Postnikov–Stanley の Linial 配置予想

北海道大学大学院 理学院 数学専攻
田村　繁太郎 (Shigetaro Tamura)

1　超平面配置と特性多項式

1.1　特性多項式

$\mathbb{K}$ を体とする. $(\ ,\ )$ をベクトル空間 $\mathbb{K}^\ell$ の内積とする. $\boldsymbol{a} \in \mathbb{K}^\ell, k \in \mathbb{K}$ とし,

$$H_{\boldsymbol{a},k} := \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{K}^\ell \mid (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{x}) = k\}, \tag{1}$$

と定める. $H_{\boldsymbol{a},k}$ を $\mathbb{K}^\ell$ 上の超平面という. ベクトル空間 $\mathbb{K}^\ell$ に含まれる超平面の有限集合 $\mathcal{A} = \{H_{\boldsymbol{a}_1,k_1}, \cdots, H_{\boldsymbol{a}_m,k_m}\}$ を $\mathbb{K}^\ell$ 上の超平面配置という. 例えば, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ とすると, $\mathbb{R}$ 上の点の集合, $\mathbb{R}^2$ 上の直線の集合, $\mathbb{R}^3$ 上の平面の集合などが超平面配置の例となる.

超平面配置 $\mathcal{A}$ に対して,

$$\mathcal{L}(\mathcal{A}) := \left\{\cap_{i \in I} H_{\boldsymbol{a}_i,k_i} \neq \emptyset \mid I \subset \{1, 2, \cdots, m\}\right\}, \tag{2}$$

を考える. これは超平面同士の共通部分を全て集めたものであり, 包含関係を用いて半順序を定めることで半順序集合となる. $\mathcal{L}(\mathcal{A})$ を $\mathcal{A}$ の交差半順序集合という. $\mathcal{L}(\mathcal{A})$ 上にメビウス関数 $\mu : \mathcal{L}(\mathcal{A}) \to \mathbb{Z}$ を以下のように定める. $V = \mathbb{K}^\ell$ として,

$$\mu(V) := 1, \tag{3}$$
$$\mu(X) := -\sum_{X \subsetneq Y} \mu(Y), \quad X \subsetneq V. \tag{4}$$

メビウス関数を用いて, 超平面配置 $\mathcal{A}$ に付随する多項式が以下のように定義される.

定義 1.1 ([11])**.**
$$\chi(\mathcal{A}, t) := \sum_{X \in \mathcal{L}(\mathcal{A})} \mu(X) t^{\dim X}. \tag{5}$$

$\chi(\mathcal{A}, t)$ を $\mathcal{A}$ の特性多項式という. 特性多項式は超平面配置に関する様々な情報を持つ. $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ とし, $\mathbb{R}^\ell$ 上の超平面配置を考えると, 超平面によって空間がいくつかの領域に分割される. 特性多項式によって空間がいくつに分割されるか知ることができる.

定理 1.2 (Zaslavsky [20])**.** $\mathcal{A}$ を $\mathbb{R}^\ell$ 上の超平面配置とする. $\mathcal{C}(\mathcal{A})$ を $\mathbb{R}^\ell \setminus \cup_{H \in \mathcal{A}} H$ の連結成分全体の集合とする. このとき,

$$|\mathcal{C}(\mathcal{A})| = (-1)^\ell \chi(\mathcal{A}, -1). \tag{6}$$

また, $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ とし, $\mathbb{C}^\ell$ 上の超平面配置を考えた場合, 組み合わせ論的に定義された特性多項式がベッチ数という位相的な情報を持つ.

定理 **1.3** (Orlik-Solomon [10]). $\mathcal{A}$ を $\mathbb{C}^\ell$ 上の超平面配置とする．超平面配置の補集合を $\mathcal{M}(\mathcal{A}) := \mathbb{C}^\ell \setminus \cup_{H\in\mathcal{A}} H$ とする．$b_k := \dim_{\mathbb{C}} \mathrm{H}^k(\mathcal{M}(\mathcal{A}), \mathbb{C}^\ell)$ を $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ のベッチ数とする．このとき，

$$\chi(\mathcal{A}, t) = \sum_{k=0}^{\ell} (-1)^{\ell-k} b_{\ell-k} t^k. \tag{7}$$

すなわち，特性多項式は超平面配置の位相的，組み合わせ論的な情報を持つ．

1.2 Truncated affine Weyl 配置

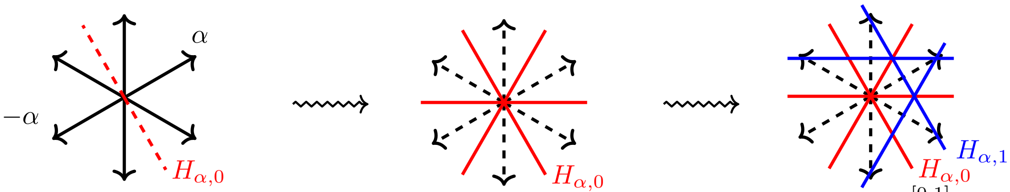
超平面配置の興味深いクラスとして，ルート系に付随した超平面配置がある．以下では特に断らない限り，$\mathbb{K} = \mathbb{R}$ とする．ルート系 Φ の正ルート全体を Φ^+ とする．ルート系 Φ に対して，以下のように定義される超平面配置を Weyl 配置という．

$$\mathcal{A}_\Phi := \{H_{\boldsymbol{\alpha},0} \mid \boldsymbol{\alpha} \in \Phi^+\}. \tag{8}$$

