $B(H)$ 上のノルムを $T \in B(H)$ に対して $\|T\| := \sup_{\|\xi\| \leq 1} \|T\xi\|$ で定めると, $B(H)$ は C^* 環になる.

次に C^* 環が左右から作用する空間について考える. A, B を C^* 環とする. A, B 両側加群とは, 線形空間 X, 左作用と呼ばれる双線形写像 $A \times X \to X$, 右作用と呼ばれる双線形写像 $X \times B \to X$ から構成され, 以下の条件を満たすものである. 左作用による $(a,x) \in A \times X$ の送り先を ax, 右作用による $(x,b) \in X \times B$ の送り先を xb と書く.

(1) 任意の $a_1, a_2 \in A, x \in X$ に対して $a_1(a_2x) = (a_1a_2)x$,
(2) 任意の $b_1, b_2 \in B, x \in X$ に対して $(xb_1)b_2 = x(b_1b_2)$,
(3) 任意の $a \in A, b \in B, x \in X$ に対して $a(xb) = (ax)b$.

A, B 両側加群をなす線形空間 X と左右 2 つの作用の組を ${}_AX_B$ で略記する. 以下で定義する C^*-correspondence とは, C^* 環の元に値をとるような内積を両側加群に入れたものである.

定義 3.4. A から B への C^*-*correspondence* とは

- A, B 両側加群 ${}_AX_B$,
- 半双線形写像[*2] $\langle\cdot|\cdot\rangle_X : X \times X \to B$,

から構成され, 次を満たす.

(1) 任意の $x, y \in X$ に対して $\langle x|y\rangle_X^* = \langle y|x\rangle_X$,
(2) 任意の $x \in X$ に対して $\langle x|x\rangle_X \geq 0$[*3],
(3) 任意の $x \in X$ に対して $\langle x|x\rangle_X = 0$ ならば $x = 0$,
(4) 任意の $x, y \in X, b \in B$ に対して $\langle x|yb\rangle_X = \langle x|y\rangle_X b$,
(5) 任意の $x, y \in X, a \in A$ に対して $\langle x|ay\rangle_X = \langle a^*x|y\rangle_X$,
(6) X 上のノルムを任意の $x \in X$ に対して $\|x\| := \|\langle x|x\rangle_X\|^{\frac{1}{2}}$ で定めると X は Banach 空間になる.

[*2] 2 つの線形空間から線形空間への 2 変数写像が半双線形写像であるとは, 1 つ目の引数に対して共役線形, 2 つ目の引数に対して線形であることをいう.

[*3] C^* 環 A の元 a が正値 (positive) であるとはある元 $u \in A$ が存在して $a = u^*u$ が成り立つことである. a が正値であることを $a \geq 0$ と表す.

A から B への C^*-correspondence $({}_AX_B, \langle\cdot|\cdot\rangle_X)$ を単に ${}_AX_B$ と略記する. また本稿では, A の作用が非退化 (non-degenerate)[*4]であることを課す.

例 3.5. C^* 環 A はその積によって両側から A が作用しており, A から A への C^*-correspondence と見なせる.

任意の C^*-correspondence ${}_AX_B$ において, $a \in A, b \in B, x \in X$ に対して $\|ax\| \le \|a\|\|x\|$, $\|xb\| \le \|x\|\|b\|$, $\|\langle x|y\rangle_X\| \le \|x\|\|y\|$ が成り立つ. よって左右の作用 $A \times X \to X,\ X \times B \to X$ や内積 $\langle\cdot|\cdot\rangle_X : X \times X \to B$ は連続である.

C^* 環 A, B, C と C^*-correspondence ${}_AX_B, {}_BY_C$ が与えられたとき, A から C への C^*-correspondence が構成できる. 詳細は [Lan95],[EKQR06] を見よ. 大まかな流れは次の通りである. X, Y の線形空間としてのテンソル積を部分空間

$$\mathrm{span}\{xb \otimes y - x \otimes by \mid x \in X, y \in Y, b \in B)\}$$

で割った商空間を $X \odot_B Y$ と表す. A, C からの作用を任意の $a \in A, c \in C, x \in X, y \in Y$ に対して

$$a(x \otimes y) = (ax) \otimes y, \qquad (x \otimes y)c = x \otimes (yc),$$

で定めると, $X \odot_B Y$ は A, C 両側加群となる. この両側加群に対して半双線形写像を

$$\langle x_1 \otimes y_1 \mid x_2 \otimes y_2\rangle_{X\odot_B Y} := \langle y_1 \mid \langle x_1 \mid x_2\rangle_X\, y_2\rangle_Y$$

