ザハロフ系の研究

早稲田大学大学院 先進理工学研究科
富岡健太 (Kenta TOMIOKA)

概要

2 次元の一般領域上でのザハロフ系の初期値問題について考える．自然な初期条件に対する大域解の存在と一意性について証明した．コンパクト性による議論や Brezis-Gallouet の不等式を用いずに証明を行った．この研究は小澤徹先生との共同研究である．

1　導入

今回の講演では次のザハロフ系の初期値問題について考える．

$$i\partial_t u + \Delta u = vu, \tag{1.1}$$

$$\partial_t^2 v - \Delta v = \Delta |u|^2. \tag{1.2}$$

初期条件は $(u(0), v(0), \partial_t v(0)) = (\varphi, \psi_0, \psi_1)$ とする．ここで, $u : \mathbb{R} \times \Omega \to \mathbb{C}$, $v : \mathbb{R} \times \Omega \to \mathbb{R}$ であり, $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ は十分滑らかな境界 $\partial\Omega$ を持つ領域とする．また, ラプラシアン Δ は定義域を $D(\Delta) = (H^2 \cap H_0^1)(\Omega)$ とするヒルベルト空間 $L^2(\Omega)$ 上の自己共役作用素とする．

ザハロフ系は形式的に次の 2 つの保存量を持つ．

$$M(t) := \|u(t)\|_{L^2}, \tag{1.3}$$

$$E(t) := \|\nabla u(t)\|_{L^2}^2 + \frac{1}{2}(\|v(t)\|_{L^2}^2 + \|(-\Delta)^{-1/2}\partial_t v(t)\|_{L^2}^2) + (v(t)||u(t)|^2). \tag{1.4}$$

ここで, $(\cdot|\cdot)$ は $L^2(\Omega)$ 内積である．

空間に関して $\mathbb{R}^n$ で考えるザハロフ系については多く取り扱わてれいる ([1],[5],[10],[11])．しかし, 一般領域上でのザハロフ系については多くは取り扱われていない．主な理由としては, 一般領域上ではフーリエ変換の議論が行えないことが挙げられる．例えば, フーリエ変換の議論が行えないことでストリッカーツ評価を考えることが困難になる．そこで, フーリエ変換に依らないエネルギー法での議論を用いることで一般領域上でのザハロフ系の初期値問題を考える．

ところで, ザハロフ系がどのような経緯で考えられるようになったかを以下に簡単にまとめる．方程式の名前になっているザハロフはロシア (ソビエト) の有名な数理物理学者である．彼は 1962 年にラングミュア波の崩壊について考え, 1972 年にプラズマとレーザーの間の相互作用を研究する中で電場と粒子の摂動によるシステムを提案した．そのシステムが非線型シュレディンガー方程式と非線型波動方程式の連立系のザハロフ系である．ザハロフ系はこのような物理的な背景をもつ方程式系であり多くの物理学者や数学者の関心を引き付けた ([5]).

2 準備

初期条件は $(\varphi, \psi_0, \psi_1) \in D(\Delta) \oplus H_0^1(\Omega) \oplus (L^2 \cap (-\Delta)^{1/2} L^2)(\Omega)$ であり, $\|\varphi\|_2 < \|Q\|_2$ とする. ここで, $Q \in D(\Delta)$ は領域 $\Omega (\subset \mathbb{R}^2)$ 上での次の方程式の基底状態である.

$$\Delta Q - Q + Q^3 = 0. \tag{2.1}$$

この時, ザハロフ系の次を満たす大域解の存在と一意性を証明することが目的である.

$$(u, v, \partial_t v) \in C_w(\mathbb{R}; D(\Delta) \oplus H_0^1(\Omega) \oplus L^2(\Omega)).$$

そのために, 次のザハロフ系の近似問題を考える.

$$i\partial_t u + \Delta u = J_n(J_n v \cdot J_n u), \tag{2.2}$$

$$\partial_t^2 v - \Delta v = J_n \Delta |J_n u|^2. \tag{2.3}$$

ここで, $J_n = (I - \frac{1}{n}\Delta)^{-1}$ は吉田近似である. この近似はザハロフ系の持つ保存量の構造を崩さないように導入していることに注意する. ザハロフ系の初期条件 $(\varphi, \psi_0, \psi_1) \in D(\Delta) \oplus H_0^1(\Omega) \oplus L^2(\Omega)$ を用いて, ザハロフ系の近似問題の初期条件を次で与える.