Weyl 配置にパラメータを加えて拡張した超平面配置

$$\mathcal{A}_\Phi^{[a,b]} := \{H_{\boldsymbol{\alpha},k} \mid \boldsymbol{\alpha} \in \Phi^+, k \in \mathbb{Z}, a \leqq k \leqq b\}, \tag{9}$$

を truncated affine Weyl 配置という．定義から明らかに $\mathcal{A}_\Phi^{[0,0]} = \mathcal{A}_\Phi$ である．その他にも，(extended) Shi 配置 $\mathcal{A}_\Phi^{[1-n,n]}$ や (extended) Catalan 配置 $\mathcal{A}_\Phi^{[-n,n]}$，(extended) Linial 配置 $\mathcal{A}_\Phi^{[1,n]}$ などのよく研究されている超平面配置のクラスを含む．



ルート系 $\Phi = A_2$　　Weyl 配置 $\mathcal{A}_{A_2}$　　Shi 配置 $\mathcal{A}_{A_2}^{[0,1]}$

2 Postnikov-Stanley の Linial 配置予想

Postnikov と Stanley は truncated affine Weyl 配置 $\mathcal{A}_\Phi^{[a,b]}$ のあるクラスに関して，以下の予想をした．

予想 **2.1** (Postnikov–Stanley [12]). Φ を既約ルート系，h_Φ は Φ のコクセター数とする．$a, b \in \mathbb{Z}$ とする．$a \leqq 1 \leqq b$ かつ $1 \leqq a + b$ とする．このとき，特性多項式 $\chi(\mathcal{A}_\Phi^{[a,b]}, t)$ の任意の根の実部は $\frac{(b-a+1)h_\Phi}{2}$．

Postnikov–Stanley はリーマンゼータ関数の非自明な零点の実部が $\frac{1}{2}$ になるという予想との類似から “リーマン予想” と呼んでいる．予想 2.1 に関連して，以下の定理が知られている．

定理 **2.2** (Yoshinaga [17]). $n \geqq 0$, $k \geqq 0$ とする．このとき，

$$\chi(\mathcal{A}_\Phi^{[1,n]}, t) = \chi(\mathcal{A}_\Phi^{[1-k,n+k]}, t + kh_\Phi). \tag{10}$$

この定理によって，Linial 配置 $\mathcal{A}_\Phi^{[1,n]}$ の場合に予想 2.1 が正しければ，その他のパラメータの場合も正しい．定理 2.2 の Φ が古典型の場合に関しては Athanasiadis [1] も証明を与えている．予想 2.1 は A_ℓ 型の場合を

Postnikov–Stanley が証明し [12], A_ℓ, B_ℓ, C_ℓ, D_ℓ 型の場合を Athanasiadis が組み合わせ論的方法で証明した [2]. E_6, E_7, E_8, F_4 型のパラメータが

$$n \equiv -1 \begin{cases} \bmod \quad 6, & \Phi = E_6, E_7, F_4 \\ \bmod \quad 30, & \Phi = E_8. \end{cases} \tag{11}$$

の場合と n が十分大きい場合は Yoshinaga によって証明された [17], [18].

3 Linial 配置の特性準多項式

Yoshinaga は特性準多項式の観点から予想 2.1 にアプローチし, 一般の既約ルート系に対する特性準多項式の具体的な表示を導いた [17]. この節では Yoshinaga の結果を説明する. まず, 準多項式について説明する.

3.1 Ehrhart 準多項式

準多項式とは関数 $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ であり, 適当な正の整数 p に関して以下のように書けるものをいう.

$$f(t) = \begin{cases} f_1(t), & t \equiv 1 \bmod p, \\ f_2(t), & t \equiv 2 \bmod p, \\ \quad \vdots & \\ f_{p-1}(t), & t \equiv p-1 \bmod p, \\ f_p(t), & t \equiv 0 \bmod p. \end{cases}$$

ここで, $f_1(t), \cdots, f_p(t)$ は多項式である. すなわち, 各整数点上で異なる多項式関数を周期的に取り得るような関数である. 各 $f_i(t)$ のことを $f(t)$ の構成素と呼ぶ. p を $f(t)$ の周期といい, 周期の中で最小のものを最小周期と呼ぶ. 準多項式の次数を $\deg f := \max\{\deg f_i \mid 1 \leqq i \leqq p\}$ とする. 準多項式が自然に現れる設定として有理凸多面体の格子点の数え上げがある. 適当なベクトル $v_1, \cdots, v_m \in \mathbb{Q}^d$ を用いて, $\mathcal{P} := \{\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_m v_m \in \mathbb{R}^d \mid \lambda_1 + \cdots + \lambda_m = 1, \lambda_1, \cdots, \lambda_m \in \mathbb{R}^d\}$ と定めた $\mathcal{P}$ を有理凸多面体という. 有理凸多面体 $\mathcal{P}$ を q 倍したものの中の整数点の個数は $\#(q\mathcal{P} \cap \mathbb{Z}^d)$ と書ける. この整数点の個数に関して以下が成り立つ.

定理 **3.1** ([3])**.** $q > 0$ とする. ある準多項式 $\mathrm{L}_{\mathcal{P}} : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ が存在し,

$$\mathrm{L}_{\mathcal{P}}(q) = \#(q\mathcal{P} \cap \mathbb{Z}^d). \tag{12}$$

この $\mathrm{L}_{\mathcal{P}}(q)$ を *Ehrhart* 準多項式という. 特に, $\mathcal{P}$ の頂点が整数点のとき $\mathrm{L}_{\mathcal{P}}(q)$ は多項式となり *Ehrhart* 多項式という.