で定めると, 定義 3.4 の条件 (1) から (5) を満たす. この内積から得られるノルムで $X \odot_B Y$ を完備化したものを $X \otimes_B Y$ と表す. A, C の $X \odot_B Y$ への作用や $X \odot_B Y$ 上の内積を $X \otimes_B Y$ に自然に拡張することで, $X \otimes_B Y$ は A から C への C^*-correspondence となる. この C^*-correspondence ${}_AX \otimes_B Y_C$ を ${}_AX_B, {}_BY_C$ の内部テンソル積 (internal tensor product) と呼ぶ.

4 双圏と双関手

圏とは対象と射の集まりによって構成されるものであり, 射 f, g に対してはその合成と呼ばれる射 gf が, 各対象 x に対しては単位射 1_x が定められている. これらは結合律と単位律, すなわち

(1) 任意の射 $f : x \to y,\ g : y \to z,\ h : z \to w$ に対して $h(gf) = (hg)f$,
(2) 任意の射 $f : x \to y$ に対して $1_y f = f = f 1_x$,

を満たすことが要請される. これに対し, Bénabou によって [Bén67] で導入された**双圏** (bicategory) では, 対象と射に加えて, 2 射と呼ばれる "射の間の射" を考える. 結合律と単位律は要請せず, 射 $h(gf)$ と $(hg)f$ の間や, 射 $1_y f$ と f, f と $f1_x$ の間に性質の良い 2 射を予め定めておく. 慣習的に射は $\to$, 2 射は $\Rightarrow$ の記号を用いることで区別する. より正確には, 双圏 $\mathcal{C}$ とは

- 対象の集まり $\mathrm{ob}\,\mathcal{C}$,

[*4] A の作用が非退化とは, $\overline{\mathrm{span}}\{ax \mid a \in A, x \in X\} = X$ を満たすことをいう. ここで $\overline{\mathrm{span}}\{\cdot\}$ とは $\mathrm{span}\{\cdot\}$ の閉包を指す.

- 対象 x, y ごとに定められた圏 $\mathcal{C}(x, y)$ (この圏の対象, 射をそれぞれ射, 2 射と呼ぶ),
- 対象 x, y, z ごとに定められた合成関手と呼ばれる関手 $\mathcal{C}(x, y) \times \mathcal{C}(y, z) \to \mathcal{C}(x, z)$,
- 対象 x ごとに定められた単位射 1_x,
- 射 f, g, h ごとに定められた 2 射 $h(gf) \Rightarrow (hg)f$,
- 射 f ごとに定められた 2 射 $1_y f \Rightarrow f,\ f1_x \Rightarrow f$.

から構成され, これらがよい整合条件を満たすものをいう. 整合条件の詳細は [Bén67],[Lei98] を見よ.

圏 $\mathcal{C}$ においては x から y への射の集まり $\mathcal{C}(x, y)$ に構造は入っておらず, 合成 $\mathcal{C}(x, y) \times \mathcal{C}(y, z) \to \mathcal{C}(x, z)$ は単に射の集まりの間の対応であったが, 双圏においてはこれらが圏や関手である. 以下で定義する具体的な双圏にもそれぞれ 2 射は定義されるが, 紙面の都合上省略する.

例 4.1. 以下は双圏 $\mathfrak{Gr}$ をなす. 詳しい定義は [Alb15] を参照せよ.

対象	亜群
射	groupoid correspondence
合成	${}_G X_H, {}_H Y_K$ の合成を ${}_G X \circ_H Y_K$ と定める
単位射	各亜群に対しそれ自身を groupoid correspondence と見なしたもの

例 4.2. 以下は双圏 $\mathfrak{Corr}$ をなす. 詳しい定義は [BMZ13] を参照せよ.

