# 走化性が弱い場合でのロジスティック項付き Keller–Segel 系の解の爆発について

東京理科大学大学院 理学研究科 数学専攻
田中 悠也 (Yuya TANAKA)

**概要**

本稿では, 次のロジスティック項をもつ準線形放物・楕円型 Keller–Segel 系を初期条件及び Neumann 境界条件の下で考える:

$$\begin{cases} u_t = \Delta(u+1)^m - \chi\nabla\cdot(u(u+1)^{\alpha-1}\nabla v) + \lambda u - \mu u^\kappa, & x\in B_R,\ t>0,\\ 0 = \Delta v - v + u, & x\in B_R,\ t>0. \end{cases}$$

ここで, $B_R \subset \mathbb{R}^n$ $(R>0, n\geq 3)$ は原点を中心とする半径 $R$ の開球とし, $m\geq 1$, $\chi>0$, $\alpha>0$, $\lambda>0$, $\mu>0$, $\kappa\geq 1$ とする. 本研究では, この問題の解 $u$ が有限時刻で爆発する条件を得ることができた. ここでは, $m=1$ とした場合に得られた結果について紹介する.

## 1 導入

本稿では, 次のロジスティック項をもつ準線形放物・楕円型 Keller–Segel 系の初期値境界値問題について考える:

$$\begin{cases} u_t = \Delta(u+1)^m - \chi\nabla\cdot(u(u+1)^{\alpha-1}\nabla v) + \lambda u - \mu u^\kappa, & x\in B_R,\ t>0,\\ 0 = \Delta v - v + u, & x\in B_R,\ t>0,\\ \nabla u\cdot\nu = \nabla v\cdot\nu = 0, & x\in\partial B_R,\ t>0,\\ u(x,0)=u_0(x), & x\in B_R. \end{cases} \tag{1}$$

ここで, $B_R\subset\mathbb{R}^n$ $(R>0,\ n\geq 3)$ は原点を中心とする半径 $R$ の開球, $m\geq 1$, $\chi>0$, $\alpha>0$, $\lambda>0$, $\mu>0$, $\kappa\geq 1$, $\nu$ は $\partial B_R$ の外向き単位法線ベクトルとし, $u_0\in C(\overline{B_R})$ は球対称で, $u_0\geq 0$ を満たすとする. 問題 (1) は, ある化学物質 (濃度 $v$) に引き寄せられる走化性をもつ生物 (密度 $u$) の動きを表したモデルであり, 生物の増殖を抑制する働きがあるロジスティック項 $\lambda u - \mu u^\kappa$ をもつことが特徴である. 問題 (1) の第一方程式の右辺第一項は生物の拡散を表す拡散項であり, 右辺第二項は生物の集中を表す走化性項である. そのため, 問題 (1) においてどのような場合に生物が拡散するか, または集中するかを明らかにすることは重要な研究課題の一つである. そして, 生物学における拡散現象は数学的には解 $u$ が有界であることを意味し, 集中現象は解 $u$ が有限時刻で爆発することを意味する. ここで, 解 $u$ が有界であるとは, $\exists C>0;\ \|u(\cdot,t)\|_{L^\infty(B_R)}\leq C\ (t>0)$ を満たすことであり, 解 $u$ が有限時刻で爆発するとは, $\exists T^*\in(0,\infty);\ \limsup_{t\nearrow T^*}\|u(\cdot,t)\|_{L^\infty(B_R)}=\infty$ を満たすことである. また, $\|\cdot\|_{L^\infty(B_R)}$ は $\|f\|_{L^\infty(B_R)} := \inf\{C>0;\ |f(x)|\leq C \text{ a.a. } x\in B_R\}$ $(f\in L^\infty(B_R))$ によって定義される.

# 2　先行研究

問題 (1) において, ロジスティック項がなく, 拡散項と走化性項がともに単純である $m=\alpha=1$ の場合に, Nagai [3] は $n=1$, または, $n=2$ かつ $\int_{B_R} u_0 < \frac{8\pi}{\chi}$ のときに解が有界であること, また, $n=2$ かつ $\int_{B_R} u_0 > \frac{8\pi}{\chi}$, または, $n \geq 3$ のときに解が有限時刻で爆発するような初期値が存在することを示した. また, Sugiyama–Kunii [4] は, (1) の第一方程式を $u_t = \Delta u^m - \chi \nabla \cdot (u^\alpha \nabla v)$ とした場合に, $m \geq 1$, $\alpha \geq 1$ で $m-\alpha > \frac{n-2}{n}$ のときに解が有界であることと, $m-\alpha \leq \frac{n-2}{n}$ のときに小さい初期値に対して解が有界になることを示した. さらに最近, (1) で $\lambda=\mu=0$ とした場合に, Lankeit [2] は $m, \alpha \in \mathbb{R}$ で $m-\alpha > \frac{n-2}{n}$ のときに解が有界であることと, $m-\alpha < \frac{n-2}{n}$ のときに無限または有限時刻で爆発する解を与える初期値が存在することを示した.