ランク ℓ の既約ルート系 Φ に対して, Ehrhart 準多項式を考える. $Z(\Phi)$ を既約ルート系のコウェイト格子, $Q(\Phi)$ をコルート格子とする. 単純ルートを固定し, その双対基底を $\varpi_1, \cdots, \varpi_\ell \in Z(\Phi)$ とする. 最高ルートを $\tilde{\alpha}$ とし, $c_i := (\varpi_i, \tilde{\alpha})$, $i = 1, \cdots, \ell$ とする. すなわち, c_i は最高ルートを単純ルートの線形和で表した時の係数である. $c_0 := 1$ と定めると, コクセター数 h_Φ との間に $c_0 + \cdots + c_\ell = h_\Phi$ が成り立つ [4]. F_Φ を $0, \frac{\varpi_1}{c_1}, \cdots, \frac{\varpi_\ell}{c_\ell}$ による凸包とする. F_Φ を closed fundamental alcove という. 既約ルート系の Ehrhart 準多項式 $\mathrm{L}_\Phi(q)$ を $q > 0$ のとき,

$$\mathrm{L}_\Phi(q) = \#(qF_\Phi \cap Z(\Phi)) \tag{13}$$

を満たすものと定める. 以下が成り立つ.

定理 **3.2** (Suter [14])**.**

$$\mathrm{L}_\Phi(-t) = (-1)^\ell \mathrm{L}_\Phi(t - h_\Phi). \tag{14}$$

また, 異なる既約ルート系の Ehrhart 準多項式の間に以下の関係がある.

命題 3.3. Φ をランク ℓ の既約ルート系とする. シフト作用素 $\mathrm{S}: t \to t-1$ とし, $[c]_t := \frac{1-t^c}{1-t} = 1+t+\cdots+t^{c-1}$, $c \in \mathbb{Z}$ とする. このとき,

$$\mathrm{L}_{A_\ell}(t) = [c_0]_{\mathrm{S}}[c_1]_{\mathrm{S}} \cdots [c_\ell]_{\mathrm{S}} \mathrm{L}_\Phi(t). \tag{15}$$

3.2 特性準多項式

この節では, 超平面配置の位相的, 組み合わせ論的性質と格子点の数え上げの関係を説明する. $\boldsymbol{a} = (a_1, \cdots, a_\ell) \in \mathbb{Z}^\ell$, $k \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{Z}_{>0}$ として, $\mathbb{R}^\ell$ 上の超平面 $H_{\boldsymbol{a},k}$ から $(\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})^\ell$ 上の超平面 $H^q_{\boldsymbol{a},k}$ を以下のように定める.

$$H^q_{\boldsymbol{a},k} := \{(x_1, \cdots, x_\ell) \in (\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})^\ell \mid a_1x_1 + \cdots + a_\ell x_\ell \equiv k \bmod q\}. \tag{16}$$

この操作によって, $\mathbb{R}^\ell$ 上の超平面配置 $\mathcal{A} = \{H_{\boldsymbol{a}_1,k_1}, \cdots, H_{\boldsymbol{a}_m,k_m}\}$ から $(\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})^\ell$ 上の超平面配置 $\mathcal{A}^q = \{H^q_{\boldsymbol{a}_1,k_1}, \cdots, H^q_{\boldsymbol{a}_m,k_m}\}$ が定まる. $\mathcal{A}^q$ の補集合は

$$\mathcal{M}(\mathcal{A}^q) := (\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})^\ell \setminus \cup_{i=1}^m H^q_{\boldsymbol{a}_i,k_i}, \tag{17}$$

となる. $(\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})^\ell$ は q^ℓ 個の格子点を持つ格子であるため, $\mathcal{M}(\mathcal{A}^q)$ は q^ℓ 個の格子点から超平面上に乗っている格子点を除いたものである. 格子点の個数は $\#\mathcal{M}(\mathcal{A}^q)$ と書ける. Kamiya, Takemura, Terao は以下の主張を示した.

定理 3.4 (Kamiya-Takemura-Terao [6], [8])**.** ある準多項式 $\chi_{quasi}(\mathcal{A}, \bullet): \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ が存在し, q が十分大きいとき,

$$\chi_{quasi}(\mathcal{A}, q) = \#\mathcal{M}(\mathcal{A}^q). \tag{18}$$

さらに, $\chi_{quasi}(\mathcal{A}, q)$ の周期を ρ とし, $q \equiv i \bmod \rho$ のときの構成素を $\chi_{quasi}(\mathcal{A}, q) = f_i(q)$ とすると,

$$\gcd(\rho, i) = \gcd(\rho, j) \Rightarrow f_i(t) = f_j(t),$$

が成り立つ [6], [8]. すなわち, $\chi_{quasi}(\mathcal{A}, q)$ の構成素は q と周期 ρ の最大公約数だけで決まる. このような準多項式の性質を gcd-property という. また, $\chi_{quasi}(\mathcal{A}, q)$ は以下の重要な性質を持つ.

定理 3.5 ([2] Theorem 2.1)**.** $\gcd(q, \rho) = 1 \Rightarrow \chi_{quasi}(\mathcal{A}, q) = \chi(\mathcal{A}, q)$.

$\chi_{quasi}(\mathcal{A}, q)$ を特性準多項式という. 定理 3.5 より, 特性準多項式を通して, 格子点の数え上げから超平面配置の位相的, 組み合わせ論的性質が分かる.

3.3 Eulerian 多項式

古典的な Eulerian 多項式と Lam-Postnikov による Eulerian 多項式の既約ルート系への一般化を紹介する. 一般化された Eulerian 多項式は Linial 配置において, 超平面によって分割された領域を数える際に現れる [17]. 古典的な Eulerian 多項式は以下のように対称群 $\mathfrak{S}_n$ に付随する多項式で, さまざまな組み合わせ論的解釈が知られている.