対象	C^* 環
射	C^*-correspondence
合成	${}_A X_B, {}_B Y_C$ の合成を ${}_A X \otimes_B Y_C$ と定める
単位射	各 C^* 環に対しそれ自身を C^*-correspondence と見なしたもの

圏論において, 圏 $\mathcal{C}$ から圏 $\mathcal{D}$ への関手 F は, $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ の対象と $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ の射をそれぞれ対応付けるものであり, その対応には合成と単位射の構造を保つことが課されている. すなわち, F が $\mathcal{C}$ の対象 x を $\mathcal{D}$ の対象 $F(x)$ に, $\mathcal{C}$ の射 f を $\mathcal{D}$ の射 $F(f)$ に対応付けるならば, 任意の $\mathcal{C}$ の対象 x と射 f, g に対して

(1) $F(g)F(f) = F(gf)$,
(2) $1_{F(x)} = F(1_x)$,

が成り立つことを要請する. これと同様に双圏の間に**双関手** (bifunctor) を考える. 双関手は 2 つの双圏の対象, 射, 2 射の対応付けである. 関手のように合成や単位射を保つことは要請せず, 代わりに射 $F(x)F(y)$ と $F(xy)$ の間や射 $1_F(x)$ と $F(1_x)$ の間に性質の良い 2 射を指定する. より正確には, 双圏 $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ の間の双関手とは

- 対象の対応 $\mathrm{ob}\,\mathcal{C} \to \mathrm{ob}\,\mathcal{D}$,
- $\mathcal{C}$ の対象 x, y ごとに定められた関手 $\mathcal{C}(x, y) \to \mathcal{D}(F(x), F(y))$ (射と 2 射の対応),
- $\mathcal{C}$ の射 f, g ごとに定められた 2 射 $F(g)F(f) \Rightarrow F(gf)$,
- $\mathcal{C}$ の対象 x ごとに定められた 2 射 $1_{F(x)} \Rightarrow F(1_x)$.

から構成され, これらがよい整合条件を満たすものをいう. 整合条件の詳細は [Bén67],[Lei98] を見よ.

次節では $\mathfrak{Gr}$ から $\mathfrak{Corr}$ への双関手を具体的に 1 つ構成する. 紙面の都合上, 対象と射の対応にのみ

言及する.

5 $\mathfrak{Gr}$ から $\mathfrak{Corr}$ への双関手

亜群 G から亜群 C^* 環 $C^*(G)$ が構成される. 大まかには, G 上の準連続 (quasi-continuous) な複素数値関数の線形空間に積と対合を入れ, よいノルムで完備化したものである. ここで亜群 G 上の複素数値関数 $f : G \to \mathbb{C}$ が準連続であるとは, 有限集合 I に添字づけられた G のハウスドルフ開部分集合の族 $\{U_i\}_{i\in I}$ と, U_i にコンパクト台を持ち, U_i の外では 0 をとる連続関数の族 $\{f_i\}_{i\in I}$ が存在して, f が f_i の線形和で表されることをいう. G 上の準連続な複素数値関数の線形空間を $S(G)$ と書く[*5]. $f, g \in S(G)$ に対して積と対合を, 任意の $\alpha \in G$ に対して

$$
\begin{aligned}
f * g(\alpha) &:= \sum_{\substack{\beta\in G\\ r(\beta)=r(\alpha)}} f(\beta)g(\beta^{-1}\alpha),\\
f^*(\alpha) &:= \overline{f(\alpha^{-1})},
\end{aligned}
$$

と定めると, $S(G)$ は $*$-代数となる. $S(G)$ 上のノルムを, 任意の $f \in S(G)$ に対して

$$
\|f\| := \sup\{\|\pi(f)\| \mid \pi : S(G) \to B(H) : *\text{-表現}\},
$$

で定める[*6]. このノルムによる $S(G)$ の完備化を $C^*(G)$ と書き, (full) 亜群 C^* 環と呼ぶ. 亜群とその C^* 環の関係については [BO08],[Sim18] を参照せよ.

一方, G から H への groupoid correspondence ${}_GX_H$ からは, $C^*(G)$ から $C^*(H)$ への C^*-correspondence ${}_{C^*(G)}C^*(X)_{C^*(H)}$ が構成される. $S(X)$ に対して両側からの作用と内積を $f \in S(G)$, $g \in S(H)$, $h, k \in S(X)$ に対して

$$
\begin{aligned}
(f\cdot h)(\xi) &:= \sum_{\substack{\alpha\in G\\ r(\alpha)=r(\xi)}} f(\alpha)h(\alpha^{-1}\xi),\\
(h\cdot g)(\xi) &:= \sum_{\substack{\beta\in H\\ r(\beta)=r(\xi)}} h(\xi\beta)g(\beta^{-1}),\\
\langle h|k\rangle_{S(X)}(\beta) &:= \sum_{\substack{\xi\in X\\ r(\xi)=s(\beta)}} \overline{h(\xi)}k(\xi\beta),
\end{aligned}
$$