一方, ロジスティック項がある場合については, $m=\alpha=1$ としたとき, $\kappa=2$, $\mu > \frac{n-2}{n}\chi$ または $\kappa > 2$, $\mu > 0$ という条件の下で解が有界となることが Tello–Winkler [6] により示されている. これに対して, Winkler [7] はロジスティック項 $\lambda u - \mu u^\kappa$ における指数 $\kappa$ の小ささの条件

- $n \in \{3,4\}$ のとき,
$$\kappa < \frac{7}{6},$$
- $n \geq 5$ のとき,
$$\kappa < 1 + \frac{1}{2(n-1)}$$

の下で解が有限時刻で爆発するような初期値の存在を示した. この条件は, ロジスティック項による抑制の影響を解の爆発を促す走化性項に吸収させるための条件となっている. また, [5] では走化性項の影響が弱い場合である $m=1$, $\alpha \in (0,1)$ の場合に, 解が有限時刻で爆発するような $\alpha$ と $\kappa$ の条件が得られている. さらに最近, Black–Fuest–Lankeit [1] により解の有界性を促進する拡散項の効果が強い場合, つまり, 問題 (1) で $m \geq 1$, $\alpha = 1$ の場合に, 解が有限時刻で爆発するような次の条件が得られた:

- $n \geq 3$ のとき,
$$1 \leq m < \frac{2n-2}{n}$$
かつ
$$\kappa < 1 + \min\left\{\frac{(m-1)n+1}{2(n-1)}, \frac{n-2-(m-1)n}{n(n-1)}\right\}.$$

しかし, 拡散項による影響が強い場合だけでなく, 解の爆発を促進する走化性項の効果が弱い場合 $(\alpha < 1)$ も考慮したときの条件についてはまだ得られていない.

本研究の目的は, ロジスティック項をもつ Keller–Segel 系において,

**拡散項の影響と走化性項の影響を両方とも考慮した場合の解の爆発が起きる条件が得られないか？**

という疑問に対して, 肯定的な結果を得ることである.

# 3　主結果

ここでは, 簡単のため $m=1$ として, 走化性項の影響が弱い場合の解の爆発について得られた結果を述べる. ここで, $\alpha>0$ と $\kappa\ge 1$ は以下の条件 (i)–(iii) を満たすとする:

(i) $n\in\{3,4\}$ のとき,

$$\frac{2}{n}<\alpha<1+\frac{2}{n(n+1)} \quad \text{かつ} \quad \kappa<1+\frac{(n-2)[(1-\alpha)n+1]}{n(n-1)}-(1-\alpha)_+.$$

(ii) $n=5$ のとき,

$$\begin{cases} \dfrac{4}{5}<\alpha\le\dfrac{14}{15} \quad \text{かつ} \quad \kappa<1+\dfrac{(n-2)[(1-\alpha)n+1]}{n(n-1)}-(1-\alpha), \\ \dfrac{14}{15}<\alpha<1+\dfrac{2}{n(n+1)} \quad \text{かつ} \quad \kappa<1+\dfrac{(1-\alpha)n+1}{2(n-1)}-\dfrac{(1-\alpha)_+}{2}. \end{cases}$$

(iii) $n\ge 6$ のとき,

$$1-\frac{2}{n(n-3)}<\alpha<1+\frac{2}{n(n+1)} \quad \text{かつ} \quad \kappa<1+\frac{(1-\alpha)n+1}{2(n-1)}-\frac{(1-\alpha)_+}{2}$$

(ここで, $(1-\alpha)_+ := \max\{0,1-\alpha\}$ である). このとき, 問題 (1) の解の爆発に関して次の結果を得た:

**定理 1.** $n\ge 3$, $R>0$, $m=1$, $\chi>0$, $\lambda>0$, $\mu>0$ とし, $\alpha>0$ と $\kappa\ge 1$ は条件 (i)–(iii) を満たすと仮定する. このとき, ある $\varepsilon_0>0$ が存在し, 任意の $L>0$, $M>0$, $M_1\in(0,M)$ に対して, 以下を満たすある $r_0\in(0,R)$ が存在する:
$p:=\frac{n(n-1)}{(1-\alpha)n+1}+\varepsilon_0$ $(>n)$ とし, 非負の球対称な初期値 $u_0\in C(\overline{B_R})$ が

$$u_0(x)\le L|x|^{-p} \quad (x\in B_R) \quad \text{かつ} \quad \int_{B_R}u_0=M, \quad \int_{B_{r_0}}u_0\ge M_1$$