定義 3.6. $\tau \in \mathfrak{S}_n$ に対して,

$$a(\tau) := \#\{i \in \{1, \cdots, n-1\} \mid \tau(i) < \tau(i+1)\},$$

と定める. ここから定まる数

$$\mathrm{A}(n, k) := \#\{\tau \in \mathfrak{S}_n \mid a(\tau) = k-1\} \tag{19}$$

$(1 \leqq k \leqq n-1)$ を *Eulerian number* という．*Eulerian number* から *Eulerian* 多項式が以下のように定まる．

$$\mathrm{A}_n(t) := \sum_{k=1}^{n} \mathrm{A}(n,k) t^k = \sum_{\tau \in \mathfrak{S}_n} t^{1+a(\tau)}. \tag{20}$$

ここで, $\mathrm{A}_0(t) = 1$ とする．

Eulerian number は $\mathrm{A}(n,k) = \mathrm{A}(n, n-(k-1))$ という対称性を持ち、このことから $\mathrm{A}_n(t) = t^{n+1}\mathrm{A}_n(t^{-1})$ が成り立つ．以下は Eulerian 多項式の最も基本的な関係式であり, Worpitzky identity と呼ばれる．

定理 3.7 (Worpitzky [16])**.**

$$t^\ell = \mathrm{A}_\ell(\mathrm{S}) \binom{t+\ell}{\ell}. \tag{21}$$

また, Eulerian 多項式は以下の合同式によって, 定数倍を除いて特徴付けられる [5].

定理 3.8 ([5], [17])**.** $\ell \geqq 1$, $m \geqq 2$ とする．このとき,

$$\mathrm{A}_\ell(t^m) \equiv \frac{1}{m^{\ell+1}} [m]_t^{\ell+1} \mathrm{A}_\ell(t) \mod (1-t)^{\ell+1}. \tag{22}$$

$f(t)$ を多項式としたとき, $f(at) = a^\ell f(t)$ という式が t^ℓ の定数倍を除いた特徴付けであることが Worpitzky identity (21) を通して, 合同式 (22) が Eulerian 多項式の定数倍を除いた特徴付けであることに対応する．Lam と Postnikov は以下のように Eulerian 多項式の一般化を導入した [9].

定義 3.9. Φ は既約ルート系, W をその Weyl 群とする．$\omega \in W$ に対して,

$$\mathrm{asc}(\omega) := \sum_{\substack{0 \leqq i \leqq \ell \\ \omega(\alpha_i) > 0}} c_i,$$

と定める．このとき,

$$\mathrm{R}_\Phi(t) := \frac{1}{f} \sum_{\omega \in W} t^{\mathrm{asc}(\omega)}, \tag{23}$$

を Φ の一般化 *Eulerian* 多項式という．ここで $f = \#|Z(\Phi)/Q(\Phi)|$ である．

$c_0, \cdots, c_\ell$ を用いて, 一般化 Eulerian 多項式は以下のように分解できる．

定理 3.10 (Lam–Postnikov [9], Theorem 10.1)**.** Φ はランク ℓ の既約ルート系とする．このとき,

$$\mathrm{R}_\Phi(t) = [c_0]_t [c_1]_t \cdots [c_\ell]_t \mathrm{A}_\ell(t). \tag{24}$$

一般化 Eulerian 多項式は古典的な Eulerian 多項式を $\Phi = \mathrm{A}_\ell$ 型の場合として含む．実際, $\Phi = \mathrm{A}_\ell$ のとき, $c_0 = c_1 = \cdots = c_\ell = 1$ であり, $\mathrm{R}_{\mathrm{A}_\ell}(t) = \mathrm{A}_\ell(t)$ となる．他にも, $\deg \mathrm{R}_\Phi = h_\Phi - 1$ であることや $\mathrm{R}_\Phi(t) = t^{h_\Phi} \mathrm{R}_\Phi(t^{-1})$ が成り立つことが定理 3.10 よりわかる．また, 定理 3.8 の古典的な Eulerian 多項式の合同式と定理 3.10 の一般化 Eulerian 多項式の表示から以下の合同式が導かれる．

命題 3.11. Φ をランク ℓ のルート系とする．n を正の整数とする．このとき,

$$\mathrm{R}_\Phi(t^n) \equiv \left(\prod_{i=0}^{\ell} \frac{1}{n} [n]_{t^{c_i}}\right) \mathrm{R}_\Phi(t) \mod (1-t)^{\ell+1}. \tag{25}$$

3.4　Linial 配置の特性準多項式

Yoshinaga は超平面による領域の分割と分割された領域の格子点の数え上げの議論を経て, Linial 配置の特性準多項式の以下の表示を得た.

定理 3.12 (Yoshinaga [17])**.**

$$\chi_{quasi}(\mathcal{A}_{\Phi}^{[1,n]}, t) = \mathrm{R}_{\Phi}(\mathrm{S}^{n+1})\mathrm{L}_{\Phi}(t). \tag{26}$$

すなわち, 既約ルート系 Φ の Linial 配置の特性準多項式は Φ に付随する一般化 Eulerian 多項式と Ehrhart 準多項式で記述できる. この表示から特性準多項式は Ehrhart 準多項式の最小周期を周期としてもつことが分かる. この周期を以下では ρ とする. 式 (26) において $n = 0$ とすると, $\mathcal{A}_{\Phi}^{[1,n]} = \emptyset$ となり, 以下の Worpitzky identity の一般化が得られる.

定理 3.13 (Yoshinaga [17])**.**

$$t^{\ell} = \mathrm{R}_{\Phi}(\mathrm{S})\mathrm{L}_{\Phi}(t). \tag{27}$$

式 (27) では, 準多項式 $\mathrm{L}_{\Phi}(t)$ が $\mathrm{R}_{\Phi}(\mathrm{S})$ の作用によって多項式になっている.

