

Stringy motives via the wild p^n -cyclic McKay correspondence

大阪大学大学院 理学研究科 数学専攻
丹野真人 (Mahito TANNO)

概要

野性 McKay 対応 (正標数での McKay 対応) は, 有限群作用による商多様体の弦モチーフと呼ばれる不変量が, ある種の積分で表せることを主張する. しかしながら, 一般の状況でこの積分を計算するのは難しい. 著者は位数が基礎体の標数のベキである巡回群の場合に, 被積分関数の明示公式と, 積分の収束条件を与えた. またこれらの結果の商特異点の応用についても述べる.

1 導入

G を有限群とし, V を d 次元の G 表現とする. しばしば V をアフィン空間 \mathbb{A}^d と同一視する. McKay 対応とは, 商多様体 V/G の幾何学的な不変量と G 表現 V の代数的な不変量が一致する現象を指す. Batyrev は次の形の McKay 対応を証明した.

定理 1.1 (Batyrev [1, Theorem 1.10]). $SL(n, \mathbb{C})$ の有限部分群 G が \mathbb{C}^n に作用しているとする. また, 商多様体 \mathbb{C}^n/G のクレパント特異点解消 $Y \rightarrow \mathbb{C}^n/G$ が存在すると仮定する. このとき等式

$$Y \text{ の Euler 標数} = G \text{ の共役類の個数}$$

が成立する.

Denef–Loeser [3] はモチーフ積分を用いて不変量を定義し McKay 対応を証明した. 正標数での McKay 対応, 特に野性的状況を含むものはモチーフ積分を用いて安田 [10] によって証明された. 野性的とは, 与えられた群の位数が基礎体の標数で割り切れるような状況を指す. k を標数 p の代数的閉体としておく.

定理 1.2 (Yasuda [10, Corollary 16.3]). 有限群 G がアフィン空間 \mathbb{A}_k^d に線型かつ効果的に作用しているとする. また, 擬反射を持たないと仮定する. このとき等式

$$M_{\text{st}}(\mathbb{A}_k^d/G) = \int_{G\text{-Cov}(D)} \mathbb{L}^{d-\mathbf{v}}$$

が成立する. ここで $M_{\text{st}}(\mathbb{A}_k^d/G)$ は \mathbb{A}_k^d/G の弦モチーフ (*stringy motive*) と呼ばれる不変量, $G\text{-Cov}(D)$ は $D = \text{Spec } k[[t]]$ の G 被覆のモジュライ空間, \mathbf{v} は $G\text{-Cov}(D)$ 上定義された有理数値関数である. \mathbf{v} 関数は与えられた G 表現に依存する. G 表現 V に付随した \mathbf{v} 関数であることを強調したい場合は \mathbf{v}_V と下付き添字で表すことにする.

本稿ではモチーフ積分については立ち入らない．優れた入門として Craw [2] を挙げておく．またモチーフ積分を用いた McKay 対応の解説として安田による論説 [8] がある．詳細についてはそちらを参照されたい．

弦モチーフ $M_{\text{st}}(\mathbb{A}_k^d/G)$ は商多様体 \mathbb{A}_k^d/G の特異点の情報を含んでいるため，積分 $\int_{G\text{-Cov}(D)} \mathbb{L}^{d-\nu}$ を通して特異点を調べることが可能である．そのためにはモジュライ空間 $G\text{-Cov}(D)$ の構造および ν 関数の計算方法を理解することが必要である．しかし，一般の有限群 G に対してこれらの記述を与えることは難しい．

$G = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ の場合は安田 [7] によって調べられている．安田と著者 [6] は $G = \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$ の場合にモジュライ空間について調べ， ν 関数の明示公式を与えた．また，積分 $\int_{G\text{-Cov}(D)} \mathbb{L}^{d-\nu}$ が収束するための必要十分条件を与え，商多様体 \mathbb{A}_k^d/G の特異点の判定条件を与えた ($n = 1$ は [9], $n = 2$ は [6], $n \geq 3$ は [5])．また近年，正標数の極少モデル理論に関連して，川又ログ端末的であるが Cohen–Macaulay でない特異点の例が与えられた．本研究の応用として，そのような特異点の例を与えることができる．本稿ではこれらの結果について簡単に報告する．

注意 1.3. 擬反射を持つ場合，商射 $\mathbb{A}_k^d \rightarrow (X = \mathbb{A}_k^d/G, \Delta)$ をクレパントとするような \mathbb{Q} -Weil 因子 Δ との対 (X, Δ) を考える必要がある． $G = \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$ の場合，いつ擬反射を持つかを判定できる．またそのような因子 Δ についても分かっている ([6, Corollary 4.7, Proposition 4.8]).