$$(u(0), v(0), \partial_t v(0)) = (J_n \varphi, J_n \psi_0, J_n \psi_1). \tag{2.4}$$

この時, (2.2)-(2.4) に対する初期値問題は次を満たす一意的な大域解を持つ.

$$(u_n, v_n, \partial_t v_n) \in C^1(\mathbb{R}; D(\Delta) \oplus D(\Delta) \oplus D(\Delta)).$$

これは, (2.2),(2.3) の右辺が $D(\Delta)$ 上でリプシッツ連続になっていることから導ける. より詳しく考えるならば, (2.2),(2.3) の解は次の積分方程式系の不動点によって与えられる.

$$u(t) = U(t) J_n \varphi - i \int_0^t U(t-s) J_n (J_n v \cdot J_n u)(s) ds,$$

$$v(t) = \dot{K}(t) J_n \psi_0 + K(t) J_n \psi_1 + \int_0^t K(t-s) J_n \Delta |J_n u|^2 (s) ds.$$

ここで, $U(t) = \exp(it\Delta), K(t) = (-\Delta)^{-1/2}(\sin(t(-\Delta)^{1/2})), \dot{K}(t) = \cos(t(-\Delta)^{1/2})$ である. このザハロフ系の近似問題 (2.2)-(2.4) の解の列 $((u_n, v_n, \partial_t v_n); n \geq 1)$ を用いて, ザハロフ系の大域解の構成を行う.

証明の方針は次の通りである. まず, ザハロフ系の近似解の列 $(u_n, v_n, \partial_t v_n)$ が $L^\infty_{loc}(\mathbb{R}; D(\Delta) \oplus H_0^1(\Omega) \oplus (L^2 \cap (-\Delta)^{1/2} L^2)(\Omega))$ において有界列になることを示す. そして, ザハロフ系の近似解の列 $(u_n, v_n, \partial_t v_n)$ が $L^\infty_{loc}(\mathbb{R}; H_0^1(\Omega) \oplus L^2(\Omega) \oplus (-\Delta)^{1/2} L^2(\Omega))$ においてコーシー列になることを示す. 最後に, 完備性により見つかる極限がザハロフ系の解になることを示す.

3 証明に用いる主な評価

証明に用いる主な評価を以下にまとめる. 定数に関しては, 簡略化のため特に断らない限り共通の $C > 0$ で表すことにする.

ある定数 $C > 0$ が存在して, 次の楕円型評価が成り立つ.

$$\|u\|_{H^2} \leq C(\|\Delta u\|_{L^2} + \|u\|_{L^2}), \quad \forall u \in D(\Delta) = (H^2 \cap H_0^1)(\Omega).$$

ある定数 $C > 0$ が存在して, 次の Gagliardo-Nirenberg の不等式が成り立つ.

$$\|u\|_{L^\infty} \leq C\|u\|_{L^2}^{1/2}\|u\|_{H^2}^{1/2}, \quad \forall u \in H^2(\Omega).$$

任意の $u \in H^1(\Omega)$ に対して, 次の等式が成り立つ.

$$\|(-\Delta)^{1/2}u\|_{L^2} = \|\nabla u\|_{L^2}.$$

ある定数 C_0 が存在して, 次の Gagliardo-Nirenberg の不等式 ([1],[3],[11],[12]) が成り立つ.

$$\|u\|_{L^4}^4 \leq C_0\|u\|_{L^2}^2\|\nabla u\|_{L^2}^2, \quad \forall u \in H_0^1(\Omega).$$

ここで, C_0 は $C_0 = 2/\|Q\|_{L^2}^2$ で与えられる最良定数である.