4　主結果

本研究では, 式 (26) の右辺を計算することで以下の結果を得た.

定理 4.1. $m := \frac{n+1}{\gcd(n+1,\rho)}$ とする. $\rho_n := \gcd(n+1, \rho)$ とする. このとき,

$$\chi_{quasi}(\mathcal{A}_{\Phi}^{[1,n]}, t) = \left(\prod_{j=0}^{\ell} \frac{1}{m}[m]_{\mathrm{S}^{c_j \cdot \rho_n}}\right)\chi_{quasi}(\mathcal{A}_{\Phi}^{[1,\rho_n - 1]}, t). \tag{28}$$

特に, $\chi_{quasi}(\mathcal{A}_{\Phi}^{[1,n]}, t)$ は周期 ρ_n をもつ.

定理 4.1 の特別な場合として, 以下が成り立つ.

定理 4.2. $\rho_n = \gcd(n+1, \rho) = 1$ のとき,

$$\chi_{quasi}(\mathcal{A}_{\Phi}^{[1,n]}, t) = \left(\prod_{j=0}^{\ell} \frac{1}{n+1}[n+1]_{\mathrm{S}^{c_j}}\right)t^{\ell}. \tag{29}$$

特に, $\chi_{quasi}(\mathcal{A}_{\Phi}^{[1,n]}, t)$ は多項式となる. $\chi(\mathcal{A}_{\Phi}^{[1,n]}, t)$ の任意の根の実部は $\frac{nh_{\Phi}}{2}$.

式 (29) を用いて, $\rho_n = 1$ のとき, $\chi(\mathcal{A}_{\Phi}^{[1,n]}, t)$ の根の実部が $\frac{nh_{\Phi}}{2}$ であることを示す. 手法は [2], [12], [17] で用いられているものと同様である. $a \in \mathbb{R}$ とし, $I_a := \{f(t) \in \mathbb{C}[t] \mid f(z) = 0 \Rightarrow \mathrm{Re}\, z = a\}$ とする. $I_{S^1} := \{f(t) \in \mathbb{C}[t] \mid f(z) = 0 \Rightarrow |z| = 1\}$ とする.

補題 4.3 ([12])**.** $a \in \mathbb{R}$ とし, $g(t) \in I_{S^1}$, $f(t) \in I_a$ とする. このとき, $g(\mathrm{S})f(t) \in I_{a+\frac{\deg g}{2}}$ となる.

$t^{\ell} \in I_0$ は明らか. $[n+1]_t \in I_{S^1}$ であり, 次数は $\deg([n+1]_{t^{c_j}}) = nc_j$, $(j = 0, \cdots, \ell)$ である. $c_0 + c_1 + \cdots + c_{\ell} = h_{\Phi}$ であるため [4], 多項式 $g(t) := \prod_{j=0}^{\ell} \frac{1}{n+1}[n+1]_{t^{c_j}}$ の次数は $\deg g = n(c_0 + c_1 + \cdots + c_{\ell}) = nh_{\Phi}$ となる. 補題 4.3 により, $\chi(\mathcal{A}_{\Phi}^{[1,n]}, t)$ の根の実部は $\frac{n(c_0+c_1+\cdots+c_{\ell})}{2} = \frac{nh_{\Phi}}{2}$ となる.

定理 4.1 に対して補題 4.3 を用いると, 各 Φ に対して, $\chi(\mathcal{A}_\Phi^{[1,\rho_n-1]},t)$ の根の実部が $\frac{(\rho_n-1)h_\Phi}{2}$ であれば予想 2.1 が成り立つことが分かる. すなわち, 周期 ρ の約数の個数分の特性多項式を調べれば Φ に対して予想 2.1 が成り立つか分かる. 以下の定理によって調べる特性多項式の個数をより少なくできる.

定理 4.4. $\eta := \frac{\rho_n}{\mathrm{rad}(\rho_n)}$ とする. このとき,

$$\chi(\mathcal{A}_\Phi^{[1,\rho_n-1]},t) = (\prod_{j=0}^{\ell}\frac{1}{\eta}[\eta]_{\mathrm{S}^{c_j\cdot\mathrm{rad}(\rho_n)}})\chi(\mathcal{A}_\Phi^{[1,\mathrm{rad}(\rho_n)-1]},t), \tag{30}$$

ここで, $\mathrm{rad}(a) := \prod_{p|a,p:prime} p$, $a \in \mathbb{Z}$ である.

定理 4.4 は特性準多項式に対しては成り立たない. 特性多項式が周期と互いに素な整数上の構成素である (定理 3.5) ため成立する. 定理 4.4 により, $\mathrm{rad}(\rho)$ の約数 $\mathrm{rad}(\rho_n)$ に対応する特性多項式 $\chi(\mathcal{A}_\Phi^{[1,\mathrm{rad}(\rho_n)-1]},t)$ の根を調べれば予想 2.1 の正否を確定できる.