以後断りのない限り $G = \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$ とする．

2 G 被覆と ν 関数

$D = \text{Spec} k[[t]]$ の G 被覆 E とは次のようなものであった： E^* を適当な $D^* = \text{Spec} k((t))$ のエタール G 被覆とし， E は D の E^* の中での正規化．Artin–Schreier–Witt 理論を用いて対応する $k((t))$ の G 拡大を考えることにより，モジュライ空間 $G\text{-Cov}(D)$ を記述できる．すなわち G 被覆と reduced Witt ベクトルとの間に 1 対 1 対応が存在する．ここで reduced Witt ベクトル $\mathbf{f} = (f_0, f_1, \dots, f_{n-1})$ の各成分は次の形をしている：

$$f_m = \sum_{j>0, p \nmid j} a_{m,j} t^{-j} \in k[t^{-1}].$$

さらに次のような stratification がとれる：

$$\begin{aligned} G\text{-Cov}(D) &= \coprod_{\mathbf{j}} G\text{-Cov}(D; \mathbf{j}), \\ G\text{-Cov}(D; \mathbf{j}) &\leftrightarrow \{(f_0, f_1, \dots, f_{n-1}) \mid \text{ord } f_m = -j_m\}, \\ &\leftrightarrow \prod_{j_m \neq -\infty} \mathbb{G}_{k,m} \times_k \mathbb{A}_k^{j_m-1-\lfloor j_m/p \rfloor}. \end{aligned}$$

ここで $\mathbf{j} = (j_0, j_1, \dots, j_{n-1})$ は p の倍数でない正整数，または $-\infty$ たちの組である．

ν 関数の値は，上の \mathbf{j} を用いて記述できる．

定理 2.1 ([6, Theorem 3.3]). $E \in G\text{-Cov}(D; \mathbf{j})$ を連結な G 被覆とし， $L/k((t))$ を対応する G 拡大

であるとする. 各 i ($i = 0, 1, \dots, n-1$) に対して

$$u_i = \max\{p^{i-1-m}j_m \mid m = 0, 1, \dots, n-1\},$$

$$l_i = u_0 + (u_1 - u_0)p + \dots + (u_i - u_{i-1})p^i$$

とおく. このとき

$$v_V(E) = \sum_{\substack{0 \leq i_0 + pi_1 + \dots + p^{n-1}i_{n-1} < d, \\ 0 \leq i_0, i_1, \dots, i_{n-1} < p}} \left\lceil \frac{i_0 p^{n-1} l_0 + i_1 p^{n-2} l_1 + \dots + i_{n-1} l_{n-1}}{p^n} \right\rceil.$$

上の定理で, u_i と l_i はそれぞれ拡大 $L/k((t))$ の $i+1$ 次 upper ramification jump, lower ramification jump と呼ばれるものになっている. 記号の濫用ではあるが, v 関数を \mathbf{j} や $\mathbf{u} = (u_0, u_1, \dots, u_{n-1})$ の関数と思い, それぞれ $v(\mathbf{j})$ や $v(\mathbf{u})$ などと表すことにする.

注意 2.2. E が連結でない場合の v 関数について述べる. E' を E の連結成分, G' を安定化部分群とする. このとき V' を V を G' へ制限して得られる G' 表現とすれば

$$v_V(E) = v_{V'}(E')$$

が成立する. このように帰納的に G を小さい群に取り換えて上の定理を適用することで v 関数を計算することができる.

3 積分の収束判定

積分の定義と, v_V は各 $G\text{-Cov}(D; \mathbf{j})$ 上で定数関数となることから

$$\int_{G\text{-Cov}(D)} \mathbb{L}^{d-v_V} = \sum_{\mathbf{j}} [G\text{-Cov}(D; \mathbf{j})] \mathbb{L}^{d-v_V(\mathbf{j})}$$

となる. ここで $[X]$ は X が定める, k 代数多様体がなす完備 Grothendieck 環 (の適当な変種) での同値類を表す. 特に $\mathbb{L} = [\mathbb{A}_k^1]$ である.

重要なのは連結な G 被覆であるので, その上での積分の値について注目しよう. 和の順番を変えることで

$$\int_{\text{連結な } G \text{ 被覆}} \mathbb{L}^{d-v_V} = \sum_{\mathbf{u} \in \mathcal{U}} \left(\sum_{\mathbf{j} \in \mathcal{J}(\mathbf{u})} [G\text{-Cov}(D; \mathbf{j})] \right) \mathbb{L}^{d-v_V(\mathbf{u})} \quad (1)$$

を得る. ここで \mathcal{U} は $k((t))$ の G 拡大に現れる upper ramification jumps $\mathbf{u} = (u_0 \leq u_1 \leq \dots \leq u_{n-1})$ 全体がなす集合であり, $\mathcal{J}(\mathbf{u})$ は upper ramification jumps が \mathbf{u} になるような \mathbf{j} たちの集合とする. \mathcal{U} がどのような集合となるかはよく知られている (例えば Obus–Pries [4, Lemma 3.5] を参照).

命題 3.1. $\mathbf{u} = (u_0 \leq \dots \leq u_{n-1})$ がある G 拡大 $L/k((t))$ の upper ramification jumps であるための必要十分条件は以下を満たすことである:

1. $p \nmid u_0$ かつ
2. 各 i ($i = 1, 2, \dots, n-1$) に対し
 - (a) $u_i = pu_{i-1}$ または
 - (b) $u_i > pu_{i-1}$ かつ $p \nmid u_i$
 が成り立つ.