を満たすならば, ある $T^*\in(0,\infty)$ が存在し, (1) の古典解

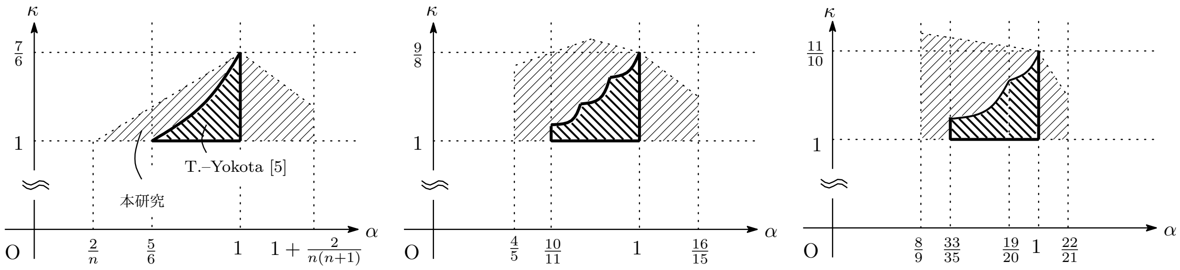
$$\begin{aligned} &u\in C(\overline{B_R}\times[0,T^*))\cap C^{2,1}(\overline{B_R}\times(0,T^*)), \\ &v\in \bigcap_{q>n} C([0,T^*);W^{1,q}(B_R))\cap C^{2,1}(\overline{B_R}\times(0,T^*)) \end{aligned}$$

が一意的に存在して, さらに, (1) の解は次の意味で爆発する:

$$\limsup_{t\nearrow T^*}\|u(\cdot,t)\|_{L^\infty(B_R)}=\infty.$$

**注意 1.** 主定理における $C^{2,1}(\overline{B_R}\times(0,T^*))$ の指数 2 とは空間方向に微分可能な階数を表し, 指数 1 は時間について微分可能な階数を表す. また, $W^{1,q}(B_R)$ は $L^q(B_R)$ に属する関数でその弱導関数も $L^q(B_R)$ に属するものの集まりである.

**注意 2.** 条件 (i)–(iii) の $(\alpha,\kappa)$ を図示すると下の図の斜線部分のようになり, 定理 1 における $\alpha$ と $\kappa$ の条件は, [5] における $\alpha$ と $\kappa$ の条件の改良となっていることがわかる. また, 定理 1 の初期値 $u_0$ に対する条件については, $u_0(x) \le L|x|^{-p}$ が本質的であるかは不明であるが, 残りの条件については, 初期値 $u_0$ が原点付近で $u_0(x) \not\equiv 0$ であることを表している.



(a) $n = 3,\ 4$ のとき　(b) $n = 5$ のとき　(c) $n = 6$ のとき

**注意 3.** 本研究では, $m \ge 1$ の場合についての条件も得られた. $m$ と $\alpha$ の詳しい条件は以下のようになる:

- $n \in \{3,4\}$ のとき,

$$\text{(I)}\qquad \alpha < \frac{2}{n+1}m + \frac{n^2-n+2}{n(n+1)},\ \alpha < -\frac{1}{n-2}m + \frac{n^2-2}{n(n-2)},\ m-\alpha < \frac{n-2}{n}.$$

- $n \ge 5$ のとき,

$$\begin{aligned}\text{(II)}\qquad & -\frac{2}{n-3}m + \frac{n^2-n-2}{n(n-3)} < \alpha < \frac{2}{n+1}m + \frac{n^2-n+2}{n(n+1)},\\ & \alpha < -\frac{n+2}{n-4}m + \frac{2n^2-n-4}{n(n-4)},\quad \alpha \le \frac{n+2}{3}m - \frac{n^2-4}{3n},\\ \text{(III)}\qquad & -\frac{2}{n-3}m + \frac{n^2-n-2}{n(n-3)} < \alpha < \frac{2}{n+1}m + \frac{n^2-n+2}{n(n+1)},\\ & -\frac{n+2}{n-4}m + \frac{2n^2-n-4}{n(n-4)} \le \alpha < -\frac{1}{n-2}m + \frac{n^2-2}{n(n-2)},\quad m-\alpha < \frac{n-2}{n}.\end{aligned}$$