5 証明の概要

定理 4.1 がどのように示されるか解説する. まず, 簡単な場合として定理 3.12 において, 仮に $\mathrm{L}_\Phi(t)$ が多項式であるとする. 次数は ℓ とする. $(1-\mathrm{S})$ を多項式に作用させると, $(1-\mathrm{S})\mathrm{L}_\Phi(t) = \mathrm{L}_\Phi(t) - \mathrm{L}_\Phi(t-1)$ と差分を取ることになり, 次数が 1 つ下がる. よって帰納的に, $(1-\mathrm{S})^{\ell+1}\mathrm{L}_\Phi(t) = 0$ とわかる. $n+1 = m\rho_n$ として, 定理 3.11 の合同式を用いると,

$$\mathrm{R}_\Phi(\mathrm{S}^{n+1})\mathrm{L}_\Phi(t) = (\prod_{i=0}^{\ell}\frac{1}{n}[m]_{\mathrm{S}^{c_i\rho_n}})\mathrm{R}_\Phi(\mathrm{S}^{\rho_n})\mathrm{L}_\Phi(t), \tag{31}$$

となることが分かる. 定理 3.12 を用いて式 (31) の両辺を特性準多項式で表示すれば, 定理 4.1 が示される.

しかし, 実際は $\mathrm{L}_\Phi(t)$ は準多項式であり, 準多項式に対して $(1-\mathrm{S})^{\ell+1}\mathrm{L}_\Phi(t) = 0$ は一般には成り立たない. これは $\mathrm{L}_\Phi(t)$ と $\mathrm{L}_\Phi(t-1)$ の構成素が異なるため, $\mathrm{L}_\Phi(t) - \mathrm{L}_\Phi(t-1)$ が異なる多項式間の差分になっているからである. 同じ多項式間の差分を行うために, 準多項式の構成素をずらさず, 多項式の変数だけ $t \mapsto t-1$ と変換するような作用素 $\overline{\mathrm{S}}$ を考える. すなわち,

$$(\overline{\mathrm{S}}f) := \begin{cases} f_1(t-1), & t \equiv 1 \bmod p, \\ f_2(t-1), & t \equiv 2 \bmod p, \\ \quad\vdots & \\ f_{p-1}(t-1), & t \equiv p-1 \bmod p, \\ f_p(t-1), & t \equiv 0 \bmod p. \end{cases}$$

巡回置換 σ を準多項式 $f(t)$ に作用させたものを以下のように書くことにする.

$$f^\sigma(t) := \begin{cases} f_{\sigma^{-1}(1)}(t), & t \equiv 1 \bmod p, \\ f_{\sigma^{-1}(2)}(t), & t \equiv 2 \bmod p, \\ \quad\vdots & \\ f_{\sigma^{-1}(p-1)}(t), & t \equiv p-1 \bmod p, \\ f_{\sigma^{-1}(p)}(t), & t \equiv 0 \bmod p. \end{cases}$$

この記法を用いると作用素 $\overline{\mathrm{S}}$ と S の関係は以下のように書ける.

$$
(\mathrm{S}f)(t) = \begin{cases} f_p(t-1), & t \equiv 1 \bmod p, \\ f_1(t-1), & t \equiv 2 \bmod p, \\ \quad \vdots & \\ f_{p-2}(t-1), & t \equiv p-1 \bmod p, \\ f_{p-1}(t-1), & t \equiv 0 \bmod p, \end{cases}
$$

$$
= \begin{cases} f_{\sigma^{-1}(1)}(t-1), & t \equiv 1 \bmod p, \\ f_{\sigma^{-1}(2)}(t-1), & t \equiv 2 \bmod p, \\ \quad \vdots & \\ f_{\sigma^{-1}(p-1)}(t-1), & t \equiv p-1 \bmod p, \\ f_{\sigma^{-1}(p)}(t-1), & t \equiv 0 \bmod p, \end{cases}
$$

$$
= (\overline{\mathrm{S}}f^{\sigma})(t).
$$

重要なことは, 次数 ℓ の準多項式 $f(t)$ に対して, $(1-\overline{\mathrm{S}})^{\ell+1}\mathrm{L}_\Phi(t) = 0$ が成り立つということである. そのため, 仮に,

$$
\chi(\mathcal{A}^{[1,n]}, t) = \mathrm{R}_\Phi(\overline{\mathrm{S}}^{n+1})\mathrm{L}_\Phi(t), \tag{32}
$$

であるなら上記と同様に定理 3.11 を用いることで式 (31) を示せる. 実際は, 式 (32) に少し変更を加えた以下が成り立つ.

$$
\chi(\mathcal{A}^{[1,n]}, t) = \mathrm{R}_\Phi(\overline{\mathrm{S}}^{n+1})\tilde{\mathrm{L}}_\Phi^{n+1}(t). \tag{33}
$$

ここで,

$$
\tilde{\mathrm{L}}_\Phi^{n+1}(t) = \frac{\mathrm{L}_\Phi^{\sigma^{n+1}}(t) + \mathrm{L}_\Phi^{\sigma^{2(n+1)}}(t) + \cdots + \mathrm{L}_\Phi^{\sigma^{\rho(n+1)}}(t)}{\rho}. \tag{34}
$$

$\tilde{\mathrm{L}}_\Phi^{n+1}(t)$ は $\mathrm{L}_\Phi(t)$ を平均したものといえる. 式 (33) の右辺ではシフト作用素 $\mathrm{R}_\Phi(\mathrm{S}^{n+1})$ によって, $\mathrm{L}_\Phi(t)$ が平均されている. 以下では, 一般の周期 p を持つ準多項式 $f(t)$ に対しても, $\tilde{f}^i(t) := \frac{f^{\sigma i}(t)+\cdots+f^{\sigma^{pi}}(t)}{p}$, $i \in \mathbb{Z}$ と定める. $\tilde{\mathrm{L}}_\Phi^{n+1}(t)$ は $n+1$ に依存しているように見えるが, 実は $\rho_n = \gcd(n+1, \rho)$ で決まる. すなわち, $\tilde{\mathrm{L}}_\Phi^{n+1}(t) = \tilde{\mathrm{L}}_\Phi^{\rho_n}(t)$ となる. $\tilde{\mathrm{L}}_\Phi^{\rho_n}(t)$ は周期 ρ_n を持つ. 平均を取る操作によって $\mathrm{L}_\Phi(t)$ よりも周期が小さくなっている. 定理 3.13 や定理 4.2 で準多項式だったものが多項式になっているのは, シフト作用素によって平均されて周期 1 となっているからである. 準多項式をシフト作用素によって平均するために以下の補題を用いる.