(1) の右辺は \mathbf{u} を変数とする関数たちの無限級数であるから, $u_m \rightarrow \infty$ としたときその関数が $-\infty$ に発散していることが, 積分が収束することの必要十分条件である. 極限が問題となるので, 有界関数の差を無視してもよいことに注意しておく.

定義 3.2. V を直既約な d 次元表現とする. このとき

$$S_d^{(m)} = \sum_{\substack{0 \leq i_0 + i_1 p + \dots + i_{n-1} p^{n-1} < d, \\ 0 \leq i_0, i_1, \dots, i_{n-1} < p}} i_m \quad (0 \leq m \leq n-1),$$

$$D_V^{(m)} = p^{n-1} \left(S_d^{(m)} - (p-1) \sum_{l=0}^{m-1} p^{m-1-l} S_d^{(l)} \right) \quad (0 \leq m \leq n-1)$$

と定める. 直既約でない表現については, 表現の直和について加法的になるように定義を拡張する.

簡単な計算により, 積分 (1) が収束するための必要十分条件は関数

$$f(\mathbf{u}) = \sum_{m=0}^{n-1} \left(1 - \frac{1}{p} - \frac{D_V^{(m)}}{p^n} \right) u_m$$

が $-\infty$ に発散することであることがわかる. 非連結な G 被覆上での積分もまとめると, 次の定理を得る.

定理 3.3 ([5]). 積分 $\int_{G\text{-Cov}(D)} \mathbb{L}^{d-\mathbf{v}}$ が収束するための必要十分条件は, 不等式

$$1 - \frac{1}{p^{n-m}} - \sum_{l=m}^{n-1} \frac{D_V^{(l)}}{p^{2n-1-l}} < 0 \quad (m = 0, 1, \dots, n-1)$$

が成立することである.

4 特異点

最後に野性 McKay 対応を通した, 特異点への応用について簡単に述べる. 例えば次の定理が知られている.

定理 4.1 ([10, Corollary 16.4]). 有限群 G がアフィン空間 \mathbb{A}_k^d に線型かつ効果的に作用しているとす. また擬反射を持たないと仮定する. このとき, 積分 $\int_{G\text{-Cov}(D)} \mathbb{L}^{d-\mathbf{v}}$ が収束するならば商多様体 \mathbb{A}_k^d/G は標準的である.

これと定理 3.3 を組み合わせることで、 \mathbb{A}_k^d/G が標準的かを判定することができる。さらに G 表現 V が直既約である場合には、不変量 $D_V^{(m)}$ を具体的に計算することにより、次のような単純な判定法が得られる。

系 4.2 ([5]). V が直既約な d 次元 G 表現であって、擬反射を持たないものとする。このとき商多様体 V/G が標準的 (ログ標準的) であるための十分条件 (必要十分条件) は $d \geq p + p^{n-1}$ ($d \geq p - 1 + p^{n-1}$) が成立することである。

例 4.3. $p = 2$ のとき $G = \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ が \mathbb{A}_k^4 に巡回置換で作用しているとする。このとき商多様体 \mathbb{A}_k^4/G は標準的であるが Cohen–Macaulay でない。

参考文献

- [1] Victor V. Batyrev. Stringy Hodge numbers of varieties with Gorenstein canonical singularities. In *Integrable systems and algebraic geometry (Kobe/Kyoto, 1997)*, pp. 1–32. World Sci. Publ., River Edge, NJ, 1998.
- [2] Alastair Craw. An introduction to motivic integration. In *Strings and geometry*, Vol. 3 of *Clay Math. Proc.*, pp. 203–225. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2004.
- [3] Jan Denef and François Loeser. Motivic integration, quotient singularities and the McKay correspondence. *Compos. Math.*, Vol. 131, No. 3, pp. 267–290, 2002.
- [4] Andrew Obus and Rachel Pries. Wild tame-by-cyclic extensions. *J. Pure Appl. Algebra*, Vol. 214, No. 5, pp. 565–573, 2010.
- [5] Mahito Tanno. On convergence of stringy motives of wild p^n -cyclic quotient singularities. preprint, arXiv: 2101.06971 [math.AG], 2021.
- [6] Mahito Tanno and Takehiko Yasuda. The wild mckay correspondence for cyclic groups of prime power order, 2020. preprint, arXiv: 2006.12048 [math.AG].
- [7] Takehiko Yasuda. The p -cyclic McKay correspondence via motivic integration. *Compos. Math.*, Vol. 150, No. 7, pp. 1125–1168, 2014.
- [8] 安田健彦. モチーフ積分による野性マッケイ対応. *数学*, Vol. 70, No. 2, pp. 159–183, 2018.
- [9] Takehiko Yasuda. Discrepancies of p -cyclic quotient varieties. *J. Math. Sci. Univ. Tokyo*, Vol. 26, No. 1, pp. 1–14, 2019.
- [10] Takehiko Yasuda. Motivic integration over wild Deligne–Mumford stacks, 2019. preprint, arXiv: 1908.02932 [math.AG].