Homogenization result for reflecting diffusions in a continuum percolation cluster

慶應義塾大学大学院理工学研究科基礎理工学専攻
竹内裕隆 (Yutaka TAKEUCHI)

1 導入

ランダム媒質は確率論だけでなく自然科学においても研究がなされているテーマであり, 媒質（あるいは系）の不均一性がランダムに生じると考え, その解析を行う事を主な目的とする. 確率論的には, ランダム媒質とはランダムに決められた台集合であり, その上の確率過程やその推移密度について解析を行う事が目的となる[1].

ランダム媒質に関する主要な問題の一つに均一化がある. これは端的に言えばある現象において粗視的・巨視的にはランダム性は影響を与えていないという事を指す. 確率論的には, 均一化とは媒質上の確率論的対象に関するスケール極限が, 媒質を決めるランダム性とは無関係な極限に収束するという事である.

ランダム媒質に関する均一化はまず Kipnis-Varadhan([11]) によりボンドパーコレーション上のランダムウォークに対する annealed invariance principle が 1980 年に示された. だが, それより強い quenched invariance principle については長らく技術的な理由により解決されていなかった. しかし, 2000 年代に Barlow([3]) がその技術的なボトルネックを解消した事により, ボンドパーコレーション上のランダムウォークに対する quenched invariance principle が証明された ([4],[12]). それを皮切りに, より一般的な場合にまで quenched invariance principle の証明がなされた ([5],[1],[2]). 特に, Deushcel([7]) らが定常エルゴード的な場合に媒質にある種の可積分性と幾何的な条件を課すだけでその上のランダムウォークが quenched invariance principle を満たす事を示している. 最近では離散的な場合に関しては長距離相関を持つモデルや媒質にダイナミクスを入れたモデルに関しての研究が行われている.

一方で, 連続的なモデルに関しては, 拡散過程に関する quenched invariance principle がいくつか知られている ([8],[13],[6]). しかし, ある境界で拡散過程が反射する場合を考えると, 問題が難しくなり, それ程多くの結果は知られていない. 連続パーコレーション上の反射壁 Brown 運動に対する annealed invariance principle が知られているだけである ([15],[16]).

本講演では, 連続パーコレーションの無限クラスター上の反射壁を持つ拡散過程に関する均一化について最近得られた結果を述べる.

[1] 媒質を決めるランダム性と, その上の確率論対象に関するランダム性という二つのランダム性がある事に注意されたい.

2　準備

2.1　連続パーコレーション

$\mathbb{R}^d$ 上の配置空間 Ω を以下のように定める：

$$\Omega = \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} \delta_{x_i} \,\middle|\, \sum_{i=1}^{\infty} \delta_{x_i}(K) < \infty \text{ for all compact set } K \right\}.$$

Ω は適切な位相（漠位相）を入れる事ができ, その Borel 集合族は $\{\omega \in \Omega \mid \omega(A) = n\}$, $(A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d), n \in \mathbb{N})$ という形の部分集合から生成される事が知られている. また, ω は Dirac 測度の可算和であり, $\omega = \sum_i \delta_{x_i}$ と $\mathbb{R}^d$ の部分集合 $\{x_i\}_i$ を, x_i が全て異なっている場合に同一視する事とする[2].

連続パーコレーション $L(\omega)$ ($\omega \in \Omega$, ω は多重点を持たない) は

$$L(\omega) = \bigcup_{x \in \omega} B(x, \rho)$$

と定義される.（ω を先程の同一視で $\mathbb{R}^d$ の部分集合と見ている事に注意.）ここで, $B(x, r)$ は中心が x で半径が r の $\mathbb{R}^d$ の通常の開球であり, ρ は固定された正定数である. $L(\omega)$ が非有界連結成分をただ一つ持つ時, それを $W(\omega)$ と記し, これを無限クラスターとい呼ぶ. 便宜上非有界連結成分が存在しなかったり, 二つ以上存在する場合, $W(\omega) = \emptyset$ と定める.