補題 5.1. $g(t)$ を多項式とする. $[n]_t^{\ell+1}g(t) = \sum_{k=0} a_k t^k$ とする. このとき,

$$
\frac{1}{n}[n]_t^{\ell+1}g(t) \equiv \sum_{k \equiv 0 \bmod n} a_k t^k \equiv \cdots \equiv \sum_{k \equiv n-1 \bmod n} a_k t^k \mod (1-t)^{\ell+1}. \tag{35}
$$

準多項式の構成素が全て同じ多項式であるとき準多項式は多項式である, という自明な主張を有理母関数の分子を用いて記述すると補題 5.1 のような非自明な合同式となる. Athanasiadis [2] によって示されていた補題をわずかに拡張したものである. 補題 5.1 によってどのように準多項式が平均されるか簡単な例で見てみる. まず, 次数 ℓ, 周期 2 の準多項式を考える.

$$
f(t) = \begin{cases} f_1(t), & t \equiv 1 \bmod 2, \\ f_2(t), & t \equiv 2 \bmod 2. \end{cases}
$$

このとき, $\tilde{f}^1(t) = \frac{1}{2}(f^\sigma(t) + f^{2\sigma}(t)) = \frac{1}{2}(f_1(t) + f_2(t))$ である. この準多項式にシフト作用素 $[2]_\mathrm{S}^{\ell+1} = \sum_{k=0} a_k \mathrm{S}^k$ を作用させる. 補題 5.1 を用いると,

$$
\frac{1}{2}[2]_\mathrm{S}^{\ell+1} \equiv \sum_{k:odd} a_k \mathrm{S}^k \equiv \sum_{k:odd} a_k \mathrm{S}^k \mod (1-\mathrm{S})^{\ell+1}, \tag{36}
$$

とわかる．$(1-\overline{\mathrm{S}})^{\ell+1}f(t)=0$ であるため, $t\equiv 0 \bmod 2$ として,

$$
\begin{aligned}
[2]_{\mathrm{S}}^{\ell+1}f(t) &= \sum_{k:odd} a_k\overline{\mathrm{S}}^k f_1(t) + \sum_{k:even} a_k\overline{\mathrm{S}}^k f_2(t)\\
&= [2]_{\overline{\mathrm{S}}}^{\ell+1}\frac{1}{2}(f_1(t)+f_2(t))\\
&= [2]_{\overline{\mathrm{S}}}^{\ell+1}\tilde{f}^1(t).
\end{aligned}
$$

$t\equiv 1 \bmod 2$ としてもほぼ同様である．今の場合, $[2]_{\mathrm{S}}^{\ell+1}f(t)$ は多項式と分かる．より一般に以下が成り立つ．

補題 **5.2.** $f(t)$ を周期 p をもつ次数 ℓ の準多項式とする．$g(t)$ を多項式とする．m を正の整数とする．このとき,

$$
[p]_{\mathrm{S}^m}^{\ell+1}g(\mathrm{S}^m)f(t) = [p]_{\overline{\mathrm{S}}^m}^{\ell+1}g(\overline{\mathrm{S}}^m)\tilde{f}^m(t). \tag{37}
$$

注意として, 補題 5.2 を用いるには $[p]_{\mathrm{S}^m}$ が $f(t)$ の次数 ℓ よりも多く ($\ell+1$ 個以上) 作用している必要がある．今回の問題においてシフト作用素による平均化 (補題 5.2) が機能するのは Ehrhart 準多項式が以下の分解を持つためである．

命題 **5.3.**

$$
\mathrm{L}_\Phi(t) = \sum_{k=0}^{\hat{\ell}} \mathrm{L}_{\hat{c}_k}^{(\ell_{\hat{c}_k})}(t). \tag{38}
$$

ここで, $\hat{c}_0,\cdots,\hat{c}_{\hat{\ell}}$ は $c_0,\cdots,c_\ell$ の中の互いに異なる数全体であり, $\ell_{\hat{c}_k}+1$ は $c_0,\cdots,c_\ell$ の中の $\hat{c}_k$ の個数である．$\mathrm{L}_{\hat{c}_k}^{(\ell_{\hat{c}_k})}(t)$ は次数 $\ell_{\hat{c}_k}$, 周期 $\hat{c}_k$ の準多項式である．

この分解は $\mathrm{L}_\Phi(t)$ の有理母関数を考えた時, その適当な部分分数分解に対応する． この分解と Lam-Postnikov による一般化 Eulerian 多項式の分解 (定理 3.10) を合わせると, Yoshinaga の特性準多項式の表示 (定理 3.12) より,

$$
\begin{aligned}
\chi_{quasi}(\mathcal{A}^{[1,n]},t) &= \mathrm{R}_\Phi(\mathrm{S}^{n+1})\mathrm{L}_\Phi(t) &(39)\\
&= \mathrm{A}_\ell(\mathrm{S}^{n+1})\Big(\prod_{k=0}^{\ell}[c_k]_{\mathrm{S}^{n+1}}\Big)\sum_{k=0}^{\hat{\ell}}\mathrm{L}_{\hat{c}_k}^{(\ell_{\hat{c}_k})}. &(40)
\end{aligned}
$$