補題 1([7],[8],[9])**.** ある定数 $C > 0$ が存在して, 次の不等式が成り立つ.

$$\|u\|_{L^p} \leq Cp^{1/2}\|u\|_{L^2}^{2/p}\|\nabla u\|_{L^2}^{1-2/p}, \quad \forall u \in H^1(\Omega),\ \forall p \geq 2.$$

補題 2([3],[4])**.** 作用素 $J_n = (I - \frac{1}{n}\Delta)^{-1}$ は次の (1)-(3) を満たす.
(1) J_n は $L^2(\Omega)$ 上で有界な自己共役作用素であり, 次を満たす.

$$J_n(L^2(\Omega)) = D(\Delta) = (H^2 \cap H_0^1)(\Omega).$$

(2) 任意の $u \in L^2(\Omega)$ に対して, $\|J_n u - u\|_{L^2} \to 0 (n \to \infty)$ が成り立つ.
(3) 次の評価を満たす.

$$\begin{aligned}
&\|J_n u\|_{L^2} \leq \|u\|_{L^2}, \quad \forall u \in L^2(\Omega),\\
&\|\nabla J_n u\|_{L^2} \leq n^{1/2}\|u\|_{L^2}, \quad \forall u \in L^2(\Omega),\\
&\|\Delta J_n u\|_{L^2} \leq n\|u\|_{L^2}, \quad \forall u \in L^2(\Omega),\\
&\|\nabla J_n u\|_{L^2} \leq \|\nabla u\|_{L^2}, \quad \forall u \in H^1(\Omega),\\
&\|\Delta J_n u\|_{L^2} \leq \|\Delta u\|_{L^2}. \quad \forall u \in H^2(\Omega).
\end{aligned}$$

補題 3. 任意の $m, n \in \mathbb{N}(m > n)$ と任意の $u \in H_0^1(\Omega)$ に対して, 次が成り立つ.

$$\begin{aligned}
&\|(J_m - J_n)u\|_{L^2} \leq \frac{1}{n^{1/2}}\|\nabla u\|_{L^2},\\
&\|(J_m - J_n)u\|_{L^4}^2 \leq 2C_0^{1/2}\frac{1}{n^{1/2}}\|\nabla u\|_{L^2}^2.
\end{aligned}$$

ここで, $C_0 = 2/\|Q\|_{L^2}^2$ である.

4　主結果

今回, 得られた結果を以下に示す.

定理. $(\varphi, \psi_0, \psi_1) \in D(\Delta) \oplus H_0^1(\Omega) \oplus (L^2 \cap (-\Delta)^{1/2} L^2)(\Omega)$ であり, $\|\varphi\|_{L^2} < \|Q\|_{L^2}$ を満たすとする. ここで, $Q \in D(\Delta)$ は領域 Ω 上の (2.1) の基底状態である. この時, 次の (1)-(3) が成り立つ.
(1) (1.1),(1.2) の一意的な解 $(u, v, \partial_t v)$ が存在し, 次を満たす.

$$
\begin{aligned}
&u \in (L^\infty_{loc} \cap C_w)(\mathbb{R}; D(\Delta)) \cap C(\mathbb{R}; H_0^1(\Omega)) \cap C^1(\mathbb{R}; H^{-1}(\Omega)),\\
&\partial_t u \in (L^\infty_{loc} \cap C_w)(\mathbb{R}; L^2(\Omega))\\
&v \in C(\mathbb{R}; H_0^1(\Omega)) \cap C^1(\mathbb{R}; L^2(\Omega)) \cap C^2(\mathbb{R}; H^{-1}(\Omega)),\\
&\partial_t v \in C(\mathbb{R}; (L^2 \cap (-\Delta)^{1/2} L^2)(\Omega)).
\end{aligned}
$$

(2) 次の 2 つの量が時間に関して保存する.

$$
\begin{aligned}
&M(t) := \|u(t)\|_{L^2},\\
&E(t) := \|\nabla u(t)\|_{L^2}^2 + \frac{1}{2}(\|v(t)\|_{L^2}^2 + \|(-\Delta)^{-1/2}\partial_t v(t)\|_{L^2}^2) + (v(t)||u(t)|^2).
\end{aligned}
$$

ここで, $(\cdot|\cdot)$ は $L^2(\Omega)$ 内積である.
(3) (1.1),(1.2) の解 $(u, v, \partial_t v)$ は任意の $t \in \mathbb{R}$ に対して, 次の評価を満たす.