パーコレーションは浸透現象を数理モデル化した物[3]であり, 中心点の配置 ω をある確率測度に基づいてランダムに配置していった時に $L(\omega)$ の幾何的な様子を調べる事に興味がある. 例えば, 無限クラスター $W(\omega)$ が存在するかどうかは基本的な問題である. 連続パーコレーションに関する基本的な事は [10] を参照されたい.

技術的な理由により除外集合 Δ を

$$\Delta = \left\{ \omega \in \Omega \,\middle|\, \begin{array}{l} \omega = \sum_i \delta_{x_i}, \ \ |x - y| = 2\rho \ \ (\exists x, y \in \omega) \\ \text{or } x_i = x_j \ (\exists i \neq j) \end{array} \right\}.$$

で定め, 考える集合を $\widehat{\Omega} = \{\omega \in \Omega \setminus \Delta \mid 0 \in W(\omega)\}$ に制限する.

$\mathbb{P}$ を Ω 上の確率測度とし, その $\widehat{\Omega}$ への制限 $\widehat{\mathbb{P}}$ を $\mathbb{P}(\widehat{\Omega}) > 0$ の場合 $\widehat{\mathbb{P}}(\cdot) = \mathbb{P}(\cdot \cap \widehat{\Omega}) / \mathbb{P}(\widehat{\Omega})$ で定める. また, $\widehat{\mathbb{P}}$ に関する期待値を $\widehat{\mathbb{E}}$ と記す.

---

[2] この同一視によって, 多重点を持たない Ω の元をピックアップする事は,（可算個の）粒子の配置を考える事と同義になるので Ω を配置空間と呼ぶ.

[3] 例えば, 雨粒が落ちて地面に染み込むという現象が該当する. この場合 ω とは無数の雨粒が落ちる位置であり, $L(\omega)$ とは雨粒が落ちてできる無数の円形のシミによる模様である.

また, 配置空間上のシフト τ_z を

$$\tau_z\omega(A) = \omega(A+z) = \sum_{x\in\omega}\delta_x(A+z) = \sum_{x\in\omega}\delta_{x-z}(A),$$

で定める.

$x \in \mathbb{R}^d$ と $\omega \in \widehat{\Omega}$ に対して

$$\gamma^\omega(x) = \sup\{t \in [0,1] \mid tx \in W(\omega)\}$$

と定め, x の最近接点 $s^\omega(x)$ を

$$s^\omega(x) = \gamma^\omega(x)x$$

で定義する.

2.2 双線形形式

$a\colon \Omega \to \mathbb{R}^{d\times d}$ を行列値確率変数とし, $u, v \in L^2(W(\omega))$ に対して $\mathcal{E}^\omega(u,v)$ を

$$\mathcal{E}^\omega(u,v) = \int_{W(\omega)} \langle a(\tau_x\omega)\nabla u(x), \nabla v(x)\rangle dx$$

で定める. （$\langle\cdot,\cdot\rangle$ はユークリッド内積. ）

$C_c^\infty\left(\overline{W(\omega)}\right) \cap L^2(W(\omega))$ を $(\cdot,\cdot) + \mathcal{E}^\omega(\cdot,\cdot)$ という内積で完備化したものを, $\mathcal{F}^\omega$ とする. ここで, $(\cdot,\cdot)$ は L^2 内積であり, $\mathbb{R}^d$ 上の領域 U に対して関数空間 $C_c^\infty(\overline{U})$ とは

$$C_c^\infty(\overline{U}) = \{u \in C(U) \mid \text{ある } U \text{ の開近傍 } V \text{ と } v \in C_c^\infty(V) \text{ が存在して } u = v \text{ in } U.\}$$

で定まる集合である.

3 主結果

この節では無限クラスター $W(\omega)$ の均一化に関する主結果を述べる. 初めにその為の仮定を紹介する.

Assumption 3.1. (1) $\mathbb{P}$ はシフトに関して定常かつエルゴード的. すなわち,

$$\begin{cases} \mathbb{P}\circ\tau_x^{-1} = \mathbb{P} \\ \tau_x^{-1}(A) = A \Rightarrow \mathbb{P}(A) \in \{0,1\} \end{cases}$$

が全ての $x \in \mathbb{R}^d$ に関して成立する.