このときの $\kappa \ge 1$ の条件については以下のようになる:

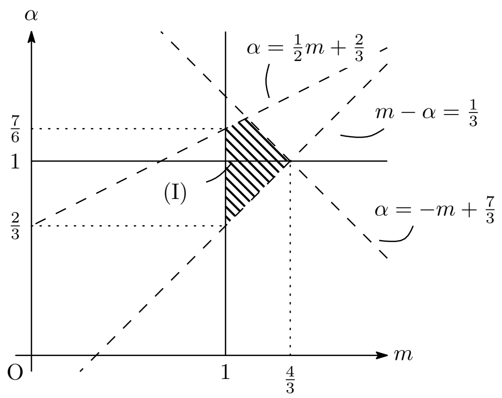
- (I), (II) のとき,

$$\kappa < 1 + \frac{(n-2)[(m-\alpha)n+1]}{n(n-1)} - (m-1) - (1-\alpha)_+.$$

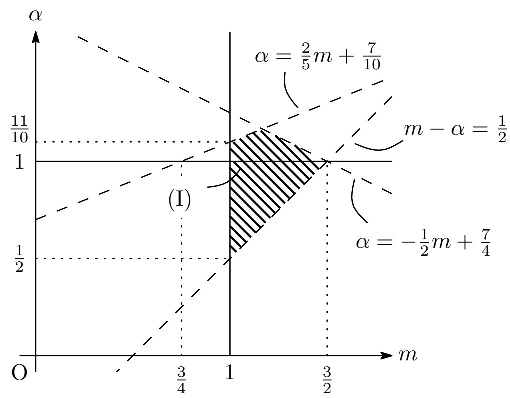
- (III) のとき,

$$\kappa < 1 + \frac{(m-\alpha)n+1}{2(n-1)} - \frac{(1-\alpha)_+}{2}.$$

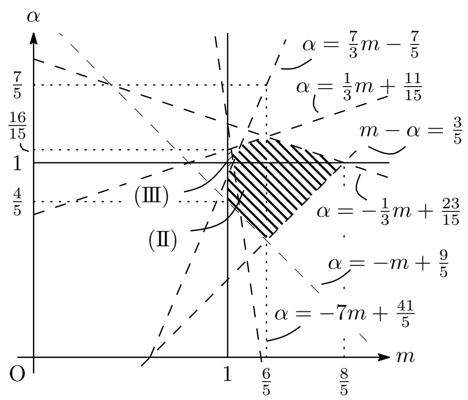
また, 条件 (I)–(III) における $(m,\alpha)$ を図示すると以下の図の斜線部分のようになる:



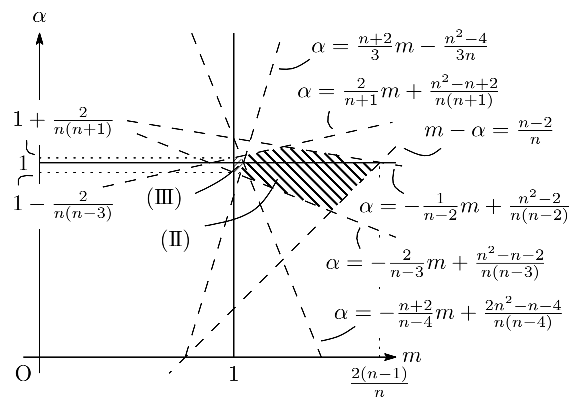

(a) $n = 3$ のとき




(b) $n = 4$ のとき




(c) $n = 5$ のとき




(d) $n \geq 6$ のとき

# 4 証明の方針と解の爆発を導く基本的な補題の説明

有限時刻での解の爆発を背理法により証明する. まず, $T_{\max}$ を解 $u$ の最大存在時間とし, $T_{\max} = \infty$ と仮定する. 次に, 非負で有界な汎関数 $\phi$ を用いて次のような微分不等式が作れないかを考える:

$$\frac{d}{dt}\phi(u(\cdot,t)) \geq C\phi^a(u(\cdot,t)) \quad (C > 0,\ a > 1 : \text{定数}). \tag{2}$$

ここで, 爆発解析でよく用いられる次の補題を紹介する.

**補題 1.** $a > 1$, $b > 0$, $C > 0$ とし,

$$T_0 := \frac{1}{(a-1)b^{a-1}C}$$

とする. また, $\psi \in C^1([0, T_0))$ は非負であり, $\psi(0) = b$ と次の不等式を満たすとする:

$$\frac{d}{dt}\psi(t) \geq C\psi^a(t), \quad t \in [0, T_0). \tag{3}$$

このとき, $\psi$ は時刻 $T_0$ で爆発する.