$\prod_{k=0}^{\ell}[c_k]_{\mathrm{S}^{n+1}}$ は各 $[\hat{c}_k]_{\mathrm{S}^{n+1}}^{\ell_{\hat{c_k}}+1}$ に対して, ある多項式 $g_k(t)$ が存在し, $\prod_{k=0}^{\ell}[c_k]_{\mathrm{S}^{n+1}} = g_k(\mathrm{S})[\hat{c}_k]_{\mathrm{S}^{n+1}}^{\ell_{\hat{c_k}}+1}$ と書ける．このとき, $[\hat{c}_k]_{\mathrm{S}^{n+1}}$ が $\mathrm{L}_{\hat{c}_k}^{(\ell_{\hat{c}_k})}(t)$ の次数 $+1$ 個あるため, 補題 5.2 が適用できる．各 $[c_k]_{\mathrm{S}^{n+1}}^{\ell_{\hat{c_k}}+1}$ によって, $\mathrm{L}_{\hat{c}_k}^{(\ell_{\hat{c}_k})}$ が平均され $\overbrace{\mathrm{L}_{\hat{c}_k}^{(\ell_{\hat{c}_k})}}^{n+1}$ となる．和を取ると $\tilde{\mathrm{L}}_\Phi^{n+1}(t) = \sum_{k=0}^{\hat{\ell}}\overbrace{\mathrm{L}_{\hat{c}_k}^{(\ell_{\hat{c}_k})}}^{n+1}$ であり, 式 (33) が示される．式 (33) と $\tilde{\mathrm{L}}_\Phi^{n+1}(t) = \tilde{\mathrm{L}}_\Phi^{\rho_n}(t)$ によって, 定理 4.1 が示される．

参考文献

[1] C.A. Athanasiadis, Algebraic combinatorics of graph spectra, subspace arrangements and Tutte polynomials, Ph.D. thesis, M.I.T. (1996).

[2] C.A. Athanasiadis, Extended Linial hyperplane arrangements for root systems and a conjecture of Postnikov and Stanley, J. Algebraic Combin. **10** (1999), no. 3, 207-225.

[3] M. Beck, S. Robins, Computing the continuous discretely. Integer-point enumeration in polyhedra, Undergraduate Texts in Mathematics, Springer, New York, 2007, xviii+226 pp.
(日本語訳) M. ベック, S. ロビンス, 訳:岡本吉央, 離散体積計算による組み合わせ数学入門, 初版, シュプリンガー・ジャパン株式会社, 2010.

[4] J.E. Humphreys, Reflection groups and Coxeter groups, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, 29, Cambridge University Press, Cambridge, 1990, xii+204 pp.

[5] K. Iijima, K. Sasaki, Y. Takahashi, M. Yoshinaga, Eulerian polynomials and polynomial congruences, Contrib. Discret. Math., **14** (2019), no. 1, 46-54.

[6] H. Kamiya, A. Takemura, H. Terao, Periodicity of hyperplane arrangements with integral coefficients modulo positive integers, J. Algebraic Combin. **27** (2008), no. 3, 317-330.

[7] H. Kamiya, A. Takemura, H. Terao, The characteristic quasi-polynomials of the arrangements of root systems and mid-hyperplane arrangements, in: F. El Zein, A.I. Suciu, M. Tosun, A.M. Uludağ, S. Yuzvinsky (Eds.), Arrangements, local systems and singularities, Progr. Math. **283**, Birkhäuser Verlag, Basel, 2010, pp. 177-190.

[8] H. Kamiya, A. Takemura, H. Terao, Periodicity of non-central integral arrangements modulo positive integers, Ann. Comb. **15** (2011), no. 3, 449-464.

[9] T. Lam, A. Postnikov, Alcoved polytopes II, in: V.G. Kac, V.L. Popov (Eds.), Lie Groups, Geometry, and Representation Theory, Progr. Math., **326**, Birkhäuser Basel, 2018, pp. 253-272.

[10] P. Orlik and L. Solomon, Combinatorics and topology of complements of hyperplanes. Invent. Math. **56** (1980), no. 2, 167-189.

[11] P. Orlik, H. Terao, Arrangements of hyperplanes, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, 300, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1992, xviii+325 pp.

[12] A. Postnikov, R. Stanley, Deformations of Coxeter hyperplane arrangements, J. Comb. Theory Ser. A, **91** (2000), no. 1-2, 544-597.

[13] R. Stanley, Enumerative Combinatorics. Volume 1, second ed., Cambridge Studies in Advanced Mathematics, vol. 49, Cambridge University Press, Cambridge, 2012, xiv+626 pp.

[14] R. Suter, The number of lattice points in alcoves and the exponents of the finite Weyl groups, Math. Comp., **67** (1998), no. 222, 751-758.

[15] S. Tamura, Postnikov–Stanley Linial arrangement conjecture, arXiv preprint arXiv:2012.05634 (2020).

[16] J. Worpitzky, Studien über die Bernoullischen und Eulerischen Zahlen, J. Reine Angew. Math., **94** (1883) 203-232.

[17] M. Yoshinaga, Worpitzky partitions for root systems and characteristic quasi-polynomials, Tohoku Math. J., **70** (2018), no. 1, 39-63.

[18] M. Yoshinaga, Characteristic polynomials of Linial arrangements for exceptional root systems, J. Comb. Theory Ser. A, **157** (2018) 267-286.

[19] 吉永 正彦, ルート格子に付随したアフィン超平面配置について (組合せ論的表現論の諸相), 数理解析研究所講究録, **1382** (2004) 20-36.

[20] T. Zaslavsky, Facing up to arrangements: Face-count formulas for partitions of space by hyperplanes. Mem. Amer. Math. Soc. 1 (1975) no.154.