$$
\begin{aligned}
&M(t) = \|u(t)\|_{L^2} = \|\varphi\|_{L^2},\\
&\left(1 - \frac{\|\varphi\|_{L^2}}{\|Q\|_{L^2}}\right)(\|\nabla u(t)\|_{L^2}^2 + \frac{1}{2}\|v(t)\|_{L^2}^2) + \frac{1}{2}\|(-\Delta)^{-1/2}\partial_t v(t)\|_{L^2}^2\\
&\le E(t) = E(0)\\
&\le \|\nabla\varphi\|_{L^2}^2 + \frac{1}{2}(\|\psi_0\|_{L^2}^2 + \|(-\Delta)^{-1/2}\psi_1\|_{L^2}^2) + 2^{1/2}\frac{\|\varphi\|_{L^2}}{\|Q\|_{L^2}}\|\nabla\varphi\|_{L^2}\|\psi_0\|_{L^2}.
\end{aligned}
$$

また, $\|\varphi\|_{H^2}, \|\psi_0\|_{H^1}, \|\psi_1\|_{L^2}, \|(-\Delta)^{-1/2}\psi_1\|_{L^2}$ のみに依存する定数 $C > 0$ が存在して, (1.1),(1.2) の解 $(u, v, \partial_t v)$ は任意の $t \in \mathbb{R}$ に対して, 次の評価を満たす.

$$
\|u(t)\|_{H^2} + \|v(t)\|_{H^1} + \|\partial_t v(t)\|_{L^2} \le C\exp(C|t|). \tag{4.1}
$$

注意. (1) この定理では, 領域 Ω に対して有界性は仮定していない.
(2) (4.1) の評価は [1] での評価の改善となっている. Brezis-Gallouet の不等式を用いた場合の自然な結果として, (4.1) の左辺は $C\exp(Ct^2)$ によって評価出来ることが分かる.

以上の事柄は主に「T. Ozawa, K. Tomioka, Zakharov System in Two Space Dimensions」にまとめた内容を参考に作成した. 上記の論文は投稿済みではあるが, まだ査読は終わっていない状況である. 最後に主な参考文献を以下にまとめる.

参考文献

[1] H. Added, S. Added, Existence globale de solutions fortes pour les équations de la turbulence de Langmuir en demension 2, C. R. Acad. Sc. Paris. t. 299. Série I, No 12. 551-554. 1984.

[2] H. Brezis, T. Gallouet, Nonlinear Schrödinger evolution equations. Nonlinear analysis, Theory. Methods & Applications, Vol. 4, No.4. 677-681. 1980.

[3] T. Cazenave, Semilinear Schrödinger Equations. Courant Lecture Notes in Mathematics. 2003.

[4] T. Cazenave, A. Haraux, An Introduction to Semilinear Evolution Equations, Oxford Lecture Series in Mathmatics and its Applications 13. 1998.

[5] B. Guo, Z. Gan, L. Kong, J. Zhang, The Zakharov System and its Soliton Solutions, Springer, 2016.

[6] M. Hayashi, A note on the nonlinear Schrödinger equation in a general domain, Nonlinear Analysis. 173 (2018) 99-122.

[7] T. Ogawa, T. Ozawa, Trudinger type inequalities and uniqueness of weak solutions for the nonlinear Schrödinger mixed problem, Journal of Mathematical Analysis and Applications. 155, 531-540. 1991.

[8] T. Ogawa, A proof of Trudinger's inequality and its application to nonlinear Schrödinger equations, Nonlinear analysis, Theory. Methods & Applications, Vol. 14, No.9. 765-769. 1990.

[9] T. Ozawa, On critical cases of Sobolev's inequalities, J. Funct. Anal. 127 (1995), no. 2, 259-269.

[10] T. Ozawa, Y. Tsutsumi, Existence and smoothing effect of solutions for the Zakharov equations, Publ. RIMS. Kyoto Univ. 28 (1992), 329-361.

[11] C. Sulem, P.-L. Sulem, The nonlinear Schrödinger equation. self-focusing and wave collapse, Applied Mathematical Sciences, 139. Springer-Verlag, New York, 1999.

[12] M.I. Weinstein, Nonlinear Schrödinger equations and sharp interpolation estimates, Commun. Math. Phys. 87, 567-576. 1983.