**証明.** 関数 $\psi$ が非負であることから,

$$\frac{d}{dt}\psi(t) \geq C\psi^a(t) \geq 0, \quad t \in [0, T_0)$$

となるため, $\psi$ は増加関数であることがわかる. また, $\psi(0) = b > 0$ であるため, $\psi(t) > 0\,(t \in [0, T_0))$ となる. よって, (3) により

$$-\frac{1}{a-1} \cdot \frac{d}{dt}\frac{1}{\psi^{a-1}(t)} \geq C.$$

この不等式の両辺を 0 から $t$ で積分すると,

$$-\frac{1}{a-1} \cdot \frac{1}{\psi^{a-1}(t)} + \frac{1}{a-1} \cdot \frac{1}{\psi^{a-1}(0)} \geq Ct.$$

よって,

$$\begin{aligned}\psi(t) &\geq \left(\frac{1}{b^{-(a-1)} - (a-1)Ct}\right)^{\frac{1}{a-1}} \\ &= \left(\frac{1}{(a-1)C \cdot (T_0 - t)}\right)^{\frac{1}{a-1}}\end{aligned}$$

となり, $\psi(t)$ は $t \to T_0$ とすると $\psi(t) \to \infty$ となることがわかる. $\square$

この補題により, (2) を満たす $\phi(u(\cdot, t))$ が有界であることに矛盾が生じるため, $T_{\max} < \infty$ となり, blow-up criterion により解が爆発することがわかる. ここで, blow-up criterion とは問題 (1) の解 $u$ がもつ次の性質のことである:

$$T_{\max} < \infty \quad \Longrightarrow \quad \limsup_{t \nearrow T_{\max}} \|u(\cdot, t)\|_{L^\infty(B_R)} = \infty.$$

以上より, 解の爆発を示すためには (2) のような不等式を得ることが目標となる. 本研究では, よく知られた手法として, 問題 (1) を

$$\begin{aligned}w(s,t) &:= \int_0^{s^{\frac{1}{n}}} \rho^{n-1} u(\rho, t)\, d\rho \quad (s \in (0, R^n), t > 0), \\ z(s,t) &:= \int_0^{s^{\frac{1}{n}}} \rho^{n-1} v(\rho, t)\, d\rho \quad (s \in (0, R^n), t > 0)\end{aligned}$$

により式変形し, モーメント型関数

$$\phi(t) := \int_0^{s_0} s^{-\gamma}(s_0 - s) w(s,t)\, ds \quad (s_0 \in (0, R^n),\ \gamma \in (0,1))$$

を使う手法を採用する ([7] 参照). 条件 (i)–(iii) を仮定することで, 次のような不等式を導出することができる:

$$\phi'(t) \geq C_1 s_0^{-a} \phi^2(t) - C_2 s_0^b \quad (a > 0,\ b > 0).$$

この不等式から $T_{\max} < \infty$ となることがわかり, 解が爆発することが示される.

## 参考文献


[1] T. Black, M. Fuest, J. Lankeit, *Relaxed parameter conditions for chemotactic collapse in logistic-type parabolic–elliptic Keller–Segel systems*, arXiv:2005.12089[math.AP].

[2] J. Lankeit, *Infinite time blow-up of many solutions to a general quasilinear parabolic–elliptic Keller–Segel system*, Discrete Contin. Dyn. Syst. Ser. S **13** (2020), 233–255.

[3] T. Nagai, *Blow-up of radially symmetric solutions to a chemotaxis system*, Adv. Math. Sci. Appl. **5** (1995), 581–601.

[4] Y. Sugiyama, H. Kunii, *Global existence and decay properties for a degenerate Keller–Segel model with a power factor in drift term*, J. Differential Equations **227** (2006), 333–364.

[5] Y. Tanaka, T. Yokota, *Blow-up in a parabolic–elliptic Keller–Segel system with density-dependent sublinear sensitivity and logistic source*, Math. Methods Appl. Sci. **43** (2020), 7372–7396.

[6] J. I. Tello, M. Winkler, *A chemotaxis system with logistic source*, Comm. Partial Differential Equations **32** (2007), 849–877.

[7] M. Winkler, *Finite-time blow-up in low-dimensional Keller–Segel systems with logistic-type superlinear degradation*, Z. Angew. Math. Phys. **69**:40 (2018).