で定める. ここで $\xi \in X, \beta \in H$ である. この内積から定まるノルムによる $S(X)$ の完備化を $C^*(X)$ と表す. 上で定めた $S(G), S(H)$ の $S(X)$ への作用を $C^*(G), C^*(H)$ の $C^*(X)$ への作用に自然に拡張し, $S(X)$ 上の内積を $C^*(X)$ 上の内積に自然に拡張すると, $C^*(X)$ は $C^*(G)$ から $C^*(H)$ への C^*-correspondence となる [Alb15, Proposition 2.35]. この構成は以下に述べるように内部テンソル積とのよい整合性がある.

[*5] G がハウスドルフのとき, $S(G)$ は G 上のコンパクト台を持つ連続関数全体がなす線形空間 $C_c(G)$ に一致する.

[*6] $*$-代数の間の積と対合を保つ線形写像を $*$-準同型と呼ぶ. 特に, $B(H)$ への単射な $*$-準同型を $*$-表現という.

定理 5.1 ([Alb15, p. 27]). 2 つの groupoid correspondence ${}_GX_H, {}_HY_K$ が与えられたとき, 次が成り立つ.

$$ {}_{C^*(G)}C^*(X \circ_H Y)_{C^*(K)} \simeq {}_{C^*(G)}C^*(X) \otimes_{C^*(H)} C^*(Y)_{C^*(K)} $$

ここで 2 つの C^*-correspondence が同型であるとは, それらの間に左右の作用や内積の構造を保つ全単射が存在することをいう.

2 射の対応を与えることで, 亜群 G から C^* 環 $C^*(G)$ への対応, groupoid correspondence ${}_GX_H$ から C^*-correspondence ${}_{C^*(G)}C^*(X)_{C^*(H)}$ への対応が, $\mathfrak{Gr}$ から $\mathfrak{Corr}$ への双関手をなすことが分かる [Alb15, Proposition 2.36].

参考文献

[Alb15] S. Albandik. *A colimit construction for groupoids.* PhD thesis, Göttingen, 2015.

[AM16] S. Albandik and R. Meyer. Colimits in the correspondence bicategory. *Münster J. Math.*, 9(1):51–76, 2016.

[Bén67] J. Bénabou. Introduction to bicategories. In *Reports of the Midwest Category Seminar*, pages 1–77. Springer, Berlin, 1967.

[Bla06] B. Blackadar. *Operator algebras*, volume 122 of *Encyclopaedia of Mathematical Sciences.* Springer-Verlag, Berlin, 2006.

[BMZ13] A. Buss, R. Meyer, and C. Zhu. A higher category approach to twisted actions on C^*-algebras. *Proc. Edinb. Math. Soc. (2)*, 56(2):387–426, 2013.

[BO08] N. P. Brown and N. Ozawa. *C^*-algebras and finite-dimensional approximations*, volume 88 of *Graduate Studies in Mathematics.* American Mathematical Society, Providence, RI, 2008.

[EKQR06] S. Echterhoff, S. Kaliszewski, J. Quigg, and I. Raeburn. A categorical approach to imprimitivity theorems for C^*-dynamical systems. *Mem. Amer. Math. Soc.*, 180(850):viii+169, 2006.

[Lan95] E. C. Lance. *Hilbert C^*-Modules a toolkit for operator algebraists.* London Mathematical Society lecture note series; 210. Cambridge University Press, Cambridge, 1995.

[Lan01] N. P. Landsman. Bicategories of operator algebras and Poisson manifolds. In *Mathematical physics in mathematics and physics (Siena, 2000)*, volume 30 of *Fields Inst. Commun.*, pages 271–286. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2001.

[Lei98] T. Leinster. Basic bicategories, 1998. arXiv:math/9810017.

[MZ15] R. Meyer and C. Zhu. Groupoids in categories with pretopology. *Theory Appl. Categ.*, 30:Paper No. 55, 1906–1998, 2015.

[Pat99] A. Paterson. *Groupoids, inverse semigroups, and their operator algebras*, volume 170 of *Progress in Mathematics.* Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, 1999.

[Ren80] J. Renault. *A groupoid approach to C^*-algebras*, volume 793 of *Lecture Notes in Mathematics*. Springer, Berlin, 1980.

[Sim18] A. Sims. Étale groupoids and their C^*-algebras, 2018. arXiv:1710.10897.