(2) $\mathbb{P}\left(\widehat{\Omega}\right) > 0$ かつほとんど全ての $\omega \in \widehat{\Omega}$ に対して $W(\omega)$ は Lipschitz 領域になる.

(3) $W(\omega, x, R)$ を $W(\omega) \cap B(s^\omega(x), R)$ の $s^\omega(x)$ を含む連結成分とする．この時, $\widehat{\mathbb{P}}$-a.s.ω に対して, ある正定数 C_V が存在して

$$C_V R^d \leq |W(\omega, x, R)|$$

がほとんど全ての $x \in W(\omega)$ と十分大きな $R > 0$ に対して成立する．ここで $|\cdot|$ は Lebesgue 測度.

(4) ほとんど全ての $\omega \in \widehat{\Omega}$ に対して,

$$\inf \left\{ \frac{\mathcal{H}_{d-1}(W(\omega) \cap \partial O)}{|W(\omega) \cap O|^{\frac{d-1}{d}}} \mid O \text{ is open subset} \right\} > 0$$

が成り立つ．ここで $\mathcal{H}_{d-1}$ は $d-1$ 次元 Hausdorff 測度.

(5) ある非負値可測関数 λ, Λ が存在して, ほとんど全ての ω と $\xi \in W(\omega)$ に対して

$$\lambda(\omega)|\xi|^2 \leq \langle a(\omega)\xi, \xi \rangle \leq \Lambda(\omega)|\xi|^2$$

が成り立つ.

(6) $1/p + 1/q < 1/d$ を満たすある $p, q \in [1, \infty]$ が存在して,

$$\widehat{\mathbb{E}}[\Lambda^p] < \infty, \quad \widehat{\mathbb{E}}[\lambda^{-q}] < \infty.$$

が成り立つ.

(7) $(\mathcal{E}^\omega, \mathcal{F}^\omega)$ は正則 Dirichlet 形式になり, 関連する Markov 過程 X_t^ω は推移密度 $p_t^\omega(\cdot, \cdot)$ を持つ.

Remark 3.2. Assumption3.1 (1) と (2) は例えば $\mathbb{P}$ が Poisson 点過程の場合, ρ を適切に取れば満たされる.

Assumption 3.1 (3) は幾何的な条件であり, 空間の広がり具合が元の Euclid 空間と同じであるという意味で自然な仮定である.

3.1 (4) もまた幾何的な条件であり, 境界の影響をうまく制御する為に必要な条件である.

Assumption 3.1 (7) は無限クラスター $W(\omega)$ 上に反射を持つ拡散過程を構成し, 解析的に扱う為に必要な仮定である．Dirichlet 形式の一般論については [9] などを参照されたい.

P_0^ω を 0 出発の確率過程 X_t^ω の法則とする.

Theorem 3.3 (Quenched invariance principle)**.** $d \geq 2$ とし, Assumption 3.1 を仮定する.

この時 $\widehat{\mathbb{P}}$-a.s.ω に対して scaled process $\{\varepsilon X_{\varepsilon^{-2}t}^\omega\}_t$ は P_0^ω の下で $\varepsilon \to 0$ の時共分散行列 Σ の Brown 運動に弱収束する．さらに, この Σ は non-random な正定値行列である.

Remark 3.4. (1) 上の定理はほとんど全ての媒質 ω を固定する (quenched) 度に測度 P_0^ω に関して媒質 ω に依らず同一の極限に収束するので quenched invariance principle と呼ばれる．一方で，P_0^ω のある種の平均を取った annealed measure に関する収束は annealed invariance principle と呼ばれ，quenched invarince principle より弱い概念である．

(2) 上の定理は次のように言い換えられる：

non-random な正定値行列 Σ が存在して，ほとんど全ての $\omega \in \widehat{\Omega}$ と開球 B と有界開区間 $I \subset (0, \infty)$ に対して，

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \sup_{t \in I} P_0^\omega(\varepsilon X_{t/\varepsilon^2}^\omega \in B) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi t)^d \det \Sigma}} \int_B \exp\left(\frac{\langle x, \Sigma^{-1} x \rangle}{2t}\right) dx$$

が成り立つ．ここで $k_t^\Sigma(x)$ 共分散行列 Σ のガウス分布の密度関数である．

より精密な推移密度レベルでの結果が以下の定理である．

Theorem 3.5 (Local central limit theorem)**.** Assumption 3.1 を仮定する．$R > 0$ とし，$I \subset (0, \infty)$ を有界開区間とする．この時，ほとんど全ての $\omega \in \widehat{\Omega}$ と $o \in W(\omega)$ に対して

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \sup_{|x-o|<R} \sup_{t \in I} \left| \varepsilon^{-d} p_{t/\varepsilon^2}^\omega(o, s^\omega(x/\varepsilon)) - \widehat{\mathbb{E}}[\Lambda]^{-1} k_t^\Sigma(x) \right| = 0$$

が成り立つ．

参考文献

[1] S. Andres, M.T. Barlow, J.-D. Deuschel, B.M. Hambly, Invariance principle for the random conductance model. Probab. Theory Relat. Fields **156**, 535–580 (2013)

[2] S. Andres, J.-D. Deuschel, M. Slowik, Invariance principle for the random conductance model in a degenerate ergodic environment. Ann. Probab. **43**(4), 1866–1891 (2015)

[3] M.T. Barlow, Random walks on supercritical percolation clusters, Ann. Probab. **32**(4), 3024–3084(2004)

[4] N. Berger, M. Biskup, Quenched invariance principle for simple random walk on percolation clusters. Probab. Theory Relat. Fields **137**, 83–120 (2007)

[5] M.T. Barlow, J.-D. Deuschel, Invariance principle for the random conductance model with unbounded conductances. Ann. Probab. **38**, 234–276 (2010)

[6] A. Charini and J.-D. Deushel, Invariance Principle for symmetric Diffusions in a degenerate and unbounded stationary and ergodic Random Medium, Annales de l'Institut Henri Poincaré, Probabilités et Statistiques, **52**, 1535–1563(2016)

[7] J.-D. Deushel, T.-A. Nguyen, M. Slowik, Quenched invariance principles for the random conductance model on a random graph with degenerate ergodic weights, Probab. Theory Relat. Fields. **170**, 363-386(2018)

[8] A. Fannjiang, T. Komorowski, A martingale approach to homogenization of unbounded random flows, Ann. of Probab. **25**, 1872–1894(1997)

[9] M. Fukushima, Y. Oshima, M. Takeda, Dirichlet Forms and Symmetric Markov Processes. De Gruyter studies in mathematics. W. de Gruyter, 1994

[10] R. Meester, R. Roy, *Continuum percolation*, (Cambride University Press, New York, 1996)

[11] C. Kipnis, S.R.S. Varadhan, Central limit theorem for additive functionals of reversible Markov processes and applications to simple exclusions. Commun. Math. Phys. **104**, 1–19(1986)

[12] P. Mathieu, A. Piatnitski, Quenched invariance principles for random walks on percolation clusters. Proc. R. Soc. A **463**, 2287–2307 (2007)

[13] H. Osada, Homogenization of diffusion processes with random stationary coefficients. Prob. Theory and Math. Statistics **1021**, 507–517(1983)

[14] H. Osada, Homogenization of reflecting barrier Brownian motions. In *Asymptotic Problems in Probability Theory : Stochastic Models and Diffusions on Fractals : Proceedings of the Taniguchi International Symposium, Sanda and Kyoto, 1990* Pitman Research notes in Math. Longman, **283** 59–74(1993)

[15] H. Osada and T. Saitoh, An invariance principle for non-symmetric Markov processes and reflecting diffusions in random domains. Probab. Theory Relat Fields **101**, 45–63(1995)

[16] H. Tanemura, Homogenization of a reflecting barrier Brownian motion in a continuum percolation cluster in $\mathbb{R}^d$, Kodai Math. J. **17**, 228–245(1994)